Vektorräume

realer Vektorraum Menge V von Vektoren

$\mathbb{Z}^2 \Rightarrow$ kein Vektorraum
$\mathbb{R}^n \Rightarrow$ Vektorraum
$\mathbb{P}_n \Rightarrow$ Vektorraum
$\mathbb{R}[x] \Rightarrow$ Vektorraum

Unterräume $V \Rightarrow$ Vektorraum
U ist Teilmenge von V

$\vec{a}$ & $\vec{b}$ in U, $\vec{a}+\vec{b}$ in U
$\vec{a} \in U$, $\lambda\vec{a}$ in U

MUSS: Ursprung enthalten
Null Vektor enthalten

Lösungsmenge V Kriterien überprüfen S. 10

$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

Bsp. homogen

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Bsp. keine Lösung nicht homogen

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 2x_1 + 4x_3 = 7 \right\}$$

$\cap$ = Durchschnitt | $\cup$ = Vereinigung

Lineare Hülle als Unterraum
Menge von Linearkombination

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n, \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

Bsp. Gerade, durch $\vec{0}$

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \lambda\vec{v} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Bsp. Ebene, $\vec{v}$ & $\vec{w}$ windschief

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}, \vec{w}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Lineare Abhängigkeit Bei Matrizen S. 10

$\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ linear abhängig, ausser wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0 \Rightarrow$ unabhängig

$a_1 = a_2 + a_3 \Rightarrow$ linear abhängig

Basis $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ wenn:
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig
- $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$ für Anzahl S. 10

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind Basisvektoren
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis

Bsp. Basis $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ kartesisch

Bsp. $p(x) = 1$, $p_1(x) = 1+x, \dots, p_n(x) = (1+x)^n$
Basis für $\mathbb{P}_n$

Kleinste Basis 1 Element $B = (\vec{v}_i)$

Dimension $\dim\{V\}$

$B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ $\cup$ linear unabhängig
$r+1$ $\cup$ linear abhängig

Je zwei Basen von einem Vektorraum V haben gleich viele Elemente.

$\dim\{\mathbb{R}^n\} = n$
$\dim\{\mathbb{R}^{m \times n}\} = m \cdot n$
$\dim\{0\} = 0$
$\dim\{\mathbb{P}_n\} = n+1$
$\dim\{U\}$ = Anzahl führende 1 in $(A|\vec{0})$ ZSF – Rang Matrix

Koordinatenvektor

V reeler Vektorraum
$B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$
$\vec{v}_i$ Vektor aus V
$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$
Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n \Rightarrow v_B$ bezüglich B

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ Koordinatenvektor $\vec{v}$ bezüglich B

Bsp. $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{v}$

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -4$
$\lambda_2 = 1$ $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen

$f: D \Rightarrow W$
$x \mapsto y = f(x)$

D = Definitionsbereich
W = Wertebereich (Abbildung)

Bsp. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$
$\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

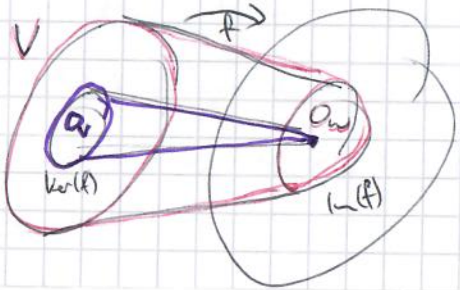
$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x^2 \\ -z \\ 3+y \\ z-xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Darstellungsmatrix
ist aus Koordinatenvektoren

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$= \begin{pmatrix} x + 4y \\ -2y \end{pmatrix}$ $f: A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Kern & Bild $f: V \to W$

(Kern) $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0} \in W\}$
(Bild) $\operatorname{Im}(f) = \{f \in W \mid x \in V\}$



Arbeit / Weg dahin

1.) Darstellungsmatrix A bestimmen
2.) $A\vec{x} = \vec{0}$ berechnen
3.) Ker(f) & Im(f) bestimmen

