

GRT – Janko Uehlinger

1. LTI-Systeme

1.1. Darstellungen

Polynomdarstellung:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Pol- und Nullstellendarstellung:

$$G(s) = 2 \frac{s^2 + 4s + 29}{(s + 5)(s^2 + 2s + 101)}$$

Zeitkonstantendarstellung:

$$G(s) = K_S \frac{(T_{1z}s + 1)(T_{2z}s + 1) \dots (T_{mz}s + 1)}{(T_{1p}s + 1)(T_{2p}s + 1) \dots (T_{np}s + 1)}$$

Summendarstellung:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{7}{s+2} + \frac{8}{s+3}$$

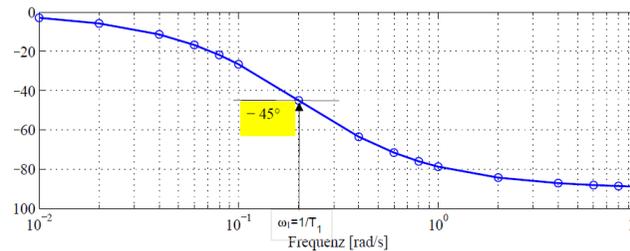
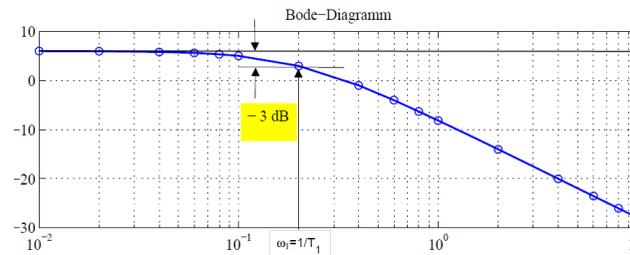
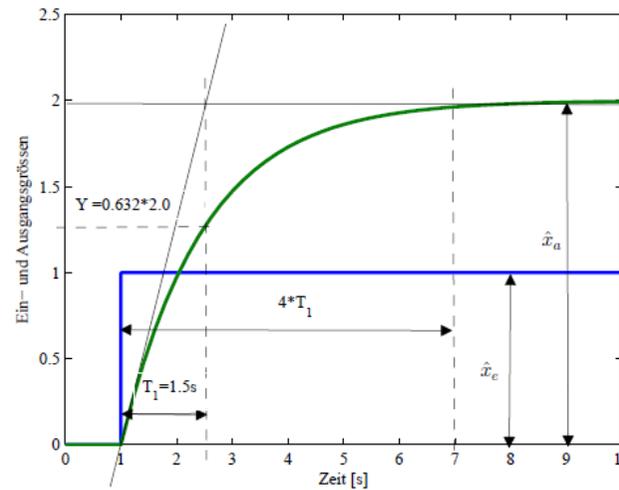
1.2. Elementare Übertragungsglieder

1.2.1. PT1-Glied

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{K_S}{T_1 s + 1}$$

$$x_a(t) = K_S \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \hat{x}_e$$

Einheitssprungfunktion:



$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}$$

1.2.2. PTn-Glied

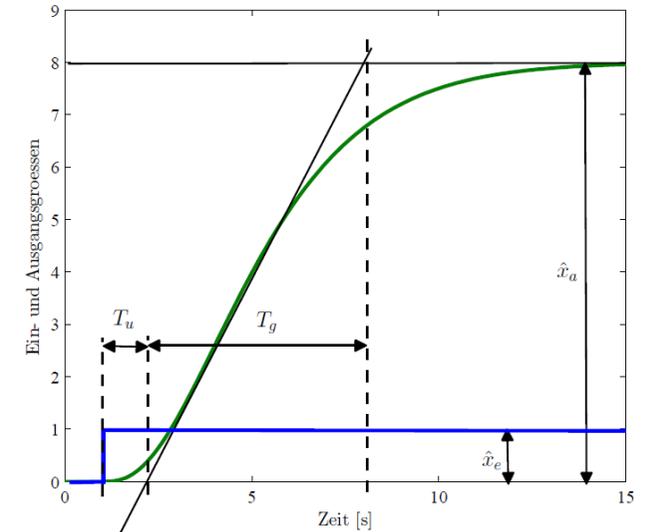
Reihenschaltung von PT1-Gliedern.

Annäherung durch Reihenschaltung von n PT1-Gliedern mit mittlerer Zeitkonstante T_1

$$G(s) = K_S \left(\frac{1}{T_n s + 1} \right)^n$$

Methode der Wendetangente → Fehleranfällig!

