Stochastik und Wahrscheinlichkeit

1. Grundlegende Begriffe

1.1. Wahrscheinlichkeitsräume

$\Omega = Ergebnismenge = Anzahl\ mögl. Ergebnisse$

$\omega = Ergebnis\ eines\ Zufallsexperiments$

$E: Ereignis = Teilmenge\ von\ \Omega$

$E\ tritt\ ein, wenn\ \omega \in E$

$\cup = Vereinigung$
$\cap = Schnittmenge$
$\subset = Teilmenge\ von$

1.1.1. Ereignisalgebra

Auch $\sigma - Algebra$ genannt
Mengensystem $\Sigma \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\Phi \in \Sigma\ \ und\ \ \Omega \in \Sigma$
- Für alle $E \in \Sigma\ gilt\ auch\ E^c \in \Sigma$
- Für alle $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$ gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \ldots = E \in \Sigma$$

1.1.2. Wahrscheinlichkeit

Für Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) gilt:

- $Für\ E \in \Sigma: P(E) = 1 - P(E^c)$
- $Für\ E_1, E_2 \in \Sigma:$
  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- $Für\ E_1 \subset E_2 \in \Sigma:\ P(E_1) \leq P(E_2)$

1.2. Unabhängigkeit von Ereignissen

1.2.1. Definition Unabhängigkeit

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
Schlussfolgerung:
$\boldsymbol{P(B|A) = P(B)}$

$Wenn\ A, B\ unabhängig, auch\ A^c, B\ und\ A, B^c\ und\ A^c, B^c\ unabhängig$

Bei mehr als 2 Ereignissen, unabhängig falls:
$E_1, E_2, \ldots, E_n$
$P\left(E_{k_1} \cap E_{k_2} \cap \cdots \cap E_{k_j}\right) = P\left(E_{k_1}\right) \cdot \cdots P\left(E_{k_j}\right)$
$\forall 1 \leq k_1 < \cdots < k_j \leq n\ und\ 2 \leq j \leq n$

1.2.2. Paarweise Unabhängigkeit

$E_1, E_2, \cdots, E_n \in \Sigma$

$Paarweise\ Unabhängig\ falls:$
$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j) \forall i, j$

$Unabhängig\ falls$

1.3. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit

Endliche Mengen $M_1, \ldots, M_m$ mit Anzahlen $n_1, \ldots, n_m$ von Elementen

$\Omega = M_1 \times \cdots \times M_m$
$= \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) | \omega_i \in M_i\ für\ 1 \leq i \leq m\}$

$hat\ n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m\ Elemente$

1.3.1. Elemente aus einer Menge wählen

Anzahl Möglichkeiten:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

1.4. Wahrscheinlichkeit von Vereinigungen

1.4.1. Allgemeine Formel

$$Für\ E_1, \ldots E_n\ gilt:$$

$$\boldsymbol{P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap \cdots \cap E_n)}$$

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit

$A \subset \Omega\ mit\ P(A) > 0\ ist\ eingetreten$

$$\boldsymbol{P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}}$$

2.1. Multiplikationsregel

$\boldsymbol{P(E \cap A) = P(E|A) \cdot P(A)}$

2.2. Totale Wahrscheinlichkeit

$$\boldsymbol{P(E) = P(E \cap B) + P(E \cap B^c) = P(E|B) \cdot P(B) + P(E|B^c) \cdot P(B^c)}$$

Für mehr als 2 Möglichkeiten:

$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$

$$\boldsymbol{P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E|B_k) P(B_k)}$$

→Teilweise muss mit Zwischenschritten & mehreren Ereignissen gerechnet werden (Skript S.26)

2.3. Satz von Bayes

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)}}$$

3. Diskrete Zufallsvariablen

Eine auf der Ergebnismenge von (Ω, Σ, P) definierte Funktion.

