Analysis 3

1. Fouriertransformation

$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(w) e^{i\omega t} dw$$

1.1. Regeln

		Originalfunktion	Bildfunktion
0.	Definition 1	$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$	$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$
1.	Dualität	$\hat{x}(t)$	$x(-\omega)$
2.	Linearität $(a, b \in \mathbb{C})$	$ax(t) + by(t)$	$a\hat{x}(\omega) + b\hat{y}(\omega)$
3.	Skalierung $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{x}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4.	Zeitverschiebung $(t_0 \in \mathbb{R})$	$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \hat{x}(\omega)$
5.	Frequenzverschiebung $(\omega_0 \in \mathbb{R})$	$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$\hat{x}(\omega - \omega_0)$
6.	komplexe Konjugation	$\overline{x(t)}$	$\overline{\hat{x}(-\omega)}$
7.	Ableitung im Zeitbereich	$\frac{dx}{dt}(t)$	$i\omega \hat{x}(\omega)$
8.	Ableitung im Frequenzbereich	$-itx(t)$	$\frac{d\hat{x}}{d\omega}(\omega)$
9.	Faltung im Zeitbereich	$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') y(t - t')\, dt'$	$\sqrt{2\pi}\, \hat{x}(\omega) \hat{y}(\omega)$
10.	Faltung im Frequenzbereich	$\sqrt{2\pi}\, x(t) y(t)$	$(\hat{x} * \hat{y})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega') \hat{y}(\omega - \omega')\, d\omega'$

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

1.2. Wichtige Transformationen

Originalfunktion	Bildfunktion
$x(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$	$\hat{x}(\omega)$
$\operatorname{rect}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
1	$\sqrt{2\pi}\, \delta(\omega)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i\omega}$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \delta(\omega)$
e^{it}	$\sqrt{2\pi}\, \delta(\omega - 1)$

1.2.1. Rechteckfunktion

$$\mathcal{F}\{rect\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

1.2.2. Dirac Distibution

$$\delta(t) = \delta(-t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t - t')dt' = x(t)$$

1.3. Darstellung als Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right)\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0 - T} x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0 - T} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt$$

2. Partielle Differenzialrechnung

2.1. Funktionen mehrer Variablen

$Bild: im(f) \coloneqq f(D) = \{f(x) | x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$

Stetig hebbar = Punkt in Definitionslücke definiert und Definition macht Funktion stetig

Funktion stetig an einer Stelle x_0 wenn der Grenzwert an der Stelle x_0 existiert und dem Funktionswert enspricht.

2.2. Definitionen

Bezeichnung	Bedingung
f_i ist partiell differenzierbar an Stelle $\underline{a}$	$\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$ *existiert für alle j*
$\underline{f}$ partiell differenzierbar an Stelle $\underline{a}$	$\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$ *existiert für alle i, j*
$\underline{f}$ ist partiell differenzierbar	$\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$ *existiert für alle i, j, an jeder Stelle* $\underline{x} \in D$
$\underline{f}$ ist total differenzierbar	*Es existiert eine lineare Abb.* $\underline{L_a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *sodass* $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{\left\Vert \underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{L_a}(\underline{x} - \underline{a}) \right\Vert_{\mathbb{R}^m}}{\left\Vert \underline{x} - \underline{a} \right\Vert_{\mathbb{R}^n}}$

$\underline{L_a}$ *ist das totale Differenzial oder die totale Ableitung der Funktion* $\underline{f}$ *an der Stelle* $\underline{a}$

2.2.1. Satz 3

$\underline{f}$ *total diff'bar* $\Rightarrow \underline{f}$ *stetig*

$\underline{f}$ *total diff'bar* $\Rightarrow \underline{f}$ *partiell diff'bar*

$\underline{f}$ *stetig partiell diff'bar*

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{f} \text{ total diff'bar} \\ \underline{L_a}(\underline{v}) = \underline{\underline{Df}}(\underline{a})\underline{v}, \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Umkehrschlüsse nicht gültig!

