

Signale und Systeme 1

1. Signalbeschreibung im Zeitbereich

1.1. Leistung und Energie

1.1.1. Leistungssignale

- Endliche normierte Signalleistung
- Unendliche norm. Signalenergie
- Zeitl. Unbegrenzt ohne abklingende Amplitude

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt$$

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{P}$$

$$E = \infty$$

P : Leistung; T_0 : Periode; X_{eff} : Effektivwert;
 E : Energie

1.1.2. Energiesignale

- Endliche norm. Signalenergie
- Verschwindende norm. Signalleistung
- Transiente Signale (Ausschwingvorgänge)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P = 0$$

1.2. Mittelwertbegriffe

1.2.1. Linearer Mittelwert

$$X_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

Periodische Signale:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

1.2.2. Quadratischer Mittelwert

$$X^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Periodische Signale:

$$X^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt$$

1.2.3. Varianz & Standardabweichung

$$\text{Varianz} = \text{Var}(x) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} (x(t) - X_0)^2 dt$$

$$\text{Standardabw.} = \sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

$$\sigma^2 = X^2 - X_0^2$$

2. Fourierreihen

2.1. Sin-/Cos-Darstellung

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right]$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) dt$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt, \quad k \geq 0$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt, \quad k \geq 1$$

2.2. Betrag-Phasen-Darstellung

$$s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t + \varphi_k\right)$$

2.2.1. Umformungen

$$A_k = M_k \cos(\varphi_k), \quad k > 0$$

$$B_k = -M_k \sin(\varphi_k), \quad k > 0$$

$$M_0 = \frac{A_0}{2}; \quad M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; k > 0$$

$$\varphi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) + n\pi$$

2.3. Komplexe Darstellung

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{\frac{j2\pi k}{T_0} t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) e^{-\frac{j2\pi k}{T_0} t} dt$$

2.3.1. Umformungen

$$c_k = \frac{1}{2} (A_k - jB_k) = c_{-k}^*, \quad k \geq 1$$

$$M_0 = \frac{A_0}{2} = c_0; \quad M_k = 2|c_k|, \quad k \geq 1$$

$$\varphi_k = \arg(c_k)$$

2.4. Leistungsberechnung

2.4.1. Satz von Parseval

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = M_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

2.4.2. Klirrfaktor

$$k = \sqrt{\frac{P - P_0 - P_1}{P - P_0}} = \sqrt{\frac{M_2^2 + M_3^2 + \dots}{M_1^2 + M_2^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{\text{Leist. Oberschw.}}}{\sqrt{\text{Leist. } P}}$$

3. Fouriertransformation

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} dt$$

3.1. Eigenschaften

3.1.1. Qualitativ

- Nicht-periodische Signale haben ein kontinuierliches Amplitudenspektrum, periodische ein Linienspektrum
- Verkürzung im Zeitbereich führt zu Dehnung im Frequenzbereich und umgekehrt (in t/f-Richtung)

3.1.2. Formeln

Zeitbereich	Frequenzbereich
$aS_1(t) + bS_2(t)$	$aS_1(f) + bS_2(f)$
$s(t - t_0)$	$S(f) \cdot e^{-j2\pi ft_0}$
$s(a \cdot t)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
$S(t)$	$s(-f)$
$s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$	$S(f - f_0)$
$\frac{d}{dt} s(t)$	$(j2\pi f)^n \cdot S(f)$
$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f)$
$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$

3.2. Symmetrien

3.2.1. S(t) reell

$$|S(-f)| = |S(f)|$$

$$\arg\{S(-f)\} = -\arg\{S(f)\}$$

3.2.2. S(t) reell, Gerade/Ungerade

Wenn s(t) gerade, ist S(f) reell

Wenn s(t) ungerade, ist S(f) imaginär

3.3. Signalenergie

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$\text{Einheit: von } |S(f)|^2: \frac{V^2}{Hz^2} = 1\Omega \cdot \frac{Ws}{Hz}$$

4. Funktionen

4.1. Trigonometrische Identitäten

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}; & t \neq 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$$

5. Herleitungen von Fouriertransformationen

5.1. Rechteckpuls

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-t/2}^{t/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \Big|_{-t/2}^{t/2} = \frac{e^{-j\pi f t} - e^{j\pi f t}}{-j2\pi f} \\ &= \frac{e^{j\pi f t} - e^{-j\pi f t}}{j2\pi f} = \tau \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \end{aligned}$$

6. LTI-Systeme

6.1. Definitionen

6.1.1. Statisch/Dynamisch

- Statisch: Ausgangswert hängt nur vom aktuellen Eingangswert ab (gedächtnislos)
- Dynamisch: Ausgangswert hängt vom aktuellen Eingangswert und von alten Ein- / Ausgangswerten ab

6.1.2. Linearität

$$x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \rightarrow y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

→ Eine Linearkombination von Eingangssignalen ergibt die Linearkombination der zugehörigen Ausgangssignale

6.1.3. Zeitinvarianz

- Zeitinvariant: Systemeigenschaften ändern sich im Laufe der Zeit nicht
- Zeitvarianz: Systemeigenschaften ändern sich im Laufe der Zeit.