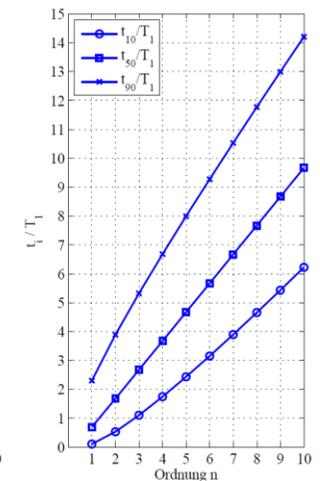
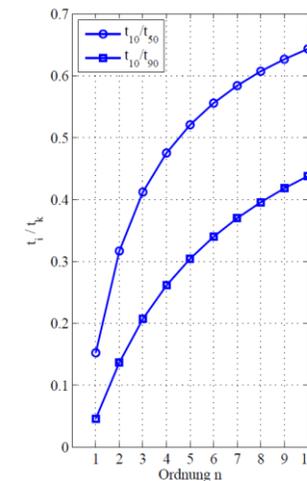
Mittlere Zeitkonstante T_n abschätzen:



n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_g/T_u	9.71	4.61	3.14	2.44	2.03	1.75	1.56	1.41	1.29
T_g/T_1	2.72	3.69	4.46	5.12	5.70	6.23	6.71	7.16	7.59
T_u/T_1	0.28	0.80	1.42	2.10	2.81	3.55	4.30	5.08	5.87

1.2.3. PT2-Glied

Zeit-Prozent-Kennwert-Verfahren nach Schwarze:



$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

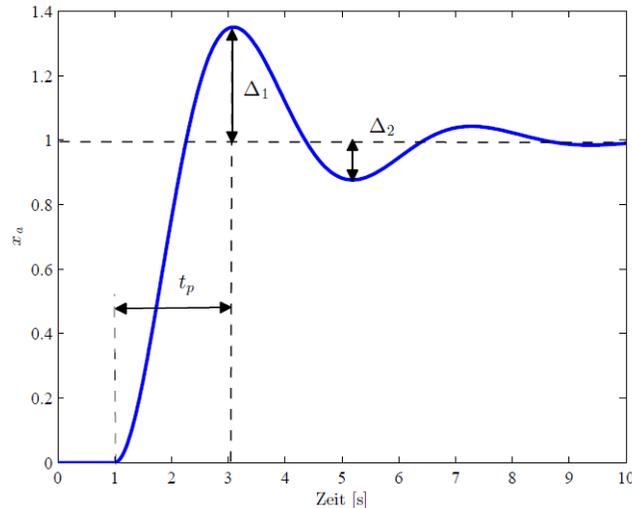
Lösung Einheitssprung:

$$x_a(t) = 1 - e^{-D\omega_0 t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_d t) \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{Eigenfrequenz}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-D^2}, \quad \text{gedämpfte Eigenfrequenz.}$$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mk}}, \quad \text{Dämpfungsgrad}$$



$$\Delta_1 = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}}, \quad [\%/100]$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad \text{Überschwingzeit}$$

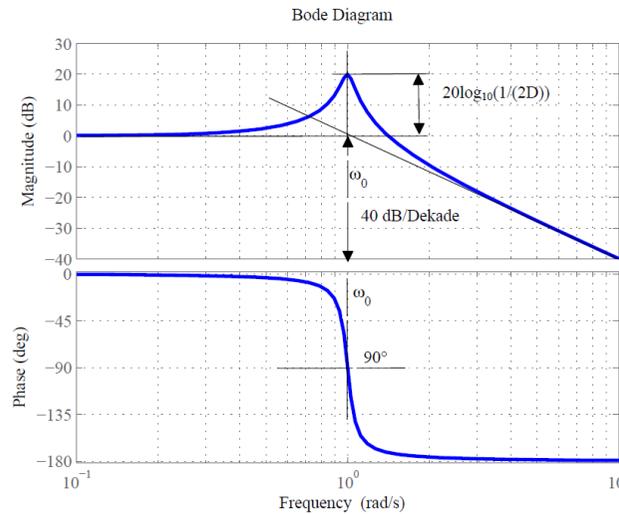
$$\vartheta = \ln\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right), \quad \text{logarithm. Dekrement}$$

$$\Delta_1 = e^{-\vartheta}$$

$$D = \frac{\vartheta}{\sqrt{\pi^2 + \vartheta^2}} = -\frac{\ln(\Delta_1)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\Delta_1))^2}}$$

$$T_{5\%} \approx \frac{3}{D\omega_0}, \quad \text{Ausschwingzeit 5\% Toleranz}$$

$$T_{2\%} \approx \frac{4}{D\omega_0}, \quad \text{Ausschwingzeit 2\% Toleranz}$$



Nullstellen:

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2 - 1}$$

1. Zwei reelle Nullstellen, falls $D^2 - 1 > 0$

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$$

2. Doppelte reelle Nullstelle, falls $D = 1$ existiert

$$s_{1,2} = -D\omega_0$$

3. Konjugiert komplexe Nullstellen, falls

$$D^2 - 1 < 0$$

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

4. Konjugiert komplexes Paar rein imaginärer Nullstellen, wenn $D = 0$.

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0$$

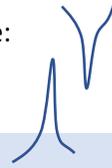
Pollagen & Sprungantworten: Skript S. 68