$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow \text{Lösungsmenge } A\vec{x} \overset{!}{=} \vec{0} \\ \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \text{Anzahl freie Variablen} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rang}(A) = \text{Anzahl führende 1} \\ (A \mid \vec{x}) \text{ Gauss} \Rightarrow \text{Auswahl wichtige} \\ \text{Spalten, diese sind } (\operatorname{Im}(f)) \end{array} \right.$

$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$

$f: V \to W$ & $g: W \to Z$

$A \in \mathbb{R}^{r \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$

Bsp. $f: \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2x \end{pmatrix}$ $g: \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

hinten anfangen ausführen (Komposition)

$g \circ f = BA \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$= \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14x - 2y \\ 2x \end{pmatrix}$

Bsp. $f: \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $g: x - y$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

$g \circ f = BA \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$= 2x - 3y$

$\dim(V) = \dim(W) = n$
$f: V \to W$ $A^{n \times n}$

bijektiv wenn:
- $\operatorname{Ker}(f) = \{0_V\}$ & $\operatorname{Im}(f) = W$
- $\operatorname{rang}(A) = n$
- A invertierbar ist
- $\det(A) \neq 0$

Umkehrabbildung $f^{-1}: W \to V$
mit Darstellungsmatrix A^{-1}

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y \\ -x + \frac{1}{2} y \end{pmatrix}$

Repetition Inverse

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Projektionen

Ortogonalprojektion (n×n)

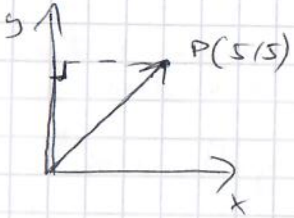
⇒ nicht bijektiv

b auf a projizieren

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\vec{a}^T$$

Bsp.

P(5,5) auf y-Achse



$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{P_1 = (0,5)}$$

Bsp.

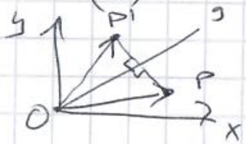
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_a = \frac{-3+8-10}{3^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{-5}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Spiegelung (n×n) ⇒ bijektiv

$g: ax + by = 0 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{OP}' = A_P \cdot \vec{OP}$



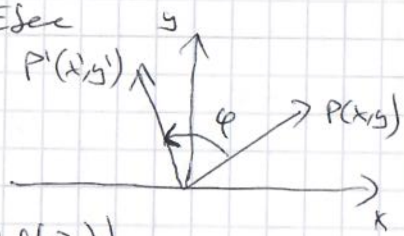
$A_P = \frac{1}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\vec{n}^T$

Bsp. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2} \quad \vec{OP}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Drehung Ebene

mit Drehmatrix



$$A_\varphi = \left(f(\vec{e}_x)\ f(\vec{e}_y) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

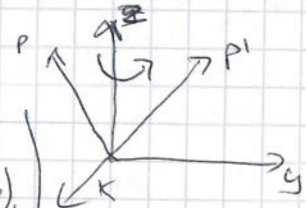
Bsp. $P(3,2) \quad \varphi = 30°$

$$A_{30°} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}' = A_{30}\cdot\vec{OP} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$\underline{P'(1.6, 3.2)}$

Drehung Raum



x-Achse

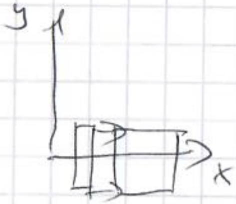
$$A_{x\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

y-Achse $\quad A_{y\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

z-Achse $\quad A_{z\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Weitere Transformation

Streckung mit Faktor k längs an Achse



x-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

zentrische Streckung

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Scherung mit Faktor k, längs einer Achse

x-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an der xy-Ebene $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_n)$

Koordinatenvektor
$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$

Koordinatenvektor bezüglich B
$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Koordinatenvektor bezüglich C
$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_n \end{pmatrix}$ $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_n)$

$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_n \vec{b}_n = \mu_1 \vec{c}_1 + \mu_n \vec{c}_n$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_n \end{pmatrix}$

Basistransformationsmatrix $P_{B \to C}$
$(\vec{c}_1\ \vec{c}_2 \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2) \Leftrightarrow (I_2 \mid P_{B \to C})$

Bsp. $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right)$

$\vec{v}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{P_{B \to C}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Bsp.