6.1.4. Kausalität

Ein kausales System reagiert erst mit einem Ausgangssignal, wenn ein Eingangssignal anliegt (d.h. es reagiert nicht auf zukünftige Eingangssignale)

6.1.5. Stabilität

Bounded Input → Bounded Output

$$|x(t)| \leq A < \infty \rightarrow |y(t)| \leq B < \infty, \forall A, B > 0$$

6.2. Eigenschaften

- Das LTI-System verändert die Frequenz nicht!

6.3. Impulsantwort



6.3.1. Berechnen von Ausgangssignal mit $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

6.3.2. BIBO-stabiles System

Maximum des Ausgangssignals:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t - \tau)| d\tau \\ &\leq A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = B < \infty \end{aligned}$$

→ Die Stossantwort eines stabilen Systems ist absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

6.3.3. Zusammenhang mit Schrittantwort

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau$$

$$\frac{dy}{dt} = h(t)$$

→ Die Stossantwort ist die Ableitung der Schrittantwort!

6.4. Frequenzgang

Faltung im Zeitbereich \leftrightarrow Multiplikation im Frequenzbereich

Somit:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$H(f)$: Frequenzgang

6.5. Amplitudengang

$$|H(f)| = \frac{|Y(f)|}{|X(f)|}$$

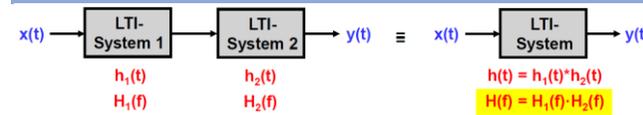
6.6. Phasengang

$$\varphi_H(f) = \varphi_Y(f) - \varphi_X(f)$$

6.7. Sweep-Methode

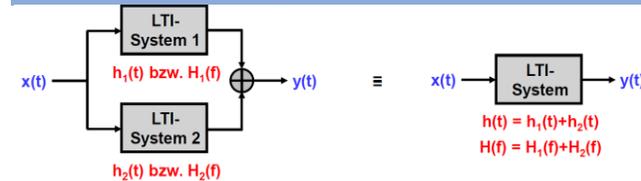
1. $\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ anlegen & $|H(f_0)|$ und Phasenverschiebung ablesen
2. $\cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$ anlegen & $|H(f_1)|$ und Phasenverschiebung ablesen
3. usw.

6.8. Serieschaltung

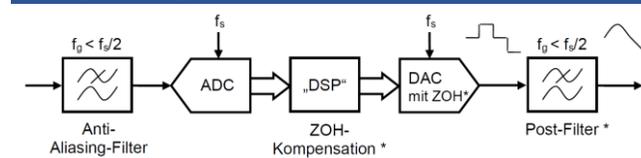


Beweis: $x(t) = \delta(t)$ wählen und Problem im Frequenzbereich lösen

6.9. Parallelschaltung



7. Digitale Signale



7.1. Signalabtastung

7.1.1. Begriffe

T_s : Abtastperiode

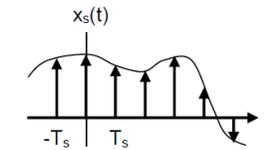
$f_s = \frac{1}{T_s}$; Abtastfrequenz

T_0 : Einschaltzeit, Abtastdauer

7.1.2. Ideal abgetastetes Signal

Darstellung als Folge von Dirac-Impulsen:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



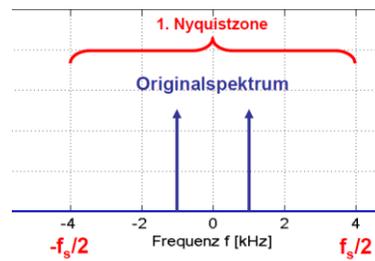
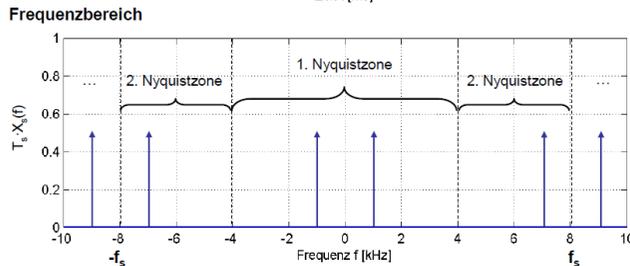
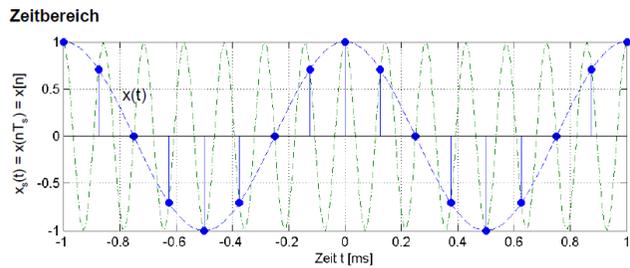
Als komplexe Fourierreihe:

$$x_s(t) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot n f_s t}$$

Spektrum abgetastetes Signal:

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s)$$

Das Spektrum eines ideal abgetasteten Signals ist periodisch mit der Abtastfrequenz f_s (Siehe Abb.)

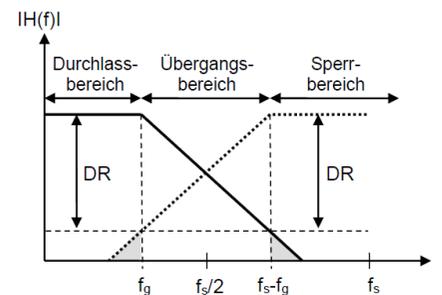


Typische Abtastfrequenz: $2.5 \cdot f_g \leq f_s \leq 4 \cdot f_g$

7.2.1. Anti-Aliasing-Filter

Ein Anti-Aliasing-Filter ist ein Tiefpassfilter, der das analoge Signal auf das erste Nyquistband beschränkt und alle höheren Frequenzen dämpft.

In der Abbildung: Anti-Aliasing-Filter, der Signalkomponenten bis f_g passieren lässt & alles darüber dämpft:



7.3. Rekonstruktion

7.3.1. Ideale Rekonstruktion

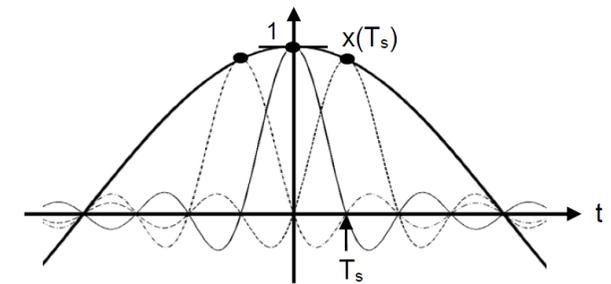
Ein abgetastetes Signal kann fehlerfrei rekonstruiert werden, wenn es kein Aliasing aufweist.

$$X(f) = X_s(f) \cdot T_s \cdot H_{TP}(f)$$

$X(f)$: Originalsignal

$H_{TP}(f)$: idealer Tiefpassfilter mit Grenzfrequ. $f_g = \frac{f_s}{2}$

$$x(t) = x_s(t) * \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \rightarrow \text{Faltung!}$$



7.3.2. Reale Rekonstruktion

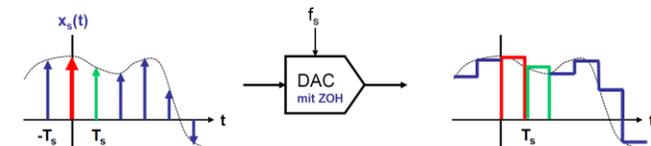
Mit Zero Order Hold (ZOH)

$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_{ZOH}(f) = T_s \cdot \frac{\sin(\pi f / f_s)}{\pi f / f_s} \cdot e^{-j\pi f / f_s}$$

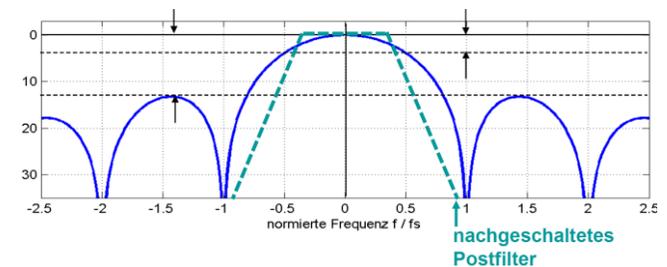
Stossantwort von ZOH ist ein Rechtecksignal.

ZOH hält den abgetasteten Wert während der gesamten Dauer T_s fest \rightarrow Treppensignalsignal



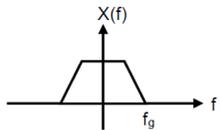
Dämpfung von ZOH bei $|f| = \frac{f_s}{2}$: ca. 4dB.

