Good to know

$3.6 \frac{km}{h} = 1 \frac{m}{s}$

Kraft $F \{N\} \hat{=} \{\frac{kgm}{s^2}\}$

Dichte $\rho = \frac{m}{V} \{\frac{kg}{m^3}\}$

$\Rightarrow$ Dichte Wasser $1000 \frac{kg}{m^3}$

Druck $p = \frac{F}{A} = \rho \cdot g \cdot h = v^2 \cdot \rho \{Pa\} \hat{=} \{\frac{N}{m^2}\}$

$1 Bar = 10^5 Pa$

Gleichgewicht $|F_A| = |F_G|$

Höhe $h = \frac{\rho_k \cdot l}{\rho_f}$

Auftrieb $F_A = \rho g V_E = m_{verdrängt} \cdot g$

Geschwindigkeit freier Fall $v_f = \sqrt{2gh}$

$\omega = U \cdot 2\pi = \frac{v}{r} = \left\{\frac{2\pi}{s}\right\}$

$U = \hat{\varphi} \cdot r$ ($\hat{\varphi}$ Winkel im Bogenmass)

Abrollbedingungen: $s = r \cdot \varphi$
$v = r \cdot \omega$
$a = r \cdot \alpha$

$1 PS = 736 W$

$F_F = \frac{1}{2} k_F \cdot \Delta l^2$

Bilanzen

G = allgemein gültig

Summe Zuflüsse, Abflüsse = Volumenänderungsrate

$$\frac{\Delta G_{t_1 \to t_2}}{\Delta t} = \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1}$$ mittlere Änderungsrate

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1}$$ momentane Änderungsrate

$$I_{V,in} + I_{V,out} = \dot{V}(t)$$ Volumenbilanzgleichung

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ Integral

Impuls

$\vec{p}$ = Impuls $\left[\frac{kg\,m}{s}\right]$

$\dot{\vec{p}}$ = 1. Ableitung $\vec{p}$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F}_{res} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a}$$ Impulsbilanz

$$\vec{p}_{vorher} = p_{nachher}$$ Impulserhaltung

Bsp Rakete im Gravitationsfeld

$m = 25'000\ kg$
$v = 5000\ \frac{m}{s}$
$g = 9\ N/kg$
$I_m = 200\ kg/s$
$c = 3700\ \frac{m}{s}$

$$-I_m = \dot{m} \quad \text{(Massenbilanz)}$$

$$-F_g - I_m \cdot v_{ges} = \dot{m}v + m\dot{v} = \dot{p} \quad \text{(Impulsbilanz)}$$

$$\dot{p} = -m \cdot g - I_m (v - c) = -485\ kN$$

$$\dot{v} = a = \frac{\dot{p} - (\dot{m} v)}{m} = 20.6\ \frac{m}{s^2}$$

Energie, Leistung & Arbeit

W P W

$$P = \frac{W}{t} \{W\}$$
$$W = P \cdot t \{Ws\}$$

$$1\ Ws = 1\ J = 1\ Nm$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \{0 - 0.99\}$$ Wirkungsgrad

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$ Potentielle Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \quad W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$ Bewegungsenergie

$$W = F \cdot s$$ Energie Strecke $\perp$

$$W = \Delta p \cdot \Delta \bar{v}$$ Energie aus Impuls

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$ Leistung

$$P = I_{v_1} - I_{v_2} = I_p \cdot \Delta v$$ Leistung über Impulsströme

Elastischer Stoss

Impulserhaltung $p_1 = p_2$ & Energieerhaltung $E_1 = E_2$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$$

Inelastischer Stoss

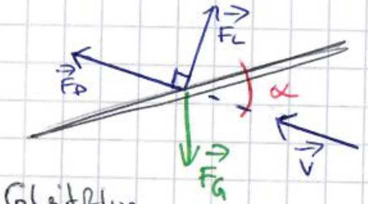
$\Rightarrow$ Impulserhaltung $p_1 + p_2 = p'$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