Eine (total) differenzierbare Funktion lässt sich an jeder Stelle a $\in$ D durch eine lineare Funktion approximieren:

Veralgemeinertes 1. Taylorpolynom:

$$T_1 f(x;a) \coloneqq f(a) + Df(a)(x-a)$$

2.3. Differenzialoperatoren 1. Ordung

2.3.1. Jacobi-Matrix

$$\underline{\underline{Df}}(a): \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}\underline{a} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}\underline{a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}\underline{a} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}\underline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

2.3.2. Gradient

$$f \mapsto grad(f), \qquad grad\left(f(\underline{x})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}\underline{x} \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_n}\underline{x} \end{pmatrix}$$

2.3.3. Richtungsableitung

$\underline{v}: Richtungsvektor$

$\underline{Dv}: \underline{f} \mapsto \underline{Dvf}$

$\underline{Dvf}: D \mapsto \mathbb{R}^m$

Wichtig:

$$\underline{Dvf}(\underline{x}) = \underline{\underline{Df}}(\underline{x})\underline{v}$$

d.h. Sehr leicht mit Jacobi-Matrix berechenbar!

2.3.4. Nabla-Operator

$$\nabla \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

2.3.5. Divergenz

$Sei\ m = n$

$$div\left(\underline{f}(\underline{x})\right) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f_i}{\delta x_i}\underline{x} = tr\left(\underline{\underline{Df}}(\underline{x})\right) = \nabla \cdot \underline{f}$$

→Spur der Jacobi-Matrix mal $\underline{x}$

2.3.6. Rotation

$$rot\left(\underline{f}\right) \coloneqq \nabla \times \underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_z}{\delta y}(x) - \frac{\delta f_y}{\delta z}(x) \\ \frac{\delta f_x}{\delta z}(x) - \frac{\delta f_z}{\delta x}(x) \\ \frac{\delta f_y}{\delta x}(x) - \frac{\delta f_x}{\delta y}(x) \end{pmatrix}$$

Operator	Schreibweise ohne ∇	Schreibweise mit ∇
Gradient	grad f	∇f
Richtungsableitung ($m = 1$, Skalarfeld)	$D_{\boldsymbol{v}} f$, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$	$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) f$
Divergenz	div $\boldsymbol{f}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{f}$
Rotation	rot $\boldsymbol{f}$	$\nabla \times \boldsymbol{f}$

2.3.7. Anwendung: Fehlerfortpflanzung

$x: Variable\ (kann\ Vektor\ sein)$

$y: Ergebnis\ der\ Funktion$

$f: Funktion$

$\Delta x, \Delta y: Abweichungen$ (Grün muss gegeben sein

$$|\Delta y| \lesssim \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\delta f}{\delta x_j}(\boldsymbol{x})\right| |\Delta x_j|$$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \lesssim \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j}{y}\frac{\delta f}{\delta x_j}(\boldsymbol{x})\right| \left|\frac{\Delta x_j}{x_j}\right|$$

2.4. Differenzialoperatoren 2. Ordnung

2.4.1. Hesse-Matrix

$$\underline{\underline{Hf}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{pmatrix} = \left(\underline{D}\nabla f\right)^T$$

verallgemeinerte 2. Taylorpolynom:

$$T_2 f(x;a) \coloneqq f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T + Hf(a)(x-a)$$

2.4.2. Skalarer Laplace

$\Delta f(\underline{x}) \coloneqq div(grad(f)) \cdot \underline{x}$

$\nabla^2 = \Delta f = div(grad(f)) = tr\left(\underline{\underline{Hf}}\right)$

$tr = Spur$

2.5. Differentialoperationen höherer Ordnung

2.5.1. Satz von Schwarz

$\underline{f}\ ist\ p - mal\ stetig\ partiell\ differenzierbar$
$\Longrightarrow Reihenfolge\ der\ partiellenAbleitungen\ mit\ Ordnung\ k \leq p\ ist\ unerheblich$