Da der Amplitudengang des ZOH-Filters sinc-Förmig ist, wird ihm ein Postfilter nachgeschaltet. Dieses glättet das Treppensignalsignal.

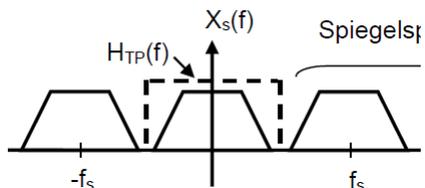


7.2. Aliasing

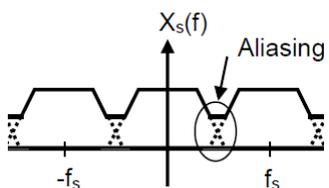
Wenn die Abtastfrequenz zu klein gewählt wird, überlappen sich im Spektrum die Spiegelspektren.



Kein Aliasing bei $f_s \geq 2f_g$:



Aliasing bei $f_s < f_g$:



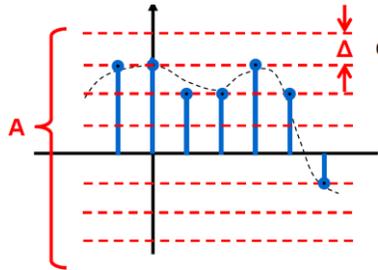
7.4. Lineare Quantisierung

W : Wortbreite in Bits

Δ : Quantisierungsstufe

A : Aussteuerbereich

$$\Delta = \frac{A}{2^W}$$



Quantisierter Wert wird durch Runden berechnet

7.4.1. Quantisierungsfehler:

$$\varepsilon(nT_s) = x(nT_s) - x_q(nT_s) \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$$

Wenn die meisten Abtastwerte viel grösser als Δ :

- $\varepsilon(nT_s)$ sind gleichverteilte Zufallsgrößen
- Kein Zusammenhang zw. $\varepsilon(nT_s)$ und $x(nT_s)$

Wenn Abtastwerte meist kleiner als Δ :

- Im Extremfall wird ein leiser Sinuston nur noch mit Least Significant Bit abgebildet
→ Rechteckwelle → störende Oberwellen
- Lösen durch höhere Abtastrate, höhere Auflösung oder zumischen von geringem Rauschen (dither) zw. Anti-Aliasing-Filter und Abtaster

Erwartungswert: $E[\varepsilon] = 0$

$$\text{Leistung: } P_e = E[\varepsilon^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta} d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

7.4.2. Signal-to-Noise-Ratio (SNR):

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_e} \right) \text{ in [dB]}$$

$$SNR = 6.02 \cdot W + 10 \cdot \log_{10} \left(12 \cdot \frac{P_x}{A^2} \right)$$

$$K = 10 \cdot \log_{10} \left(12 \cdot \frac{P_x}{A^2} \right)$$

$$\text{Leistungsverhältnis: } \frac{P_x}{P_e} = \frac{12 \cdot P_x}{A^2} \cdot 2^{2W}$$

P_x : Leistung am Quantisierungseingang

P_e : Leistung des Quantisierungsfehlers

- Mit jedem Bit Wortlänge wird SNR um 6dB höher
- K ist von P_x abhängig. Je kleiner der Signalpegel relativ zu A , umso kleiner das SNR

7.4.3. Spezialfall: Sinusförmiges Signal

$$P_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

$$K = 1.76 \text{ dB}$$

$$SNR \text{ [dB]} = 6 \cdot W + 1.76$$

7.4.4. Vollaussteuerung

$$X_p = X_{max}$$

$$20 \cdot \log_{10} \left(\frac{X_p}{X_{max}} \right) = 0 \text{ dB}$$

$$SNR = 49.76 \text{ dB}$$

→ Wird die Amplitude des Sinussignals um x dB reduziert, reduziert sich auch das SNR um x dB

7.4.5. Übersteuerung

→ Muss vermieden werden!

- Es entstehen Oberwellen, welche störende Aliasingfrequenzen produzieren
- Anti-Aliasing-Filter hilft nicht, da Störungen nach dem Filter entstehen
- Übersteuerungswahrsch. wird durch Verringerung von P_x minimiert

7.5. Aperture und Clock Sampling Jitter

Sind Rauschquellen, verursacht durch Nichtidealitäten im SHA und in der Clock.

→ Wenn das rms-Jitter zu gross ist, kann das SNR einen gewissen Wert nicht überschreiten, egal wie klein das Quantisierungsrauschen ist

7.5.1. Fullscale-Sinussignal

SNR, verursacht durch Aperture & Clock sampling Jitter:

$$SNR = -20 \cdot \log(2\pi f t_j) \text{ [dB]}$$

t_j : rms-Jitter

8. Diskrete Fourier Transformation

Stellt eine Näherung des Fourierspektrums dar.