1.3. Kenngrößen Frequenzgang

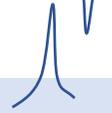
Bode Diagramm ist die Verstärkung (Amplitude) des Systems aufgetragen über die Frequenz.

$$\text{Bode} = \frac{\text{Ausgang des Systems}}{\text{Chirp Eingang}}$$

Komplex konjugierte Nullstelle:



Komplex konjugierte Polstelle:

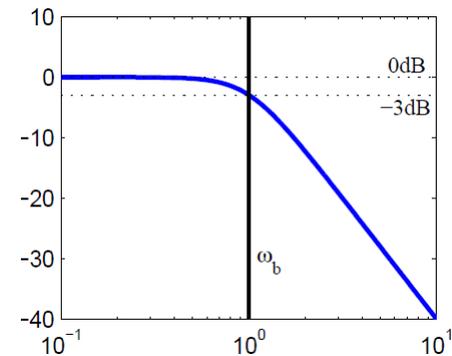


1.3.1. Anstiegszeit

$$T_a = t_{90} - t_{10}$$

1.3.2. Bandbreite

Im Bodediagramm dort, wo die Amplitude 3dB unter den Startwert sinkt:



$$f_b = \frac{\omega_b}{2\pi}$$

1.3.3. Bandbreitenprodukt

$T_a \cdot f_b \approx 0.35 \rightarrow$ Nur bei Tiefpassverhalten!

$T_a \cdot f_b = (\ln(0.9) - \ln(0.1))/2\pi \rightarrow$ PT1

$T_a \cdot \omega_b \approx 2.2 \rightarrow$ PT1

$\omega_d = \frac{1.4}{T_a} \rightarrow$ PT2 mit $0.3 < D < 0.9$

$\omega_{1,2} \approx \frac{3.4}{T_a} \rightarrow$ PT2 aperiodisch mit $D=1$

1.4. Stabilitätskriterium nach Hurwitz

Testet ob alle Nullstellen des Nennerpolynoms der closed Loop Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben.

Vorgehen:

1. Nennerpolynom suchen
2. Hurwitz-Matrix aufstellen:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

3. Kriterium:

- 3.1. Alle a_i existieren & haben gleiches Vorzeichen
- 3.2. Die Hurwitzdeterminanten D_i sind alle positiv:

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

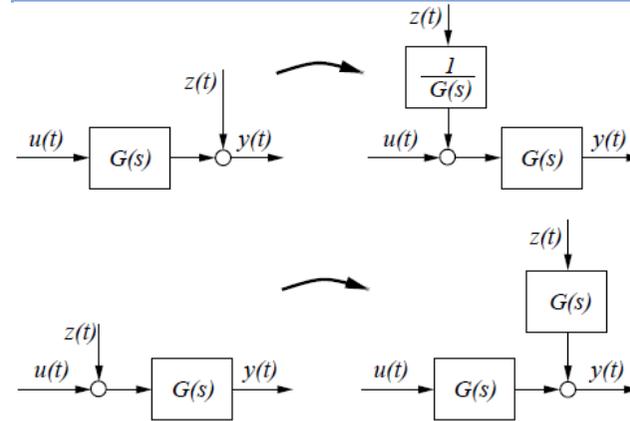
usw.

4. Anzahl Pole in rechter Halbebene:
Anzahl Vorzeichenwechsel in folgender Zahlenreihe:

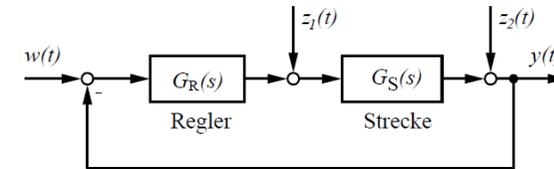
$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

2. Rückgekoppelte Systeme

2.1. Blockschaltalgebra



2.2. Störübertragungsfunktionen



$$G_{Z1}(s) = \frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}$$

$$G_{Z2}(s) = \frac{Y(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)}$$

$$G_{Wz} = \frac{Y(t)}{W(t)} = \frac{\text{Vorwärts}}{1 + \text{Vorwärts} * \text{Rückwärts}}$$

2.3. Stationäre Eigenschaften

Führungsübertragungsfunktion:

$$G_W = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S}$$

Übertragungsfunktion der offenen Kette:

$$G_0(s) = G_R G_S$$

Betrachtet man das Bodediagramm, so wird die

Frequenz, bei der der Amplitudengang nach unten abknickt, als Bandbreite des Reglers bezeichnet.

2.3.1. Führungsverhalten

- Ziel: grosse Bandbreite
- $\lim_{s \rightarrow 0} G_W(s) = 1$

→ Damit das 2. Möglich ist, muss $G_R G_S = G_{OL}$ mindestens einfach integrierend sein! D.h. der statische Regelfehler muss gleich 0 sein.