$X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^n$

$X = \Omega_X$

$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \subset \Omega$

$x \in \Omega_X$

$\{x = x\}\ sind\ Ereignisse, also\ \{X = x\} \in \Sigma$

3.1. Verteilung einer Zufallsvariable

$p_X\colon\ \Omega_X \to [0,1]$
$x \mapsto p_X(x) = P(\{X = x\}), \qquad x \in \Omega_X$

p_X: Ordnet allen Werten x die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Zufallsvariable den Wert x annimt.

3.1.1. Eigenschaften

$$\sum_{x \in \Omega_X} p_X(x) = 1$$

3.1.2. Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \boldsymbol{P(\{X_1 = 1\ und \cdots und\ X_n = x_n\})} \\ &= \boldsymbol{P(\{X_1 = x_1\}) \cdots P(\{X_n = x_n\})} \\ &= \boldsymbol{p_{X_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot p_{X_n}(x_n)} \end{aligned}$$

Wenn unabhängig:

$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2] = \mu_1\mu_2$

$cov(X_1, X_2) = 0$

$\rho_{X_1X_2} = 0$

3.2. Erwartungswert

$$\boldsymbol{E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot p_X(x) = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P(\{X = x\}) \in \mathbb{R}^n}$$

Falls dies konvergiert, ist es der Erwartungswert

3.2.1. Linearität vom Erwartungswert

$X_1, X_2\ \ sind\ diskrete\ Zufallsvariablen$
$\boldsymbol{E[a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2] = a_1 \cdot E[X_1] + a_2 \cdot E[X_2] \in \mathbb{R}}$

3.2.2. Geometrische Verteilung

$X\colon geometrisch\ verteilte, diskrete\ Zufallsvariable$

$$\boldsymbol{E[X] = \frac{1}{p}}$$

$$\boldsymbol{var(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}}$$

3.2.3. Allgemeine Verteilung

$X\colon diskrete\ Zufallsvariable$

$p_X\colon Verteilung\ von\ X$

$Y = f(X)\colon Zufallsvariable\ mit\ existierenden\ E$

$$\boldsymbol{E[Y] = E[f(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} f(x) \cdot p_X(x)}$$

3.2.4. Varianz

$\mu = E[X]$

$\boldsymbol{var(X) = E[X^2] - (E[X])^2}$

$E[X^2]\ existiert, wenn\ var(X)\ existiert$

$\boldsymbol{var(aX + b) = a^2 \cdot var(X)}$

$\boldsymbol{\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)}$

3.2.5. Chebyshev-Ungleichung

$\mu = E[X], var(X) existiert$

$$\boldsymbol{P(\{|X - \mu| \geq d\}) \geq \frac{var(X)}{d^2}, \forall d > 0 \in \mathbb{R}}$$

3.3. Binomische Verteilung

3.3.1. Definition

Ein Zufallsexperiment wird $n \geq 1$ mal unabhängig wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit, dass E(X) $0 \geq k \geq n$ mal eintritt, ist:

$$C_{n,k} \cdot p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

X: Anzahl Eintretungen von E in n unabh. Wiederh.

$\Omega_X = \{0,1,2, \dots, n\}$

$\boldsymbol{p_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k(1-p)^{n-k} = Binomial(n, p)}$

3.3.2. Eigenschaften

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k(1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1}$$

$\boldsymbol{E[X] = np}$

$\boldsymbol{var(X) = np(1-p)}$

3.4. Multinomische Verteilung

3.4.1. Definition

$$X = \begin{pmatrix} X_1\colon Anzahl\ Eintretungen\ Ergebnis\ 1 \\ \vdots \\ X_k\colon Anzahl\ Eintretungen\ Ergebnis\ n \end{pmatrix}$$

$$\Omega_X = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \big| 0 \leq n_j \leq n \,\&\, n_1 + \cdots + n_k = n\}$$

$$\boldsymbol{p(n_1, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!} \cdot p_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{n_k} = Multinomial(n, p_1, \dots, p_k)}$$

3.5. Hypergeometrische Verteilung

3.5.1. Definition

$G: Gesamtmenge, g\ Elemente$

$H: Teilmenge, h\ Elemente, H \subset G$

$N: Stichprobenmenge, n\ Elemente, N \subset G$

$E_k: Stichprobe\ enthält\ k\ Elemente\ von\ H$

$$\boldsymbol{P(E_k) = \frac{\binom{h}{k} \cdot \binom{g-h}{n-k}}{\binom{g}{n}}; 0 \leq k \leq \min\{h, n\}}$$