8.1. Formeln

8.1.1. DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

N : Anzahl Abtastwerte, Blocklänge

$x[n]$: Abtastwerte

Länge des abgetast. Zeitfensters = NT_s

8.1.2. Inverse DFT

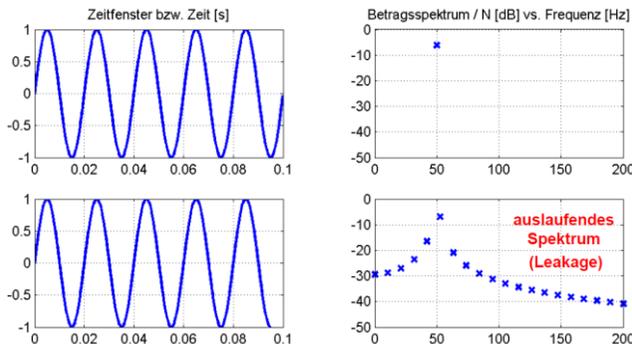
$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

8.2. Eigenschaften

- Die DFT berechnet aus N Abtastwerten $x[n]$ in einem Zeitfenster der Länge $T_{DFT} = NT_s$ komplexe Spektralwerte im Frequenzbereich $[0, f_s]$
- $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_{DFT}}$: Frequenzauflösung ist umgekehrt proportional zur Länge des Zeitfensters
- Für reellwertige Zeitsignale : $X^*[N - m] = X[m]$, mit z^* ist konj. Kompl. Wert von $z \rightarrow$ Das DFT-Betragspektrum ist symmetrisch
- Mit der DFT wird das Spektrum der periodisch fortgesetzten Zeitfenstersequenz bestimmt

8.3. Leakage

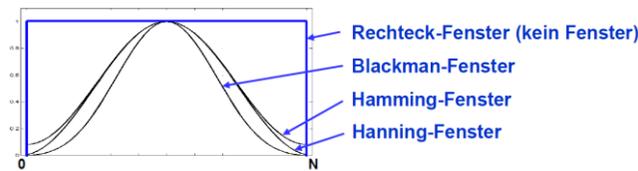
Unpassende Fensterlänge \rightarrow Sprungstellen durch periodische Fortsetzung :



8.3.1. Reduktion von Leakage

Gewichtung der Abtastwerte durch Fensterung :

$$x_w(n) = x[n] \cdot w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



- Fenster reduzieren leakage unterschiedlich stark
- Verbreitern aber das Signalspektrum

9. UTF und Bodediagramm

9.1. Übertragungsfunktion (UTF)

1. Allg. Form der DGL eines Systems :

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + \frac{a_1 dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \frac{b_m d^m x(t)}{dt^m} + \dots + \frac{b_1 dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

2. Laplace-Transformation berechnen
3. Übertragungsfunktion :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

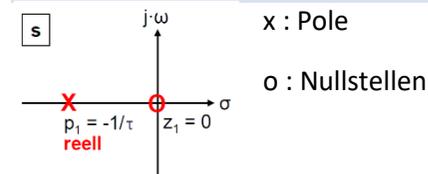
9.2. Pol-/Nullstellendarstellung

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

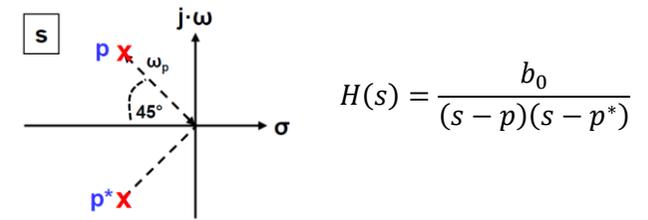
z_k : Nullstellen der UTF

p_k : Pole der UTF

9.2.1. Darstellung im PN-Schema



Konjugiert-komplexes Polpaar :

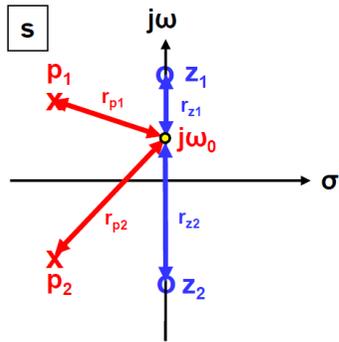


9.2.2. Stabilität

Stabil, wenn:

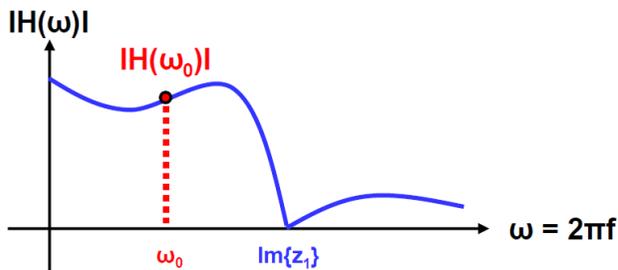
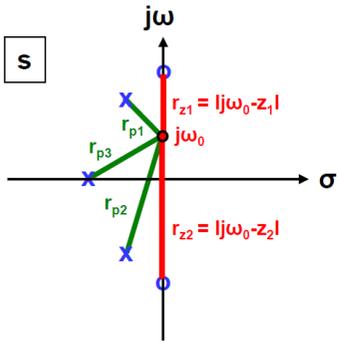
- Alle Pole in der linken Halbebene, dh. $Re\{p_k\} < 0$
- Nullstellen: Kein Einfluss auf Amplitudengang, aber auf Phasengang.

9.3. Frequenzgang



$$|H(\omega_0)| = K \cdot \frac{r_{z_1} \cdot r_{z_2} \cdots r_{z_m}}{r_{p_1} \cdot r_{p_2} \cdots r_{p_n}}$$

9.3.1. Beispiel



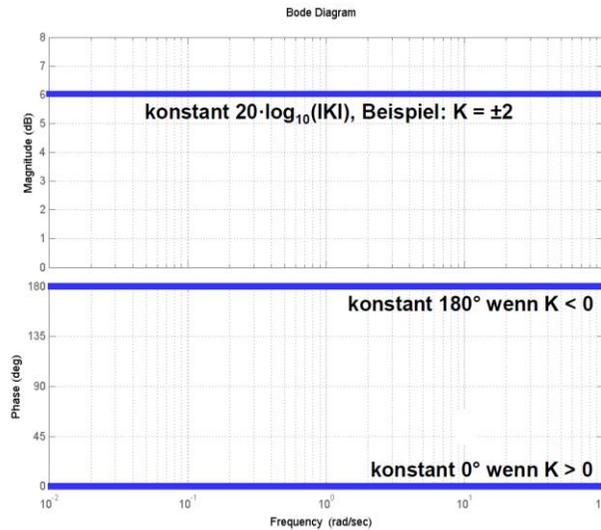
$$|H(\omega_0)| = \frac{r_{z_1} \cdot r_{z_2}}{r_{p_1} \cdot r_{p_2} \cdot r_{p_3}}$$

- Je näher ein Pol bei der $j\omega$ – Achse, umso grösser die Überhöhung im Amplitudengang
- Nullstellen auf der $j\omega$ – Achse ergeben Nullstellen im Amplitudengang