2.3.2. Störverhalten

Konstante Störungen können ausgeregelt werden, wenn:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_Z = 0$$

→ Für Z1: $\lim_{s \rightarrow 0} G_{Z1} = 0$: Regler muss integrierend sein

→ Für Z2: $\lim_{s \rightarrow 0} G_{Z2} = 0$: G_{OL} muss integrierend sein

3. Pol-/Nullstellenkompensation

3.1. Dominante PT1-Strecken (stabil)

$$G_S(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \tilde{G}_S$$

3.1.1. Nachstellzeit bestimmen PT1

$$T_N = T_1$$

T_1 : Langsamste Zeitkonstante

3.1.2. Regler bestimmen & Regelkreis kürzen

$$G_R = K_P \frac{T_N s + 1}{T_N s}$$

$$G_{OL} = G_R G_S = K_P \frac{\tilde{G}_S}{T_N s}$$

3.2. Dominante PT2-Strecken (stabil)

$$G_S(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \tilde{G}_S$$

$$G_S = \frac{1}{(T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1)} \tilde{G}_S$$

3.2.1. Regler

$$G_R = K_P \left(1 + \frac{1}{T_Ns} + T_Vs \right)$$

$$G_R = K_P \frac{T_N T_V s^2 + T_N s + 1}{T_N s}$$

3.2.2. Kompensationsmethode dominante PT2

Reglerwerte bestimmen

$$T_N = T_1 + T_2$$

$$T_V = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

3.2.3. Kausalität

Um Kausal zu machen:

$$G_R = \frac{K_P \left(1 + \frac{1}{T_Ns} + T_Vs \right)}{\bar{T}_1s + 1}$$

$$G_R = K_P \frac{T_N T_V s^2 + T_N s + 1}{T_N s (\bar{T}_1s + 1)}$$

Mit: $\bar{T}_1 \ll T_V$

3.3. Allgemeine Kompensationsmethode

Wie immer nur bei stabilen Strecken anwendbar.

3.3.1. Ziel-Übertragungsfunktion

Wird vorgegeben

$$\hat{G}_{CL} = \frac{G_R G_S}{1 + G_R G_S}$$

$$\hat{G}_{CL} = \frac{d(s)}{c(s)}$$

3.3.2. Kompensationsregler

$$G_R = \frac{1}{G_S} \frac{\hat{G}_{CL}}{1 - \hat{G}_{CL}}$$

$$G_R = \frac{a(s)}{b(s)} \frac{d(s)}{c(s) - d(s)}$$

3.4. Stabilität

→ Kompensationsmethode ist nur anwendbar, wenn die innere Stabilität gewährleistet ist:

Das heißt alle Übertragungsfunktionen von den Eingängen und Störfunktionen stabil sind.

3.5. Eigenschaften

- Gutes Führungsverhalten
- Schlecht bei Störverhalten, da weggekürzte Polstellen dort wieder erscheinen.

4. Polvorgabe

4.1. Charakteristisches Polynom bestimmen

G_S : Strecke beliebiger Ordnung

G_R : Regler, gleiche Ordnung an NST wie Strecke an PST

Beispiel 1. Ordnung:

$$G_S = \frac{K_S}{T_1s + 1} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

$$G_R = \frac{d_1s + d_0}{s}$$

Beispiel 2. Ordnung:

$$G_S = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$G_R = \frac{d_2s^2 + d_1s + d_0}{s(s + c_0)}$$

Charakteristisches Polynom:

$$1 + G_R G_S = 0$$

Ordnung 1:

$$s^2 + (a_0 + d_1 b_0)s + d_0 b_0 = 0$$

→ Wichtig: Polynom monisch machen! (Koeffizient der höchsten Potenz = 1!)