$b_1 = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} \\ -3a_{11} - 4a_{21} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

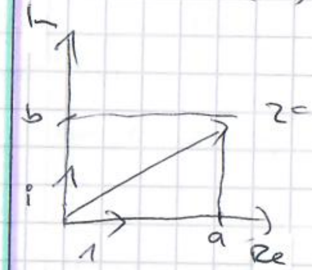
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ $\sqrt{-12} = \sqrt{12}\, i$

$i = \sqrt{-1}$ / $i^2 = -1$ imaginäre Einheit

$z = a + bi$ komplexe Zahl

$a = Re(z)$ Realteil

$b = Im(z)$ Imaginärteil



$|z| = |a + bi|$
$= \sqrt{a^2 + b^2}$
positiv & in $\mathbb{R}$

Addition in $\mathbb{C}$

$z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Bsp. $z = (2 - i) + (-1 + \frac{3}{2}i) = (2 - 1) + (-1 + \frac{3}{2})i$
$= \underline{1 + \frac{1}{2}i}$

Subtraktion in $\mathbb{C}$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Bsp. $z_1 = 2 - i$; $z_2 = -1 + \frac{3}{2}i$

$z = (2 - i) - (-1 + \frac{3}{2}i)$
$= (2 - (-1)) + (-1 - \frac{3}{2})i = \underline{3 - \frac{5}{2}i}$

Multiplikation in $\mathbb{C}$ $i^2 = -1$!

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Bsp. $z_1 = 3 + i$; $z_2 = 1 + 2i$

$z = (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 + 1 \cdot 1)i$
$= 1 + 7i$

Inverse in $\mathbb{C}^*$ (ohne Null)

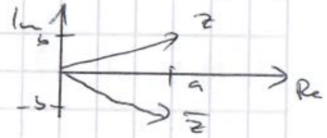
$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot (a - bi)$

Bsp. $z = 3 - 7i$

$z^{-1} = \frac{1}{3^2 + (7)^2} \cdot (3 - (-7i))$
$= \frac{1}{58} (3 + 7i) = \underline{\frac{3}{58} + \frac{7}{58}i}$

Konjugiert komplexe Zahl

$\bar{z} = a - bi$



Bsp. $z = 5 + 3i$
$\underline{\bar{z} = 5 - 3i}$

Division in $\mathbb{C}$

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \bar{z}_2$

Bsp. $\frac{4 + i}{4 - 3i} = \frac{1}{|4 - 3i|^2} (4 + i)(4 + 3i)$
$= \underline{\frac{1}{25} (13 + 16i)}$

Polar koordinaten

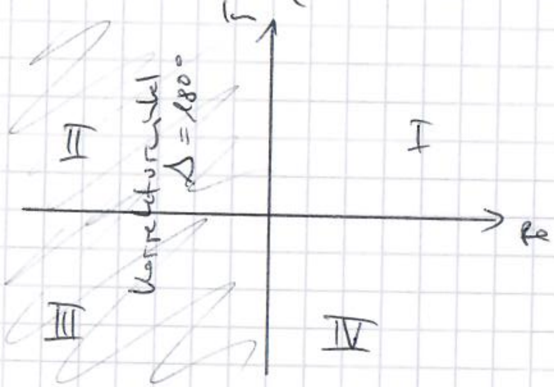
$z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)$

$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos(\varphi)$

$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin(\varphi)$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Hauptargument $\varphi \in [0°, 360°]$

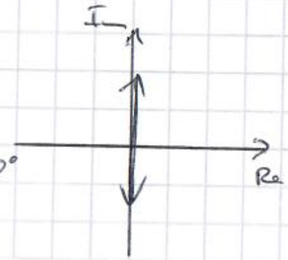


Korrekturwinkel bei: negativem a

Bsp. $z = -1 - 2i$
$\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{-1}\right) + \Delta$
$= 63.43° + 180° = 243.43°$

wenn $a = 0$

- b positiv => 90°
- b negativ => 270°



Polar - konjugiert komplexe Zahl

$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)i)$
$= r(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i)$