- Hesse-Matrix einer 2x stetig partiell differenzierbaren Funktion ist symmetrisch
- Es müssen nicht mn^k k-te partielle Ableitungen berechnet werden, sondern nur $m\binom{n+k-1}{k}$ k-te partielle Ableitungen

2.6. Extremstellen

2.6.1. Minima/Maxima

Bedingung: $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$

Eigenwerte von $\boldsymbol{Hf}(x_0)$ berechnen:

- Alle positiv: lokales Minimum
- Alle negativ: lokales Maximum
- Beides: Sattelpunkt

2.7. Rechenregeln

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$div(f\underline{v}) = \nabla f \cdot \underline{v} + f div(\underline{v})$

$rot(f\underline{v}) = \nabla f \times \underline{v} + f \cdot rot(\underline{v})$

2.7.1. Verallgemeinerte Kettenregel

$\underline{\underline{D}}\left(\underline{f} \circ \underline{g}\right)(\underline{x}) = \underline{\underline{Df}}\left(\underline{g}(\underline{x})\right)\underline{\underline{Dg}}(\underline{x})$

$f \circ g \coloneqq f\left(g(x)\right)$

2.7.2. Spezialfälle

$f: D_f \to \mathbb{R}, \qquad D_f \subseteq \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{v}: D_v \to \mathbb{R}^3, \qquad D_v \subseteq \mathbb{R}^3$

f und $\boldsymbol{v}$ sind 2x stetig partiell diff'bar, so gilt:

$div(rot(\boldsymbol{v})) \equiv 0$

$$rot\left(grad(f)\right) \equiv 0_3$$

2.8. Kurven und Flächen

2.8.1. Immersion

	Bild einer Funktion	Graph einer Funktion	Niveaumenge einer Funktion
reguläre Kurve in der Ebene	$\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Tangentialvektor	$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix}$
Normalenvektor	$\begin{pmatrix} -\dot\gamma_2 \\ \dot\gamma_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}$	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$
reguläre Kurve im Raum	$\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
Tangentialvektor	$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2 \\ \dot\gamma_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{f}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1' \\ f_2' \end{pmatrix}$	$\nabla f_1 \times \nabla f_2$
Normalen-vektoren	$\begin{pmatrix} -\dot\gamma_2 \\ \dot\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dot\gamma_3 \\ 0 \\ \dot\gamma_1 \end{pmatrix}$ falls $\dot\gamma_1 \neq 0$	$\begin{pmatrix} -f_1' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f_2' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\nabla f_1, \nabla f_2$
reguläre Fläche im Raum	$\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
Tangential-vektoren	$\boldsymbol{\varphi}_x, \boldsymbol{\varphi}_y$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} f_z \\ 0 \\ -f_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_z \\ -f_y \end{pmatrix}$ falls $f_z \neq 0$
Normalenvektor	$\boldsymbol{\varphi}_x \times \boldsymbol{\varphi}_y$	$\begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$

2.8.2. Lagrange Muliplikator

$mit\ f(x)\ und\ g(x) = c\ (Anfangsbedingungen)$

$$\nabla\mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) - Dg(x)^T\lambda \\ c - g(x) \end{pmatrix}$$

Dieser Gradient muss an der Stelle (x_0, λ_0) verschwinden ($=0_{n+m}$).