9.4. Bodediagramm

9.4.1. Konstante

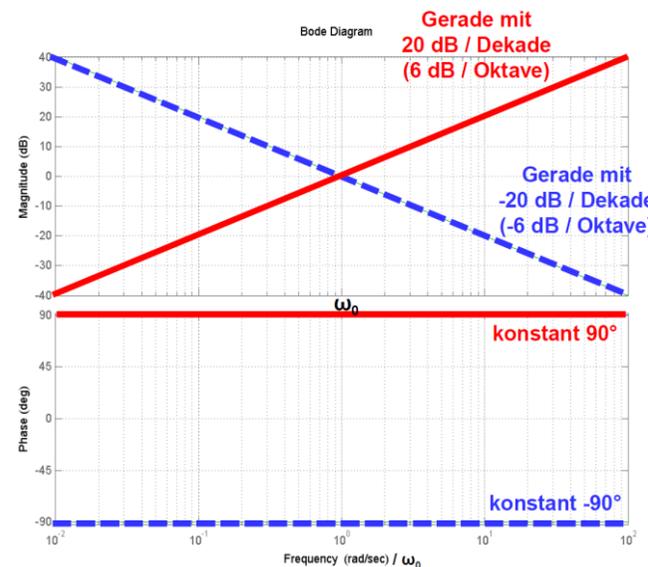
$$H(s) = K$$



9.4.2. NS/Pol im Ursprung

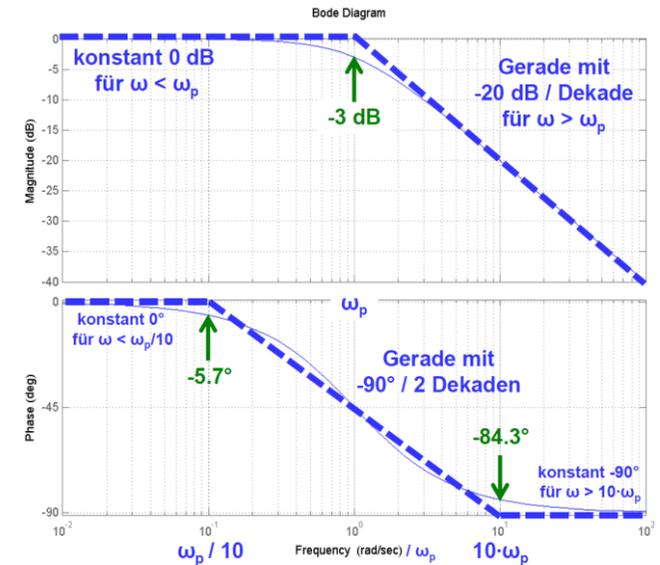
$$\text{NS im Ursprung: } H(s) = \frac{s}{\omega_0}$$

$$\text{Pol im Ursprung: } H(s) = \frac{1}{s}$$



9.4.3. Pol 1. Ordnung

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$



$$H(\omega \ll \omega_p) \approx 1$$

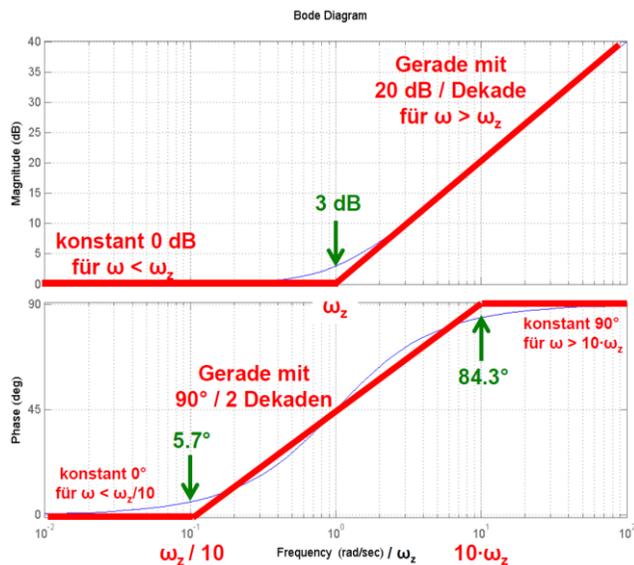
$$H(\omega \gg \omega_p) \approx \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_p}}$$

9.4.4. Nullstelle 1. Ordnung

$$H(s) = 1 + \frac{s}{\omega_z}$$

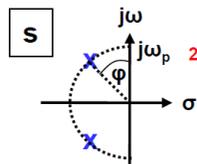
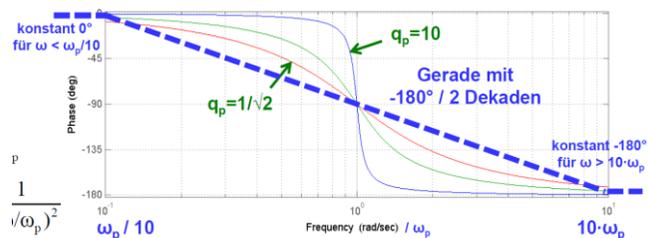
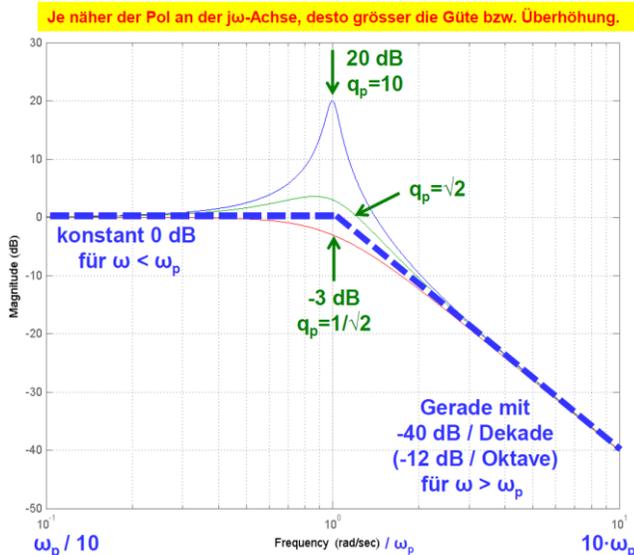
$$H(\omega \ll \omega_z) \approx 1$$

$$H(\omega \gg \omega_z) = \frac{j\omega}{\omega_z}$$



9.4.5. Pol 2. Ordnung

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{s}{q_p \cdot \omega_p} + 1}, \quad q_p: \text{Polgüte}$$



