SKRIPT

Graph qualitativ skizzieren

1.) polynom in Linearfaktoren zerlegen $p(x) = (x+1)(x-3)$
2.) Nullstellen aus Linearfaktoren $\Rightarrow -1, 3$
3.) Graph skizzieren $p(0) = [y\text{Wert } x=0]$

Polynom

$p(x) = (x-2)^2(x+1) = 1x^3 - 3x^2 + 4$
$\Rightarrow$ Nullstellen $2x\ \{2\}$ & $1x\ \{-1\}$
$\Rightarrow$ Leitkoeffizient 1, Grad 3
$\Rightarrow$ Linearfaktoren $\{-2, 1\}$

Hornerschema

$x = -1$, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1	-3	0	4	·(-1)
↓	-1	4	-4	+
1	-4	4	0	✓

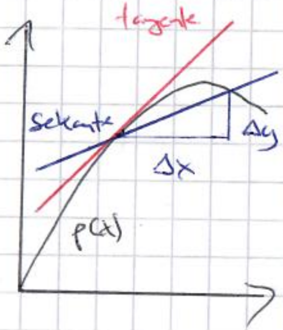
$(x+1)(x^2 - 4x + 4)$

Ableitung Polynom

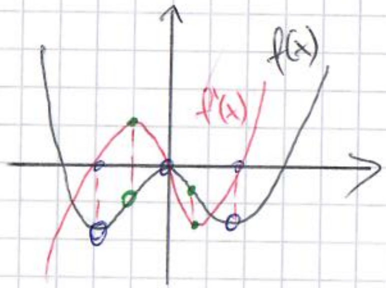
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = mittlerer Wert

$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = p'(x_0)$

Tangentensteigung $\Rightarrow$ Momentanwert



Lokale Maxima & Minima / Wendepunkte



Wendepunkte:

$f''(x) = 0$

$f'''(x) \neq 0$

$W(x, f(x))$

Maxima & Minima

$f'(x) = 0$

$f''(x) < 0$ Maxima
$f''(x) > 0$ Minimum $\Big\}$ $H(x, f(x))$

Ableitung $\Rightarrow$ Steigung im Kurvenpunkt

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

FR $\Rightarrow (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

SR $\Rightarrow (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Integral $\Rightarrow$ Grenzwert

$I = \int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$F(x) \Rightarrow$ Stammfunktion (Aufleitung von $f(x)$)

Bsp. $I = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{1}{3}3^3 + k\right) - \left(\frac{1}{6}1^3 + k\right) = \underline{\underline{\frac{13}{3}}}$

SKRIPT

Newton-Verfahren

$x_n \Rightarrow$ Startwert (möglichst Nahe bei Nullstelle)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \underline{x_n}$$

$\Rightarrow$ wieder bis 4 Nachkommastellen eingeführen

direktes Bildungsgesetz

$x_n = f(n)$

rekursives Bildungsgesetz (nächstes wird aus aktuellem berechnet)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ (Newton Verfahren)

arithmetische Folge (Gauss-Trick)

$d = a_{n+1} - a_n \Rightarrow a_n = a_0 + nd = f(n)$

geometrische Folge (Teleskopsumme)

$q = \frac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow a_n = a_0 \cdot q^n = f(n)$

Grenzwert, wenn $|q| < 1$ $\quad s_\infty = \frac{a_0}{1-q}$

Summenzeichen

$$\sum_{k=3}^{8} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

- Laufindex
- Untere Grenze
- Obere Grenze

Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

spezielle Summe & Gauss-Trick

$k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Gauss-Trick

$k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$k^3 \rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

Monotonie von Folgen

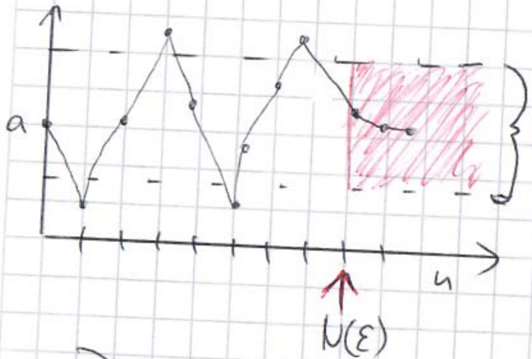
monoton wachsend	monoton fallend
$a_{n+1} \geq a_n$	$a_{n+1} \leq a_n$
$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$a_{n+1} - a_n \leq 0$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Beschränkungen

$a_n \leq M \Rightarrow$ nach oben beschränkt

$a_n \geq m \Rightarrow$ nach unten beschränkt

Konvergieren (Existenz eines Grenzwertes)



Band wird nicht mehr verlassen!