3. Integralrechnung

3.1. Kurvenintegrale

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\Gamma \coloneqq im(\gamma) \subseteq \mathbb{R}^n$

Dann gilt:

$$\int_\Gamma f ds \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t)|\dot\gamma(t)|dt; \quad ds = |\dot\gamma(t)|dt$$

$$\int_\Gamma \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} \coloneqq \int_a^b \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{\gamma}(t)\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)dt$$

$\oint dA$ wird für geschlossene Kurven gebraucht

3.2. Anwendungen

3.2.1. Bogenlänge

Parametrisierung: $\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

$$|\Gamma| \equiv L(\Gamma) \coloneqq \int_\Gamma 1 ds = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

3.2.2. Arbeit

$$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_a^b \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{s}(t)\right) \cdot \dot{\boldsymbol{s}}(t)dt$$

Momentanleistung:

$P(t) \coloneqq \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{s}(t)\right) \cdot \dot{\boldsymbol{s}}(t)$

Mittlere Leistung

$$\bar{P} \coloneqq \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt = \frac{W}{b-a}$$

3.3. Transformationssatz

Substitution auf mehrern Raumdimensionen

$$\int_{\varphi(M)} f(B)d\boldsymbol{y} = \int_M f\left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right)|\det(\boldsymbol{D\varphi}(\boldsymbol{x}))|d\boldsymbol{x}$$

Mit $\det(\boldsymbol{D\varphi}(\boldsymbol{x})) \neq 0$

3.4. Krummlinige Koordinaten

3.4.1. Polarkoordinaten

$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

$\underline{\boldsymbol{D\varphi}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det\left(\underline{\boldsymbol{D\varphi}}(\boldsymbol{x})\right) = r$$

3.4.2. Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \det\left(\underline{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right) = r,$$

3.4.3. Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{D}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right) = r^2\sin\vartheta$$

3.5. Oberflächenintegrale

3.5.1. Skalarfelder

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $S \subseteq D$

$$\int_S f\,\mathrm{d}\sigma := \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))|\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

3.5.2. Vektorfelder

Sei $v\colon D \to \mathbb{R}^3, D \subseteq \mathbb{R}^3, S \subseteq D$

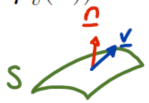
$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} := \int_M \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\cdot(\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Fluss:

$$\Phi_S(\boldsymbol{v}) := \int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}$$

3.5.3. Tabellenform

Kurven-/Wegintegral 1. Art (Skalarfelder)	$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\lvert\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	$\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\Gamma = \mathrm{im}(\boldsymbol{\gamma}) \subseteq \mathbb{R}^n$
Kurven-/Wegintegral 2. Art (Vektorfelder) (65), (66)	$\int_\Gamma \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$ $= \int_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s$  ↳Entlang Kurve: $\underline{t}$ trägt nicht bei	$f : D \to \mathbb{R},\ \Gamma \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^n,\ \Gamma \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\lvert\dot{\boldsymbol{\gamma}}\rvert}$
n-dimensionales Integral ($n \in \mathbb{N}$)	$\int_M f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ Berechnung mittels Transformationssatz, Satz von Fubini, ...	$f : D \to \mathbb{R}$ $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$
Oberflächenintegral (Skalarfelder) (82)	$\int_S f\,\mathrm{d}\sigma = \int_M f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\lvert\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u})\rvert\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{\varphi} : M \to \mathbb{R}^3,\ M \subseteq \mathbb{R}^2$ $S = \mathrm{im}(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq \mathbb{R}^3$
Oberflächenintegral (Vektorfelder) (83) (auch: Fluss) (84)	$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_M \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\cdot(\boldsymbol{\varphi}_u(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ $= \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \Phi_S(\boldsymbol{v})$  $\underline{v}$ durch S	$f : D \to \mathbb{R},\ S \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^3,\ S \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v}{\lvert\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v\rvert}$
Volumenintegral (3-dim. Integral) (87)	$\int_D f\,\mathrm{d}V = \int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$	$f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^3$

3.6. Gaussscher Integralsatz

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad \left(= \oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \Phi_S(\boldsymbol{v})\right)$$