$$2 \cdot \sin(\varphi) = 1/q_p$$

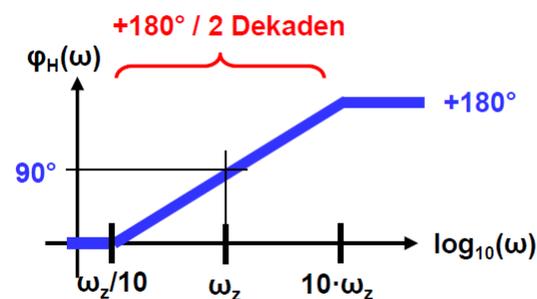
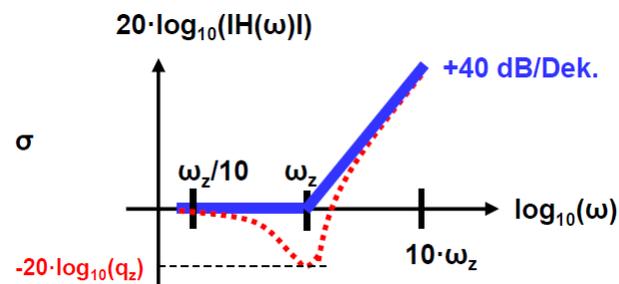
$$H(\omega \ll \omega_p) \approx 1$$

$$H(\omega = \omega_p) = -j \cdot q_p$$

$$H(\omega \gg \omega_p) \approx \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

9.4.6. Nullstelle 2. Ordnung

$$H(s) = \frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{s}{q_z \cdot \omega_z} + 1$$



9.5. Minimalphasensysteme

Minimalphasig, wenn:

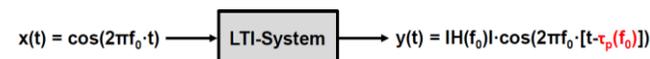
- Alle NS in der linken Halbebene, dh: $Re\{z_k\} < 0$

→ Minimalphasig: $\varphi(f)$ nimmt langsamer ab, als bei Nicht-Minimalphasensystemen. Haben kleinstmögliche Gruppenlaufzeit $\tau_g(f)$ (=Zeitverzögerung)

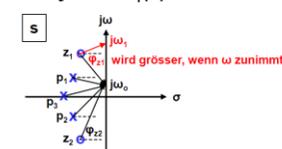
Gruppenlaufzeit: Zeitverzögerung der Enveloppe eines Signals, das aus mehreren Frequenzkomponenten besteht.

$$\text{Phasenlaufzeit} = \tau_p(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi \cdot f}$$

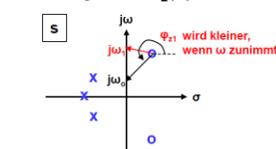
$$\text{Gruppenlaufzeit} = \tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}$$



minimalphasiges System $H_1(s)$



nicht-minimalphasiges System $H_2(s)$



Asymptotisches Verhalten:

Für Systemordnung n , Nennergrad n

Zählergrad $m \leq n$

$|H(\omega \rightarrow \infty)|$ fällt mit $(m - n) \cdot 20 \text{ dB pro Dekade}$

$$\varphi_H(\omega \rightarrow \infty) = (m - n) \cdot 90^\circ$$

9.6. Allpol-Filter

Haben keine NS, sind minimalphasig

$$H(s) = \frac{b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Asymptote für $\omega \rightarrow \infty$:

$H(\omega \rightarrow \infty)$: $n \cdot (-20) \text{ dB pro Dekade}$

$$\varphi_H(\omega \rightarrow \infty) = -n \cdot \frac{\pi}{2} = -n \cdot 90^\circ$$

9.6.1. Butterworth-Tiefpass N-ter Ordnung

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{DB}}\right)^{2N}}}$$

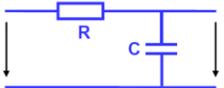
10. Faltung

10.1. Eigenschaften

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

11. Formeln für spezifische Anwendungen

11.1. RC-Tiefpass-Filter 1. Ordnung


$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{wobei } \tau = RC$$

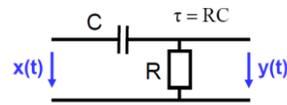
$$H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}$$

11.1.1. UTF

$$\text{DGL: } \tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$H(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

11.2. Hochpassfilter 1. Ordnung



$$H(f) = H(s = j\omega) = \frac{j2\pi f \tau}{1 + j2\pi f \tau}$$

11.2.1. UTF

$$H(s) = \frac{b_1 s}{a_1 s + a_0} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

$$\text{Pol-/Nullstellendarst.: } \frac{s-0}{s - \left(-\frac{1}{\tau}\right)}$$