$i \rightarrow -i$

Polar - Addition & Subtraktion

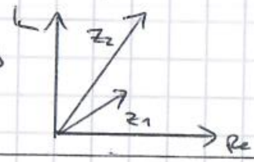
am besten in kartesische Form

$z_1 \mp z_2 = r_1(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \pm$ same z_2
$= r_1\cos(\varphi_1) \pm r_2\cos(\varphi_2) + (r_1\sin(\varphi_1) \pm r_2\sin(\varphi_2))i$

Polar - Multiplikation

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)i)$

Drehstreckung



Polar - Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)i)$

Potenzen imaginäre Einheit

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	"
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	wiederholend
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	"
$i^5 = i$	$i^9 = i$	"

Eulersche Form

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$

$z = i\varphi$, für $\varphi = \pi$ $e^{i\pi} = -1$

$z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = re^{i\varphi}$

Bsp. $z = 3(\cos(45°) + \sin(45°)i)$
$z = 3e^{i45°}$
$z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Eulersche Form - Rechenoperationen

Addition & Subtraktion
=> in kartesische Form umrechnen

Multiplikation
$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

konjugiert komplexe Zahl

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$

$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2i}$

Besondere Werte für Sinus, Kosinus und Tangente:

α	sin	cos	tan
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

α	sin	cos	tan
$90°$	1	0	—
$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	sin	cos	tan
$180°$	0	-1	0
$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

α	sin	cos	tan
$270°$	-1	0	—
$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

⇒ Betrag immer 1

Wurzeln von komplexen Zahlen

Satz de Moivre

$\Rightarrow$ Potenzen mit komplexen Zahlen

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) i\right)$$

Bsp. $z = 1 - i \qquad z^4 = ?$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45^\circ$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{-i45^\circ}$$

$$z^4 = (\sqrt{2})^4 e^{-i\, 4 \cdot 45^\circ} = 4 e^{-i180^\circ}$$
$$= 4\left(\cos(-180^\circ) + \sin(-180^\circ) i\right)$$
$$= 4(-1 + 0i) = \underline{4}$$

Wurzeln

- höchstens n-reelle Lösungen
- verschiedene reelle Wurzeln, doppelte Wurzeln oder konjugierte Wurzeln

mit Polynomdivision & Mitternachtsformel berechnen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante Wurzeln

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$: verschiedene Wurzeln

$D = 0$: doppelte Wurzeln

$D < 0$: konjugierte Wurzeln

Bsp. $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

$z_1 = 1$ (durch probieren)

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 : (z-1) = z^2 + 4$$
$$\underline{-(z^3 - z^2)}$$
$$0 + 4z - 4$$
$$\underline{-(4z - 4)}$$
$$0$$

$$z^4 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4$$
$$z_2 = -2i$$
$$z_3 = 2i$$

$$\Rightarrow \underline{(z-1)(z+2i)(z-2i)}$$

n-te Wurzel aus a

$$z^n = a \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{a}$$

$$r^n e^{in\varphi} = a_0 e^{i(\alpha + k \cdot 360^\circ)}$$

$$\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

$$z_k = r e^{i\varphi_k} = r\left(\cos(\varphi_k) + \sin(\varphi_k) i\right)$$

$$r = \sqrt[n]{a_0} \qquad \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

Bsp. $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}\, i$

$$a_0 = 8\sqrt{1+3} = 16$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{8} + 0^\circ\right) = 60^\circ$$

$$z^4 = 16 e^{i60^\circ}$$

$$r = \sqrt[4]{16} = 2$$

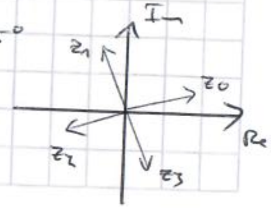
$$\varphi_k = \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} = 15^\circ + k \cdot 90^\circ$$