$X: Anzahl\ Elemente\ der\ Menge\ H\ in\ Stichprobe\ N$

$\Omega_X = \{0,1, \dots, \min\{n, h\}\}$

$$\boldsymbol{p_X(k) = \frac{\binom{h}{k} \cdot \binom{g-h}{n-k}}{\binom{g}{n}} = HypGeom(g, h, n)}$$

3.5.2. Eigenschaften

$$\boldsymbol{E[X] = n \cdot \frac{h}{g}}$$

$$\boldsymbol{var(X) = n \cdot \frac{h}{g}\left(1 - \frac{h}{g}\right) \cdot \frac{g-n}{g-1}}$$

3.6. Poisson-Verteilung

3.6.1. Definition

$$\boldsymbol{p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}; \quad \Omega_X = \mathbb{N}, \qquad \lambda > 0}$$

3.6.2. Eigenschaften

$$\boldsymbol{E[X] = var(X) = \lambda}$$

3.6.3. Approx. der binomischen Verteilung

Wenn:

$S_n: Binomisch\ verteilte\ Zufallsvar. mit\ (n, p_n)$

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} E[S_n] = \lim_{n \to \infty} (n \cdot p_n) = \lambda$$

Dann:

$$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} P(\{S_n = k\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}$$

- Gilt nur für grosse Anzahl n unabhängiger Ereignisse mit kleiner Wahrscheinlichkeit p
- Effektiv wird der Erwartungswert durch den Erwartungswert der Poisson-Verteilung approximiert ($n \cdot p = \lambda$)

3.6.4. Güte der Poisson Approximation

$E_1, \cdots, E_n: Unabhängige\ Ereignisse$

$p_i = P(E_i); Wahrscheinlichkeiten$

$N: Zufallsvariable, Anzahl\ eintretender\ Ereign. E_i$

$Z: Poisson - \lambda - verteilte\ Zufallsvariable$

$B \subset \mathbb{N}$

$E[Z] = \lambda = p_1 + \cdots + p_n$

$$\boldsymbol{Fehler = |P(\{N \in B\}) - P(\{Z \in B\})| \leq \sum_{k=1}^{n} p_i^2}$$
$$\boldsymbol{\leq \lambda \cdot \max_{1 \leq i \leq n} p_i}$$

4. Zufallsvariablen

4.1. Verteilungsfunktionen

4.1.1. Eigenschaften

Die Funktion F_X steigt monoton von 0 bis 1

$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \qquad x_1 < x_2$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

4.1.2. Absolut stetige Zufallsvariablen

Bedingung:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$$

$f_X: Dichte\ der\ Verteilungsfkt\ F_X$

4.1.3. P-Quantil

$X: Zufallsvariable$

$Wahrscheinlichkeit\ 0 < p < 1$

Sei $F_X(x_p) = p$, dann ist x_p das p-Quantil von X

$p = \frac{1}{2}$-Quantil nennt man **Median von X**

4.2. Erwartungswert

4.2.1. Definition

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) dt$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t) dt$$

4.2.2. Eigenschaften

$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

$$E[r(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot f_X(t) dt$$

4.3. Varianz

4.3.1. Definition

$$var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f_X(t) dt \geq 0$$

$$Standardabw. = \sigma(X) = \sqrt{var(X)} \geq 0$$

4.3.2. Eigenschaften und Zusammenhänge

$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$var(aX + b) = a^2 \cdot var(X)$

$\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$

4.4. Stetige Verteilungen

4.4.1. Gleichverteilung

$X: auf\ (a,b) gleichverteilt$

$$F_X = \begin{cases} 0, & falls\ x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & falls\ a < x \le b \\ 1, & falls\ b < x \end{cases}$$

$$f_X = \begin{cases} 0, & falls\ x \le a \\ \frac{1}{b-a}, & falls\ a < x \le b \\ 0, & falls\ b < x \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.4.2. Exponentialverteilung