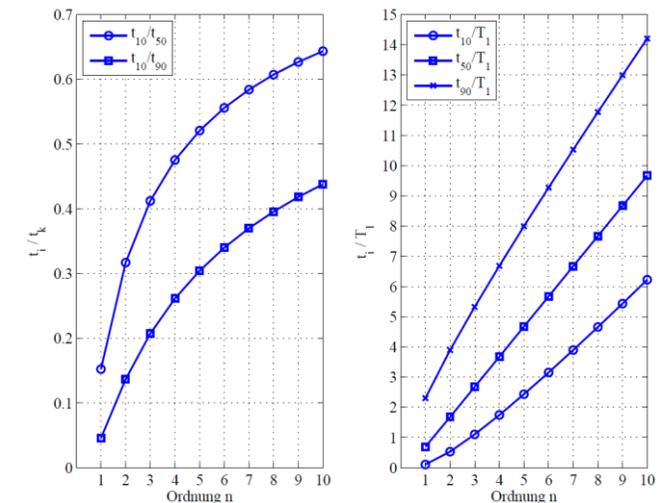
4.2. Formel aus Pollagen

q: Ordnung des char. Polynoms

$$\prod_{k=1}^q (s - p_k)$$

4.3. Gewünschte Pole bestimmen

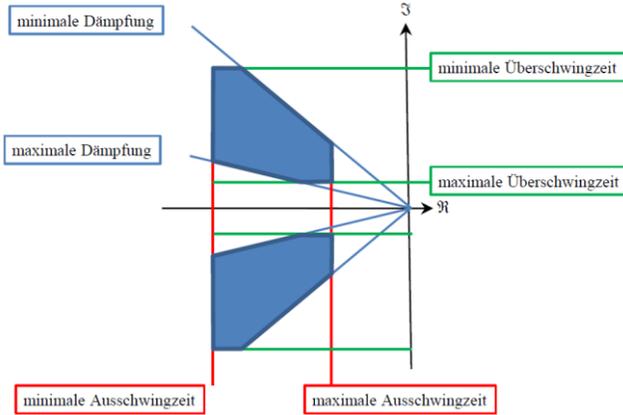
Falls gewünschte Werte für T_{90} o.ä. vorhanden sind



4.4. Koeffizientenvergleich

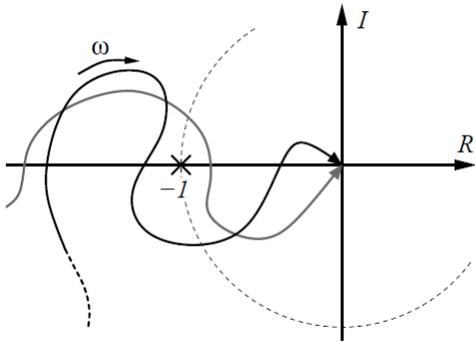
Die Koeffizienten aus 4.1 aus 4.2 bestimmen.

4.5. Polgebiet



5. Vereinfachtes Nyquistkriterium

Geschlossener Regelkreis genau dann stabil, wenn der Punkt $(-1, 0j)$ im Nyquistdiagramm des offenen Regelkreises G_{OL} mit ansteigendem ω links von der Ortskurve liegt.



→ Schwarz ist stabil, wenn rückgekoppelt

5.1. Bedingungen für Anwendung

- $G_{OL} = G_0$ hat keinen Pol in der rechten Halbebene
- Es gibt maximal 2 Polstellen im Ursprung
- Das System ist nicht sprungfähig

5.2. Anwendung in Bodediagramm

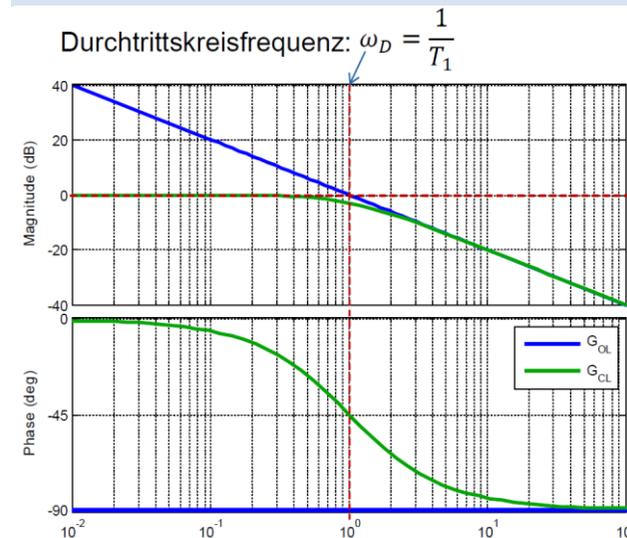
Ein geschlossener Regelkreis ist genau dann stabil, wenn bei der Durchtrittsfrequenz ω_D des Amplitudenganges durch die 0dB-Linie die Phase oberhalb der -180° -Linie liegt.

6. Frequenzkennlinienverfahren

Idee: Anhand der Kennlinien des Open Loop Systems das Verhalten des Closed Loop Systems vorhersagen.