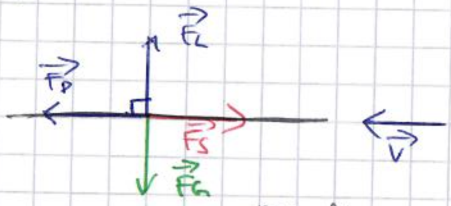
$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' + \Delta W$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

Auftrieb & Luftwiderstand



Gleitflug



Reiseflug & Windstille

α = Angle of Attack

$\vec{F}_D$ = Luftwiderstand (drag)

$\vec{F}_L$ = Auftrieb (lift)

$\vec{v}$ = Anströmung

$\vec{F}_S$ = Schubkraft

$\vec{F}_A = -m_{fl} \cdot \vec{g}$ — statische Auftriebskraft

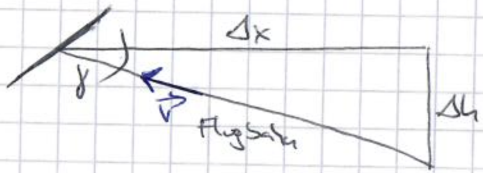
$\vec{F}_{Aero} = \vec{F}_L + \vec{F}_D$ — aerodynamische Kraft

$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot c_L \cdot A$ — Auftriebskraft

$\vec{F}_D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot c_D \cdot A$ — Luftwiderstandskraft

Bsp. stationärer Gleitflug

1 Freischneiden
2 Kräfte einzeichnen
3 Impulsbilanz
4 Bezugssystem
5 Vektorkomponente
6 Impulsbilanz Komponente
7 Randbedingungen
8 Lösung



$$\Delta x = \frac{\Delta h}{\tan \gamma}$$

Mechanische Schwingungen

$\omega_0 = 2\pi f \; \{\frac{rad}{s}\} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (Winkelgeschwindigkeit)

s-t: $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t)$

v-t: $x(t) = \hat{x} \cdot \omega_0 [-\sin(\omega_0 t)]$ — $k \; \{-\}$ (Konstante Feder)

a-t: $x(t) = \hat{x} \cdot \omega_0^2 [-\cos(\omega_0 t)]$ — $\hat{x} = x_0 \; \{m\}$

Winkel in rad angeben! $360° = 2\pi$ rad

$F_R = \mu_R \cdot F_N$ / $F = \frac{m \cdot v}{t}$

$\boxed{\text{ungedämpftes Lineares Pendel}}$

Kreisbewegungen & Trägheitskräfte

$v(t) = \omega(t) \cdot r$ — $\bigcirc = 2\pi\,rad = f$

Bahngeschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit

$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$ — Beschleunigung

$|\vec{a}| = a = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$ $(v = \omega r)$ — Betrag Beschleunigung

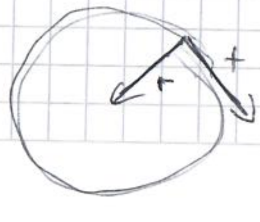
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$ — Periode T

$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$ — Zerlegung Beschleunigung

$\vec{F}_{RES}(t) = \vec{F}_{RES,t}(t) + \vec{F}_{RES,r}(t)$ — Zerlegung Kraft

t = tangential

r = radial



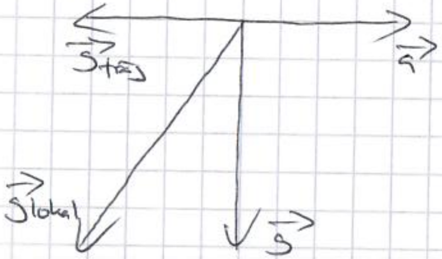
Gravitation & Trägheitsfeld

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$ Gravitationskraft

$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ zwischen zwei Körpern

$\vec{g}_{träg} = -\vec{a}$ Trägheitsfeld

$\vec{g}_{lokal} = \vec{g} + \vec{g}_{träg}$ lokales Gravitationsfeld



$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2 r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m\frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ Zentrifugalkraft