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & falls\ x > 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & falls\ x > 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.4.3. Gaussverteilung (Normalverteilung)

Definition:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{N}_{\mu,\sigma}(x)$$

$$E[X] = \mu$$

$$var(X) = \sigma^2$$

F_X kann nicht analytisch integriert werden

$$F_X(\mu - x) = 1 - F_X(\mu + x)$$

4.4.4. Potenzgesetze

$$P(X < x) = e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} (p-1)x^{-p}, & falls\ x > 1 \\ 0, & falls\ x \le 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - x^{-(p-1)}, & falls\ x > 1 \\ 0, & falls\ x \le 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{p-1}{p-2}, \qquad p > 2$$

$$var(X) = \frac{p-1}{(p-2)^2(p-3)}, \qquad p > 3$$

4.5. Transformationen von Zufallsvariablen

4.5.1. Transformation mit Verteilungsfkt.

Für jede stetige Zufallsvariable X ist die mit ihrer Verteilungsfunktion transformierte Variable

$$Y = F_X(X)$$

Gleichverteilt auf (0,1)

Mit einer auf (0,1) gleichverteilten Zufallsvariable U und jeder Verteilungsfunktion F hat die Zufallsvariable $F^{-1}(U)$ die Verteilungsfunktion F.

4.5.2. Absolut stetige Zufallsvariablen

$X: Absolut\ stetige\ Zufallsvariable$

$(a,b)\ mit\ P(a < X < b) = 1$

$r: (a,b) \to (c,d)$

Dann ist

$Y = r(X), absolut\ stetig\ mit\ Dichte$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \mp f_X\big(s(y)\big)s'(y), & falls\ f < y < d \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$mit\ s = r^{-1}: inverse\ Fkt\ von\ r,$
$Vorzeichen\ positiv\ falls\ r\ steigend, sonst\ neg.$

4.6. Verteilungen

4.6.1. Unabhängigkeit von absulut stetigen

$f_X: Gemeinsame\ Dichte$

Unabhängig, wenn:

$$f_X(\boldsymbol{x}) = f_{X1}(x_1) \cdots f_{Xn}(x_n)$$

4.7. Summen von unabhängigen Variablen

4.7.1. Poissonverteit

$X_1, X_2: Poissonverteilt\ mit\ \lambda_1\ \&\ \lambda_2$

$$Y = X_1 + X_2$$

Y ist poissonverteilt mit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

4.7.2. Binomialverteilt

$X_1, X_2: Binomialverteilt\ mit\ n_1, p\ und\ n_2, p$

$$Y = X_1 + X_2$$

$Y\ binomialverteilt\ mit\ n_1 + n_2, p$

4.7.3. Normalverteilt

$X_1, X_2: normalverteilt\ mit\ \mu_{1,2}, \sigma_{1,2}$

$$Y = X_1 + X_2$$

$Y\ normalverteilt\ mit\ \mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

4.7.4. Gammavert. Und Exp.verteilt

$X_1: Gammaverteilt\ mit\ n, \lambda$

$X_2: Exponentiellvert.\ mit\ \lambda$

$$Y = X_1 + X_2$$

$Y: Gammaverteilt\ mit\ n + 1, \lambda$

4.8. Kovarianz, Varianz und Korrelation

4.8.1. Kovarianz

$X_1, X_2: mit\ E[X_1] = \mu_1\ und\ E[X_2] = \mu_2$

$$\boldsymbol{Kovarianz} = \boldsymbol{cov(X_1, X_2)} \\ = \boldsymbol{E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}$$

Rechenregeln:

$cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2$

$cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$

$cov(aX_1 + bY_1, X_2) = acov(X_1, X_2) + bcov(Y_1, X_2)$

$$var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} cov(X_j, X_k)$$

4.8.2. Korrelationskoeffizient

$$\boldsymbol{\rho_{X_1 X_2} = cov\left(\frac{X_1}{\sigma_1}, \frac{X_2}{\sigma_2}\right) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}}$$