$\boldsymbol{v}$: *Vektorfeld*

$V \subseteq D$: *abgeschlossene Menge*

S: *geschlossene Fläche, Oberfläche von V*

$\boldsymbol{n}$: *Normalvektorfeld auf S*

3.6.1. Folgerungen

$$\int_V \nabla f\cdot\boldsymbol{v} + f\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oint_S f\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\int_V \boldsymbol{w}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}V = \oint_S (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\int_V f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g\,\mathrm{d}V = \oint_S f\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\int_V f\Delta g - g\Delta f\,\mathrm{d}V = \oint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

3.7. Satz von Stokes

$$\left(\int_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma =\right) \quad \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} \quad \left(= \oint_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, ds\right)$$

4. Gewöhnliche DGL

4.1. Lösungen

Eine Lösung einer gDGL erfüllt mit ihren Ableitungen an jeder Stelle die gDGL.

4.1.1. Allgemeine Lösung

DGL: $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

Die allgemeine Lösung enthält genau n unabhängige Parameter (Integrationskonstanten).

4.1.2. Spezielle Lösung

Den Parametern werden feste Werte zugewiesen.

4.1.3. Singuläre Lösung

Lässt sich nicht aus der allgemeinen Lösung gewinnen.

4.1.4. Lösungsschar

Die gDGL hat mehrere Lösungskurven (von den Parametern abhängig). Die Menge aller Lösungskurven ist die Lösungsschar.

4.2. Gew. DGL 1. Ordnung

4.2.1. Normiertes Richtungsfeld

$$\boldsymbol{v}(x, y) := \frac{1}{\sqrt{1 + f(x, y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

4.2.2. Tangentialvektor an Lösungskurve

$$\gamma(x) := \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

4.2.3. Separierbare gDGL

Eine separierbare gDGL kann folgendermassen geschrieben werden:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Wenn:

$$\Phi : D_\Phi \to \mathbb{R},\ D_\Phi \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$\nabla\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} -f(x) \\ \frac{1}{g(y)} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\nabla\Phi(x, y) \cdot \boldsymbol{v}(x, y) = 0$$

4.2.4. Trennung der Variablen

1. Bestimme Nullstellen von g, für jede Nullstelle y_0 ist die Funktion $y \equiv y_0$ eine Lösung der DGL. (singuläre Lösung) (**singuläre Lösung**)
2. $\frac{1}{g(x)} dy = f(x) dx$
3. $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$
4. Das Ergebnis nach y auflösen, Integrationskonstante nicht vergessen!

4.2.5. Homogene lineare DGL

$$y' + f(x) y = 0$$

Konstanter Koeffizient, wenn: $f = const.$

Lösung mit Trennung der Variablen.

4.2.6. Inhomogene lineare DGL

$$y' + f(x) y = g(x)$$

1. Bestimme eine Stammfkt F von $f(x)$
2. Löse $\int e^{F(x)} g(x) dx$
3. $y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) dx$
4. Integrationskonstante!

4.2.7. Lineare gDGL mit konst. Koeffizienten

$Allg. Lösung$: $y(x) = Ce^{-ax} + y_p(x) = y_0 + y_p$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz für $y_p(x)$
Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$	$y_p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ Parameter: $c_0, c_1, \ldots, c_n$
Linearkombination von trigonometrischen Funktionen $g(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$y_p(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$ oder $y_p(x) = c \sin(\omega x + \varphi)$ Parameter: c_1, c_2 bzw. c, φ
Exponentialfunktion $g(x) = Ae^{bx}$	$y_p(x) = \begin{cases} ce^{bx}, & b \neq -a \\ cxe^{bx}, & b = -a \end{cases}$ Parameter: c

1. Lösungsansatz wählen
2. $y_p' + a y_p = g(x)\ \forall x$
3. $y(x) = Ce^{-ax} + y_p(x)$

4.2.8. Substitution

Verwenden bei nichtlinearen oder nicht separierbaren DGL.