$F_{ZF} = m\omega^2 r$ Betrag Zentrifugalkraft

Rezept ●→ ←● oder ●→ ●→

$s(t) = s_0 + v(t) + \frac{a}{2}(t)^2$

$s = s_0 + vt + \frac{a}{2}t^2$

Impuls & Energiebilanz ⇒ offene Systeme

$\vec{F}_{p,konv} = I_m \cdot \vec{v}_m$ Konvektiver Impulsstrom & Massenstrom

$v_2(m) = c \cdot \ln\frac{m_0}{m}$ Raketengleichung

$F_{Schub} = I_m \cdot (v_{out} - v_{in})$ Schubkraft Strahltriebwerk

$P = \frac{v_{in} + v_{out}}{2} \cdot F_{Schub}$ Leistung Strahltriebwerk

$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const.$ Bernoulli Gleichung

$I_V = v \cdot A \,/\, I_m = \rho \cdot I_V = \frac{m}{t} = \dot{m}$

$v = \sqrt{\frac{2 p_V}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$ / p_V = Druck Venturirohr — Geschwindigkeit Venturirohr

Impuls als Transportmittel

1.) Oberflächen- oder Kontaktkraft
2.) Körperkraft oder Gewichtskraft
3.) Konvektiv ⇒ mit Massentransport

Bernoullirezept

- Skizze erstellen
- Markante Punkte
- Bernoulligleichung
- Punkte gleichsetzen
- evtl. Zusatzbedingungen

$h_3 = 0$
p_U = Umgebungsdruck

① $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_U + \rho g h_1$

③ $p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3 = p_U + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

$p_U + \rho g h_1 = p_U + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

$v_3 = \sqrt{2 g h_1}$

Rotation (starrer Körper)

$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ momentane Winkelgeschwindigkeit

$v(t) = r\omega(t)$ Betrag Geschwindigkeit

$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$ Geschwindigkeit rotierend

$a(t) = r\omega^2$ Betrag Beschleunigung

$a_t(t) = r\dot{\omega}(t)$ Tangential Beschleunigung

$a_r(t) = r\omega^2(t)$ Radial Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)}_{\vec{a}_t(t)} + \vec{\omega}(t) \times \underbrace{(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{\vec{a}_r(t)}$$

$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k$ MMP Mehrteilchensystem

---

Translation (starrer Körper)

$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t)$ v Punkt B

$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_P(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}_{PB}(t)$
$+ \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PB}(t))$ a Punkt B

$\vec{r}_{PM}(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_P(t)}{\omega^2(t)}$ Ort Momentanpol M relativ zu P

P gegeben, B gesucht!

Drehmoment

$\vec{p} = m\vec{v}$ / $\dot{v} = a$

$\vec{L} = J\vec{\omega}$ / $\dot{\omega} = \alpha$

$\sum\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\sum\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$

p = Impuls

L = Drehimpuls $\left\{\frac{kg\,m^2}{s}\right\}$

J = Massenträgheitsmoment

α = Winkelbeschleunigung

$M = F \cdot r$ $(F \perp r)$ / $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$

Impulsänderungsrate

Drehimpulsänderungsrate

$\vec{L}_P = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p} = J_P \cdot \vec{\omega}$ Drehimpuls

$J = m \cdot r^2$ Massenträgheitsmoment

Drehimpulserhaltung! System schliesst festlegen!

$J_d = J_{MMP} + m \cdot d^2$ Satz von Steiner

Trägheitsmomente gemäss separater Auflistung

Input

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} t^2$ Winkel

$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$ Ort

Drehimpuls & Energie

Fixe Achse

$W_{kin,rot} = \frac{1}{2} J_{\vec{\omega}} \cdot \omega^2$ — kinetische Energie rotation

$W_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ — kinetische Energie

$P_{\vec{M}} = M_{\vec{F}} \cdot \omega$ — Leistung Drehmoment

$W_{\vec{M}} = \Delta W_{kin,rot}$ — Arbeit Drehmoment

Freie Bewegung

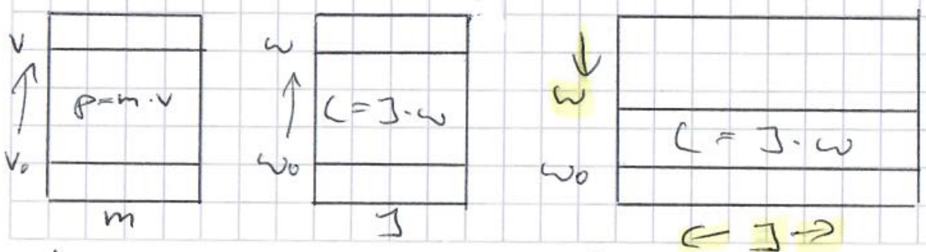
$W_{kin} = W_{kin,trans,MMP} + W_{kin,rot,MMP}$