Falls $\rho_{X_1 X_2} = 0$ sind X_1, X_2 unkorreliert

4.8.3. Kovarianzmatrix

$\boldsymbol{X}: Zufallsvektor$

$cov(\boldsymbol{X}) = \Sigma$

$\Sigma_{i,j} = cov(X_i, X_j)$

4.9. Mehrdimensionale Normalverteilung

$\boldsymbol{X}: Normalverteilter\ Zufallsvektor$

$$f_X(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \\ = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

5. Grenzwertsätze

5.1. Gesetz der grossen Zahl

$$\boldsymbol{P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}}$$

$X_1, X_2, \ldots: Folge\ von\ Zufallsvariablen$

$\mu: Erwartungswert\ von\ X_1, X_2, \ldots$

$\sigma^2: Varianz\ von\ X_1, X_2, \ldots$

$\bar{X}_n: Stichprobenmittelwert\ vom\ Umfang\ n$

$\epsilon > 0: Beliebige\ positive\ Toleranz$

→Stichprobenmittelwert liegt nahe am Erwartungswert

5.1.1. Starkes Gesetz der grossen Zahl

Für jede Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit Erwartungswert μ konvergiert die Folge der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}_n$ gegen μ, wenn $n \mapsto \infty$

5.2. Zentraler Grenzwertsatz

Für jede i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 strebt für grosse n die Verteilungsfunktion der normalisierten Summe

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\ mit\ S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Gegen die Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)\ für\ alle\ x$$

$S_n: Summe$

$\bar{X}_n: Mittelwert$

$P(S_n \leq x) \cong \Phi_{n\mu, \sqrt{n}\sigma}(x)$

$P(\bar{X}_n \leq x) \cong \Phi_{\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(x)$

5.2.1. Binomisch verteilte Zufallsvariablen

$$P(X \leq m) \cong \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

5.2.2. Poissonverteilte Zufallsvariablen

$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) \cong \Phi_{n, \sqrt{n}}(x)$

6. Schätzen von Parametern

6.1. Punktschätzungen

Eine Vorschrift T, mit welcher aus einer Zufallsstichprobe eine Schätzung für einen Parameter θ berechnet werden kann, ist ein **Punktschätzer für $\boldsymbol{\theta}$**

6.1.1. Bias

$bias(Z) = E[T] - \theta$

Misst die Erwartete Verzerrung des Schätzers T.

$bias(T) = 0 \to unverzerrt, erwartungstreu$

6.1.2. Mean Squared Error

$mse(T) = E[(T - \theta)^2] = var(T) + bias^2(T)$

→Erlaubt das Vergleichen von nicht erwartungstreuen Schätzern

6.1.3. Zusammenhang Varianz und Umfang

$X: Zufallsvariable$

$$S^2 = T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{1}{n-1}\left((X_1-\overline{X})^2 + \cdots + (X_n-\overline{X})^2\right)$$

$S^2: Stichprobenvarianz$

→Dieser Schätzer ist Erwartungstreu

$$\operatorname{var}(S^2) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$$

Mit $\mu_4 = E[(X-\mu)^4]$

6.1.4. Methode der Momente

Zufallsvariable X ist abhängig von Parameter

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$

Vorgehen:

1. Um $\boldsymbol{\theta}$ zu schätzen, mit $k = 1,2,\dots,m$ die Momente $\mu_k = E[X^k]$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\theta}$ berechnen
2. Stichprobenmomente ausrechnen und mit Ergebnis aus (1) gleichsetzen
3. Gleichungen nach $\boldsymbol{\theta}$ auflösen

Teilweise wird eine gamma-verteilte Zufallsvariable X benötigt:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(r)}, & falls\ x > 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Mit $\lambda > 0$ und $r > 0$

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^r e^{-r} dx, \qquad r > 0$$

$$E[X] = \frac{r}{\lambda}, \qquad var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