ursprüngliche gDgl (für $y(x)$)	Substitution Rücksubstitution	transformierte gDgl (für $u(x)$)
$y' = f(ax + by + c)$ (separierbar für $b = 0$)	$u := ax + by + c$ $y = \frac{u - ax - c}{b}$	$u' = a + bf(u)$ (separierbar)
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u := \frac{y}{x}$ $y = xu$	$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ (separierbar)
$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (linear für $\alpha \in \{0, 1\}$) J. Bernoulli, 1655–1705	$u := y^{1-\alpha}$ $y = u^{1/(1-\alpha)}$	$u' = (1 - \alpha)(f(x)u + g(x))$ (linear)

4.2.9. Anfangswertprobleme

Zusätzlich zur DGL existiert eine Zusatzbedingung der Form: $y(x_0) = y_0$

1. Überprüfen, ob singuläre Lösung existiert.
2. DGL lösen oder in Tabelle nachschauen
3. y_0 in die allgemeine Lösung einsetzen
4. Nach C auflösen.

Art der gDgl	Lösungsformel für den Anfangspunkt (x_0, y_0)
separierbar $y' = f(x)g(y)$	$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$
linear $y' + f(x)y = g(x)$	$y(x) = e^{-(F(x)-F(x_0))}y_0 + e^{-F(x)} \int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt,$ F *irgendeine* Stammfunktion von f
linear mit konstantem Koeffizienten $y' + ay = g(x)$	$y(x) = e^{-a(x-x_0)}y_0 + e^{-ax} \int_{x_0}^{x} e^{at} g(t)\,dt$

4.3. Systeme von DGL

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}).$$

4.3.1. Autonom

Falls $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ →kein x

4.3.2. Linear

Falls $\boldsymbol{y}' = \underline{\boldsymbol{A}}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$

Mit $\underline{\boldsymbol{A}}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n$

4.3.3. Normiertes Richtungsfeld

$$v(x, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{\sqrt{1 + |\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

4.4. Reduktion der Ordnung

Bei Gleichungen 2. Ordnung

4.4.1. Ohne y

$$y'' = f(x, y')$$

1. Variable definieren: $z(x) = y'(x)$
2. In DGL einfügen & $z(x)$ berechnen
3. Berechnen: $y(x) = \int z(x)dx$

4.4.2. Ohne x

$$y'' = f(y, y')$$

1. $y'' = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y' \rightarrow \frac{dy'}{dy} = \frac{f(y,y')}{y'}$
2. $w(y) = y'$
3. Löse: $\frac{dw}{dy} = \frac{f(y,w)}{w}$ nach $w(y)$
4. Löse: $y' = w(y)$ nach y

4.5. Homogene Lineare gDGL

Werden gelöst durch Finden der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{y}_1(x) \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}_n(x)) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad x \in D$$

$$\boldsymbol{y}(x) = \underline{\boldsymbol{\Phi}}(x)\boldsymbol{C}, \qquad x \in D, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^n$$

Jede Fundamentalmatrix erfüllt:

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}' = \underline{\boldsymbol{A}}(x)\underline{\boldsymbol{\Phi}}$$

Linear unabhängig, wenn:

$$\det(\underline{\boldsymbol{\Phi}}) \neq 0$$

4.5.1. Beweisen, dass Fkt Basislösungen sind

1. Fundamentalmatrix erstellen:
$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$
2. DGL als homogenes lineares System schreiben & $\underline{\boldsymbol{A}}$(x) bestimmen (4.3.2)
3. $\underline{\boldsymbol{\Phi}}' = \underline{\boldsymbol{A}}(x)\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ nachprüfen
4. Lineare Unabhängigkeit überprüfen mit $\det\left(\underline{\boldsymbol{\Phi}}(x)\right)$

4.5.2. Potenzreihenansatz

Verwendet, wenn die Koeffizienten der linearen gDGL Polynomfunktionen in x sind.

4.5.3. Konstante Koeffizienten

Dann gilt:

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}}(x) := e^{x\underline{\boldsymbol{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$