6.1. Zusammenhänge Open Loop & Closed Loop

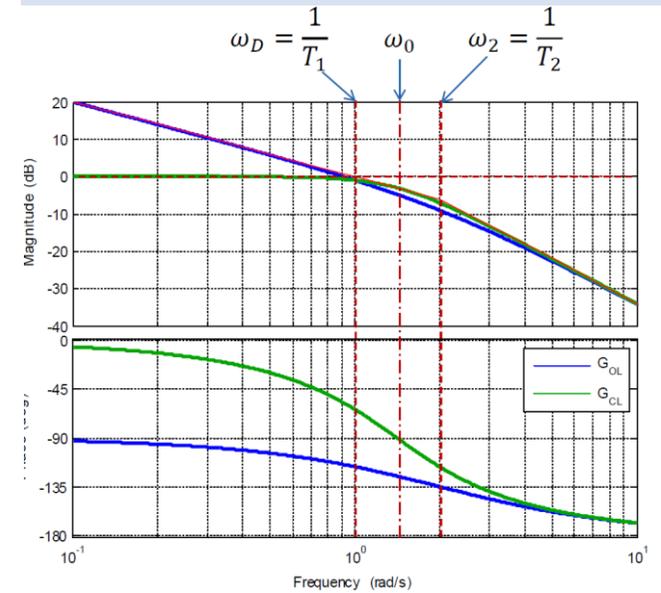
6.1.1. PT1



$$G_{OL} = \frac{1}{T_1 s}$$

$$G_{CL} = \frac{1}{T_1 s + 1}$$

6.1.2. PT2



$$G_{CL} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0} + 1}$$

$$G_{OL} = \frac{1}{T_1 s (T_2 s + 1)}$$

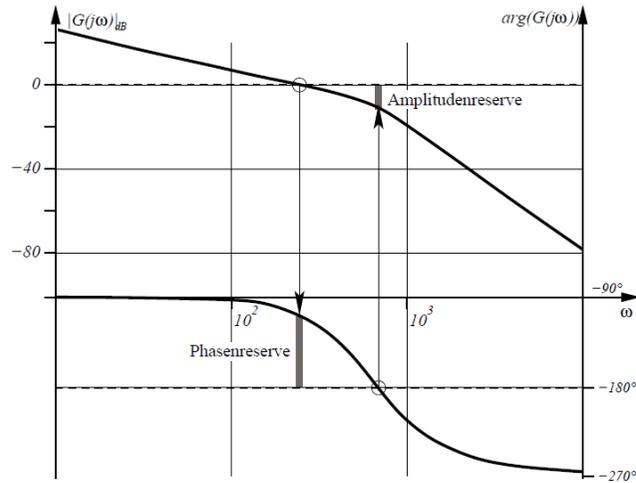
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_D \omega_2}$$

$$a = \frac{\omega_2}{\omega_D} = 4D^2$$

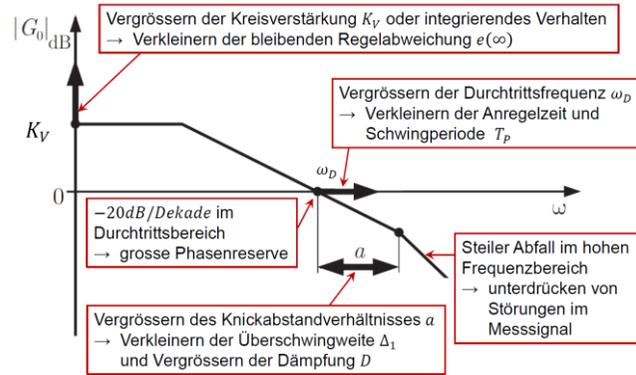
$$T_1 = \frac{2D}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_D}$$

$$T_2 = \frac{1}{2D\omega_0} = \frac{1}{\omega_2}$$

6.2. Amplituden- & Phasenreserve



6.3. Entwurfskriterien



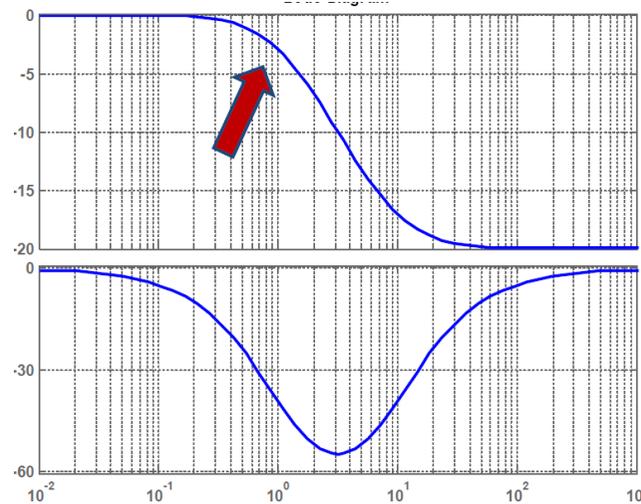
6.4. Lead-/Lag-Glieder

$$L = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$$

- Lag: $T_1 > T_2$
- Lead: $T_1 < T_2$

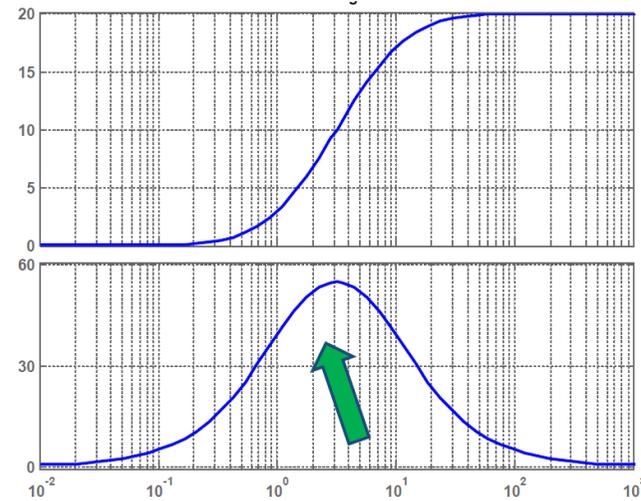
6.4.1. Lag

Amplitude im tiefen Frequenzbereich anheben für kleinere statische Regelabweichungen