6.1.5. Maximum-Likelihood

$X: Zufallsvariable;$

$f_X(x|\theta): von\ \theta\ abhängige\ Dichte\ oder\ Verteilung\ p_X$

$x_1, x_2, \dots, x_n: gezogene\ Stichprobe$

Likelihood Funktion:

$$\boldsymbol{L(\theta|x) = f_X(x_1|\theta) \cdot \dots \cdot f_X(x_n|\theta) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k|\theta)}$$

→Wahrscheinlichkeit, genau die Werte $\boldsymbol{x}$ zu beobachten

Maximum-Likelihood-Schätzung:

$\theta_{ML} = argmax_\theta(L(\theta|\boldsymbol{x}))$

→Der Parameter, mit dem die beobachteten Daten die grösste Wahrscheinlichkeit haben

6.2. Intervallschätzungen

6.2.1. Konfidenzintervall

Ist ein Intervall dieser Form:

$$Intervall = [T_l(X_1, \dots, X_n), T_u(X_1, \dots, X_n)]$$

Die Grenzen T_l, T_u sind Funktionen aus einer Zufallsstichprobe $X_1, \dots, X_n$. Dieser Intervall überdeckt den Parameter θ mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\boldsymbol{Konfidenzniveau} = P(\theta \in Intervall) = 1 - \alpha$$

Einseitige Konfidenzintervalle schätzen die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein Wert zu hoch, oder zu tief geschätzt wird.

6.2.2. Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

Konfidenzintervall:

$$\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

→Für Parameter μ zu Niveau $1-\alpha$

$\bar{X}: Stichprobenmittelwert$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}: Das\ p = 1 - \frac{\alpha}{2} - Quantil\ der\ St.Norm.Vert$

$Länge\ von\ Intervall: L = 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

→Je grösser n, umso kleiner ist die Länge

→Je kleiner α umso grösser die Länge

Einseitige Konfidenzintervalle:

$$\left[\overline{X} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \quad respektive \quad \left(\infty, \overline{X} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

6.2.3. Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$\bar{X}: Stichprobenmittelwert$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left((X_1-\overline{X})^2 + \cdots + (X_n-\overline{X})^2\right)}$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}: Das\ p = 1 - \frac{\alpha}{2} - Quantil\ der\ Stud.-T-Vert.$

$Länge\ Intervall: L = 2\frac{S}{\sqrt{n}}\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

→Je grösser n, umso kleiner ist die Länge

→Je kleiner α umso grösser die Länge

6.2.4. Erwartungswert beliebieger Verteilung bei grossen Stichproben

$$\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

→Für Parameter μ zu Niveau $1-\alpha$

$\bar{X}: Stichprobenmittelwert$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left((X_1-\overline{X})^2 + \cdots + (X_n-\overline{X})^2\right)}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}: Das\ p = 1-\frac{\alpha}{2} - Quantil\ der\ St. Norm. Vert$

→$n > 40$, damit dies zuverlässig gilt

6.2.5. Varianz einer Normalverteilung

$$\left[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}S^2, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}S^2\right]$$

→Für Parameter σ^2 zu Niveau $1-\alpha$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left((X_1-\overline{X})^2 + \cdots + (X_n-\overline{X})^2\right)$$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ & $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ sind das $p = 1-\frac{\alpha}{2}\ und\ das\ p = Quantil\ der\ \chi^2 - Verteilung\ mit\ n-1\ Freiheitsgrad.$

6.2.6. Anteilswert

$p = P(E), Stichprobe\ mit\ Umfang\ n,$
$Intervall\ [b_-, b_+]$

$$b_\pm = \frac{\overline{P} + c \pm z\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n} + \frac{c}{2n}}}{1+2c}$$

→Für Param. p zu Niveau $1-\alpha$

$$\overline{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P}{n}$$

$\bar{P}$: relative Anzahl Eintretungen von E in der Stichprobe

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}: Das\ p = 1-\frac{\alpha}{2} - Quantil\ der\ St. Norm. Vert$

$$c = \frac{z^2}{2n}$$

→Güte dieser Approx. Schlecht, wenn n zu klein, oder p sehr nahe an 0 oder 1 liegt. Dann lieber mit exakter Binomialverteilung ein Konfidenzintervall berechnen.