$\Rightarrow$ Vermutung aufstellen

Bsp. $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ $\quad a = 2$ (Vermutung)

$|a_n - 2| < \varepsilon \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$

Grenzwert (Limes)

$\lim\limits_{x \to y} f(x)$

Bsp. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f(0.1) = \frac{1}{0.1^2} = 100$

$\Rightarrow f(0.01) = \frac{1}{0.01^2} = 10'000$

$\Rightarrow$ je kleiner x, desto grösser das Resultat

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 0$

Eulersche Zahl

$e = 2.71828...$

$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Liste mit Grenzwerten

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ — harmonische Folge

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$ — geometrische Folge

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$ — n-te Wurzel

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ — Eulersche Zahl

Regeln Grenzwert

$\lim \lambda a_n = \lambda \cdot \lim a_n$ — Faktor

$\lim (a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$ — Summe

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$ — Produkt

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$ — Quotient

$\lim f(a_n) = f(a)$ — stetige Funktion (keine Sprünge)

SKRIPT

Regeln Ableiten

$(ab)' = (a'b) + (ab')$ Produkt

$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$ Quotient

$\sin(x)' = \cos(x)$ Sinus

$\cos(x)' = -\sin(x)$ Cosinus

$\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$ Tangens

$= \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\cot(x)' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$ Co-Tangens

$(e^x)' = e^x$ Eulersche Zahl

Additions-Theorem

$\sin(a+b) = (\sin(a) \cdot \cos(b)) + (\cos(a) \cdot \sin(b))$

Spezielle Ableitungen

$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$\arcsin(x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\arccos(x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$\ln(x) = \frac{1}{x}$

Verkettete Funktion

$y = f(x)$

$z = g(y)$

äußere Funktion
innere Funktion

$z = g(f(x)) = g \cdot f(x)$

Ableitung Kettenregel

$z(x) = g(f(x)) = g \cdot f(x)$

$z'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Tangentengleichung

$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

Normalengleichung

$-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

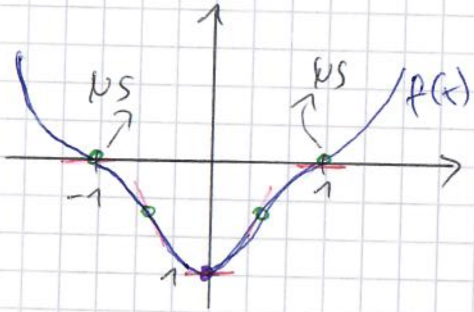
Qualitatives Skizzieren

BSP 1 $f(x) = (x^2-1)^3 = (x+1)^3 \cdot (x-1)^3$

Nullstellen $x_1 = -1$ (3-fach), $x_2 = 1$ (3-fach)

Symmetrieachse → y-Achse

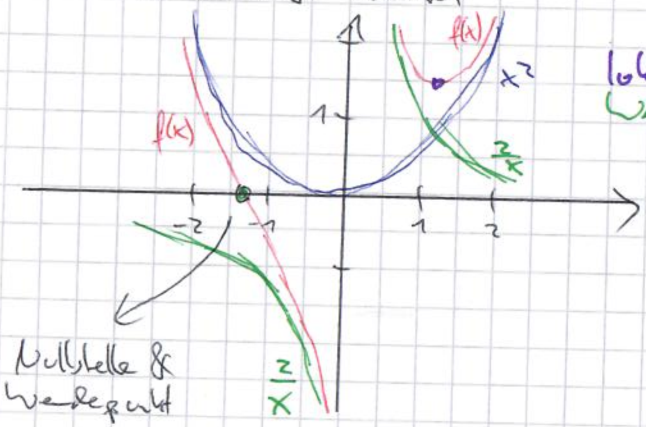
Minimum ⇒ $f(0) = -1$



Wendepunkte
globales Minimum

BSP 2 $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

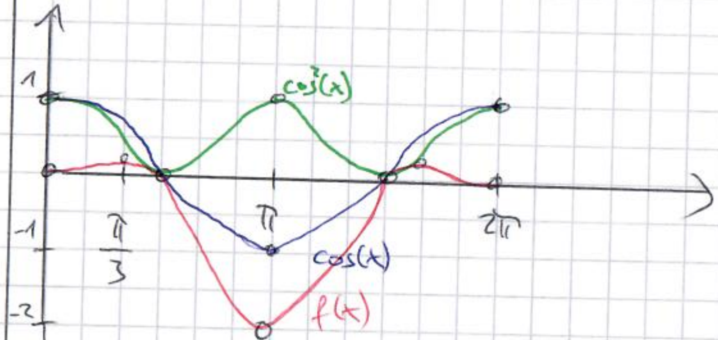
⇒ Summanden einzeln skizzieren & Stellenweise addieren