6.4.2. Lead

Phase im Durchtrittsbereich anheben, für grössere Phasenreserve (Dämpfung)



7. Ziegler-Nichols-Verfahren

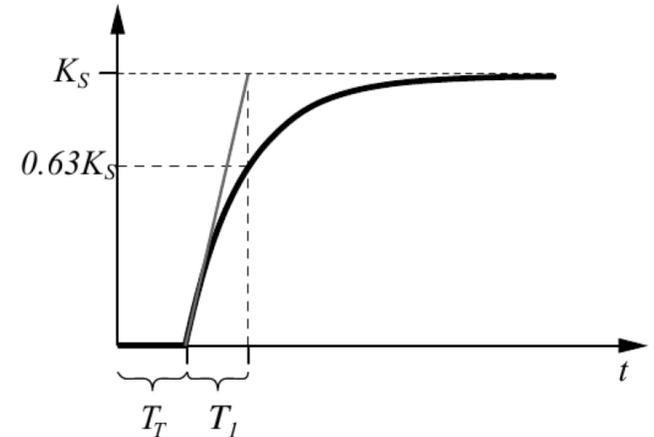
7.1. Verfahren 1 für PT1-T_T

7.1.1. Voraussetzungen

- Stabile Regelstrecke
- Kann durch Totzeit T_T und PT1-Glied approximiert werden
- Dämpfung des closed loop Systems ist etwa $D = 0.2 \dots 0.3$, entspricht Überschwinger $\Delta_1 = 40 \dots 50\%$

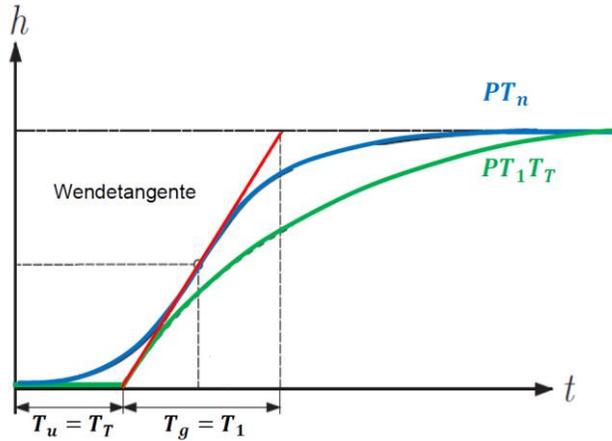
7.1.2. Verfahren

$$G_{PID} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_{NS}} + T_V s \right)$$



Regler	K_P	T_N	T_V
P-Regler	$\frac{T_1}{K_S T_T}$	-	-
PI-Regler	$0.9 \frac{T_1}{K_S T_T}$	$3.33 T_T$	-
PID-Regler	$1.2 \frac{T_1}{K_S T_T}$	$2 T_T$	$0.5 T_T$

7.1.3. Approximation PTn durch PT1-T_T



7.2. Verfahren 2: kritische Verstärkung

1. K_P bei reinem P-Regler so lange vergrößern, bis Closed Loop System grenzstabil wird
2. Mit dieser Verstärkung $K_{Krit} = A_R$ (Amplitudenreserve)
3. Und Schwingperiode $T_{Krit} = \frac{2\pi}{\omega_{Krit}}$ mit $\omega_{Krit} = \omega_\pi$

Regler	K_P	T_N	T_V
P-Regler	$0.5K_{Krit}$	–	–
PI-Regler	$0.45K_{Krit}$	$0.85T_{Krit}$	–
PID-Regler	$0.6K_{Krit}$	$0.5T_{Krit}$	$0.12T_{Krit}$