$\quad = \frac{1}{2} m \cdot v_{MMP}^2 + \frac{1}{2} J_{MMP} \cdot \omega^2$

Rezept

1.) Körper freischneiden
2.) Kräfte identifizieren & vektoriell einzeichnen
3.) Impulsbilanz vektoriell (inkl. Drehimpulsbilanz)
4.) Bezugssystem wählen
5.) Kraftvektoren als Komponenten
6.) Impulsbilanz als Komponentenform (inkl. Drehimpulsbilanz)
7.) Randbedingungen
8.) Gleichungssystem lösen

Impuls — Drehimpuls



Masse konstant

Massenträgheitsmoment kann sich ändern.

Drehimpulsbilanz

$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_i \vec{F}_{L,i}(t)$ — Drehimpulsbilanz

$I_W(t) = I_L(t) \cdot \omega(t)$ — Energiestrom zu Drehimpuls

$P(t) = I_L(t) \cdot \Delta\omega(t)$ — Prozessleistung

$\Delta W_{sys,t_1 \to t_2} = \Delta L_{t_1 \to t_2} \cdot \frac{1}{2}(\Delta\omega(t_1) + \Delta\omega(t_2))$

Energieänderung zwischen zwei Zuständen eines Zweikörpersystems bei Drehimpulsübertragung.

Eigen- & Drehimpuls

$\vec{L}_0^{Bahn} = \vec{r}_{MMP} \times (m \cdot \vec{v}_{MMP})$ — Bahndrehimpuls

$\vec{L}_{MMP}^{Eigen} = J \cdot \vec{\omega}$ — Eigendrehimpuls

$\vec{L}_0 = \vec{L}_0^{Bahn} + \vec{L}_{MMP}^{Eigen}$ — L {Nms}

Schaukelbewegungen & Unwucht

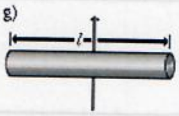
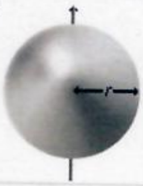
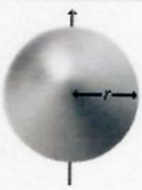
$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{MMP}}{L}$ — Präzisionsgeschwindigkeit Kreisel

$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$ — Drehmoment Querdrehung, Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$

$\vec{\Omega}$ = Winkelgeschwindigkeit Kreisel

7

a) 	Eine Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse.	$I = m\,r^2$
b) 	Ein Zylindermantel, der um seine Symmetrieachse rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$I \approx m\,r^2$ [6]
c) 	Ein Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$I = \frac{1}{2} m\,r^2$ [6]
d) 	Ein Hohlzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert. Schließt die vorgenannten Grenzfälle Zylindermantel und Vollzylinder mit ein.	$I = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ [7]
e) 	Ein Vollzylinder, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert.	$I = \frac{1}{4} m\,r^2 + \frac{1}{12} m\,l^2$ [7]
f) 	Ein Zylindermantel, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert.	$I = \frac{1}{2} m\,r^2 + \frac{1}{12} m\,l^2$ [8]

g) 	Ein dünner Stab, der um eine Querachse (zweizählige Symmetrieachse) rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$I = \frac{1}{12} m\,l^2$ [7]
h) 	Dünner Stab, der um eine Querachse durch ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den Fall g).	$I = \frac{1}{3} m\,l^2$ [9]
j) 	Eine massive Kugel, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert.	$I = \frac{2}{5} m\,r^2$ [10]
i) 	Eine Kugelschale, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$I \approx \frac{2}{3} m\,r^2$ [10]
i) 	Eine Hohlkugel, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert, für wesentliche Wandstärke mit $d = r_a - r_i$	$I = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$