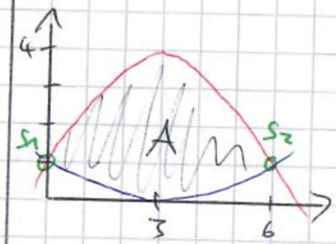
lokales Minimum
Wendepunkt

BSP 3 $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$

⇒ einzeln skizzieren & danach subtrahieren



BSP 4 $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 4$ $\quad g(x) = \frac{1}{3}\cdot(x-3)^2$

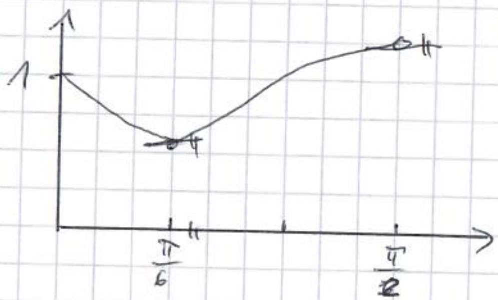


$S_1(0,1)$, $S_2(6,1)$ $\quad f(x) - g(x)$

$$A = \int_0^6 \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x\right) dx$$ Aufleitung

$$= \left(-\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right)\Big|_0^6 = \underline{\underline{16}}$$

BSP 5 $A(\varphi) = 1 - 2\sin(\varphi)\left(1 - \sin(\varphi)\right)$



REISSLEINE

Extremwertaufgaben Rezept

1.) Hauptbedingung aufstellen (Zielvariabel)

2.) Randbedingung aufstellen (Einschränkung)

3.) Randbedingung nach Variabel auflösen

4.) Variabel in Hauptbedingung einfügen

5.) Extremstelle bestimmen ($f'=0$, $f''\neq 0$)

6.) Restliche Grössen bestimmen

Newton-Verfahren Beispiel (2)

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}}, \quad g(x) = \sin(x)$$

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

Newtonverfahren für $x_0 = 0.5$, $x_1 = ?$

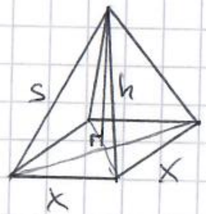
$$\varphi(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}} - \sin(x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}} - \cos(x)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \underline{\underline{0.515}}$$

Extremwertaufgabe Beispiel

$s = 3m$



$$s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 + h^2} \quad 2.)\ RB$$

$$h(x) = \sqrt{9 - \frac{x^2}{2}} \quad 3.)$$

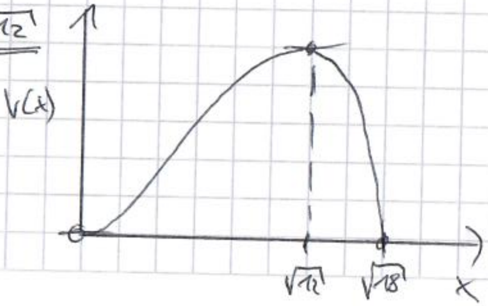
1.) HB $V(x) = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{2}}$

inkl. 4.)

5.) $V'(x) = \frac{1}{3}\left[2x\sqrt{9-\frac{x^2}{2}} + x^2 \frac{-x}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}}}\right] \overset{!}{=} 0$

$$2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}}}, \quad 4\left(9-\frac{x^2}{2}\right) = x^2$$

$$x^2 = 12, \quad x = \underline{\underline{\sqrt{12}}}$$



Grenzwerte Beispiele (3)

$$x_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)} \Rightarrow 1$$

$$x_n = \sqrt{4n^2+n+2} - \sqrt{4n^2+1} \Rightarrow \frac{1}{4}$$

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2n}+n} - \sqrt{n} \Rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} \rightarrow \frac{3}{5}$$

$$x_n = \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2} \Rightarrow 3$$

$$x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2n-1} \Rightarrow 1$$

$$x_n = \sqrt[5]{\frac{3n+2}{n+1}} \Rightarrow \sqrt[5]{3}$$

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^n \rightarrow e^{-\frac{1}{5}}$$

REISSLEINE

Potenzregeln

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{m+n} = a^n \cdot a^m$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$

Logarithmusregeln

$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$

$\log 1 = 0$

$\log x + \log y = \log xy$

$-\log x = \log \frac{1}{x}$

$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

$n \log x = \log x^n$

$\boxed{\frac{\log x}{\log a} = \log_a x \Rightarrow \text{Eingabe in TR}}$

Trigonometrie

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ / $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$