7.2.1. Amplituden- und Phasenreserve der Regelstrecke

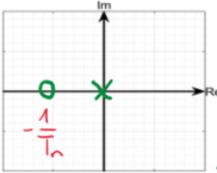
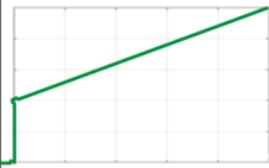
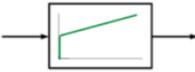
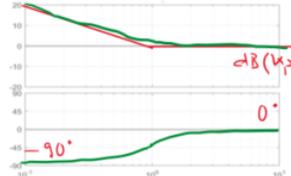
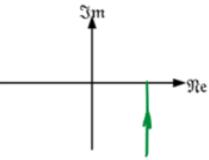
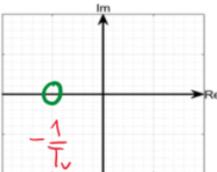
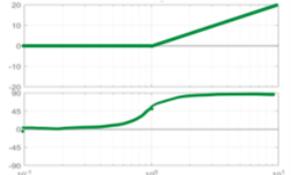
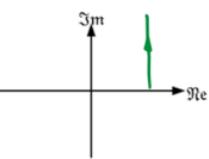
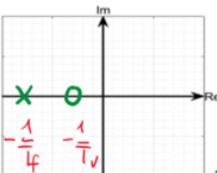
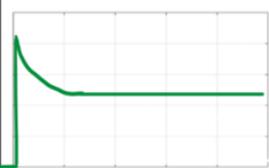
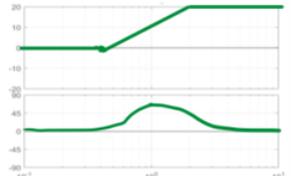
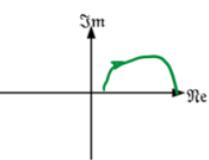
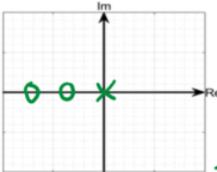
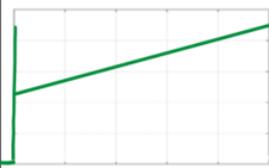
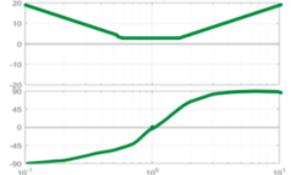
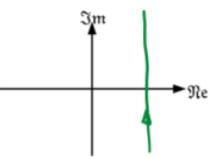
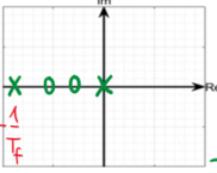
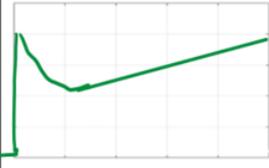
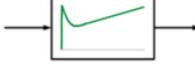
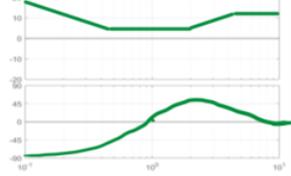
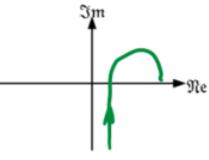
Amplitudenreserve: Verstärkung unregelt bei $\omega_{krit} - K_P \rightarrow \text{In dB!}$

Phasenreserve: Durchtrittsfrequenz: $\omega_N = \frac{1}{T_N}$

→Wichtig! Phasenverschiebung des Regelkreises ist $\varphi_{ungeregelt} + \varphi_{Regler}!$

Name / Typ	Übertragungsfunktion $G(s)$	Pol-/Nullstellen-Plan	Einheits-Sprungantwort	Blockschaltbild	Bode-Diagramm	Nyquist-Diagramm
P Proportional	K_S	keine 				
I Integral	$\frac{1}{s}$					
D Differential	s					
Tt Totzeit	$e^{-Tt \cdot s}$	nicht rational 				

Name / Typ	Übertragungsfunktion $G(s)$	Pol-/Nullstellen-Plan	Einheits-Sprungantwort	Blockschaltbild	Bode-Diagramm	Nyquist-Diagramm
PT1 Tiefpass	$\frac{K_S}{T_1 s + 1}$					
PTn n-te Ordnung	$\frac{K_S}{(T_m s + 1)^n}$					
PT2 periodisch	$\frac{K_S \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$					

Name / Typ	Übertragungsfunktion $G(s)$	Pol-/Nullstellen-Plan	Einheits-Sprungantwort	Blockschaltbild	Bode-Diagramm	Nyquist-Diagramm
PI	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s}\right) = K_p \frac{T_n s + 1}{T_n s}$					
PD ideal	$K_p(1 + T_v s)$					
PD-T1 real	$K_p \frac{T_v s + 1}{T_f s + 1}$					
PID ideal	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right)$					
PID-T1 real	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_n s} + \frac{T_v s}{T_f s + 1}\right)$					

Name / Typ	Übertragungsfunktion $G(s)$	Pol-/Nullstellen-Plan	Einheits-Sprungantwort	Blockschaltbild	Bode-Diagramm	Nyquist-Diagramm
Lead	$\frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$ $T_2 > T_1 \text{ \& } \omega_2 < \omega_1$					
Lag	$\frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$ $T_2 < T_1 \text{ \& } \omega_2 > \omega_1$					
DT1 Hochpass	$\frac{T_1 s}{T_1 s + 1}$					
IT1	$\frac{1}{s(T_1 s + 1)}$					
Notch Bandstopp	$\frac{s^2 + 2Dg_0\omega_f s + \omega_f^2}{s^2 + 2D\omega_f s + \omega_f^2}$					