$k = 0$: $z_0 = 2 \cdot e^{i15^\circ}$

$k = 1$: $z_1 = 2 \cdot e^{i105^\circ}$

$k = 2$: $z_2 = 2 \cdot e^{i195^\circ}$

$k = 3$: $z_3 = 2 \cdot e^{i285^\circ}$



Eigenwerte & Eigenvektoren

Beispiel eines Bildes

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{OP}' = f(\vec{OP})$

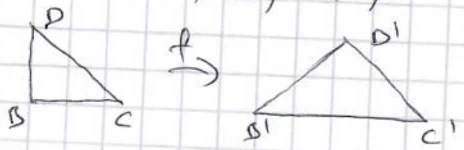
$= A\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dreieck BCD $B(1,-1), C(5,-1) D(1,3)$

$\vec{OB}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{OC}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{OD}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

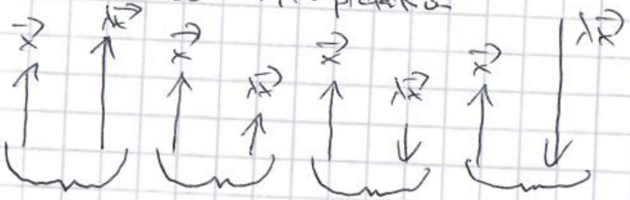


Eigenwert

Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert
$\vec{x}$ ist Eigenvektor

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ohne Nullvektor

Geometrische Interpretation



$\lambda \geq 1 \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad -1 \leq \lambda \leq 0 \quad \lambda \leq -1$

Eigenraum

$f: V \to V$

$V_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} \subseteq V$

- Eigenraum ist Unterraum von V
- Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

Beweis Unterraum

$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$= \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x}+\vec{y})$

λ_1 & λ_2 verschieden $\Rightarrow \vec{x_1}$ & $\vec{x_2}$ lin. unabh.

$\vec{x_1}$ & $\vec{x_2}$ linear abhängig $\Rightarrow \lambda_1$ & λ_2 gleich

Berechnen

$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ Charakteristische Matrix von A

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ Polynom
$\Rightarrow$ Lösungen sind Eigenwerte

mit $\lambda_1 ,.. \lambda_n$ die Eigenräume finden

$(A - \lambda_{1,\dots,n} \mid 0)$ & Gaussverfahren

Resultat $\Rightarrow V_{\lambda_1} = \text{Lin}(\vec{v_1})$

Beispiel

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = (\lambda-4)(\lambda+1)$

$\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -1$

mit λ_1

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$y = \alpha, \ x = y = \alpha \Big\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_1} = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ dasselbe mit λ_2 machen

Weitere Berechnungen

$\gamma = \dim(V_\lambda)$ geometrische Vielfachheit

$\mu =$ Anzahl Nullstellen algebraische Vielfachheit

$1 \leq \gamma \leq \mu$! $\quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_n = n$

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n\}$ Spektrum

$\Rightarrow$ alle λ von einem Eigenwert

$\rho(A) =$ grösster Betrag von $\sigma(A)$

$\Rightarrow$ grösster Eigenwert als Betrag

Anwendungen Eigen...

Spur & Determinante

$\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
$= \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \dots + \mu_k\lambda_k$

$k \Rightarrow 1 \leq k \leq n$

$\mathrm{Det}(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \dots \cdot \lambda_k^{\mu_k}$

für $n \times n$ Matrizen gilt:

1. λ von A mit $\vec{x}$
   λ^k von A^k mit $\vec{x}$
2. A ist invertierbar, wenn alle Eigenwerte $\neq 0$.
3. A invertierbar, dann
   λ zu A
   $\frac{1}{\lambda}$ zu A^{-1}

Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Eigenwerte sind Elemente der Hauptdiagonalen.

1. Alle Eigenwerte sind reell
2. für jeden Eigenwert: $\gamma\lambda = \mu\lambda$
3. Eigenwerte orthogonal
   $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{\lambda_1} \\ y_{\lambda_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\lambda_2} \\ y_{\lambda_2} \end{pmatrix} = 0$

Ähnlichkeit

$$\left.\begin{array}{l} P^{-1}AP = B \\ A = PBP^{-1} \end{array}\right\} AP = PB$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ -4a-2c & -4b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 4a-2b \\ 2c & 4c-2d \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} 2b = 4a - 2b \\ -4a - 2d = 2c \\ -4b - 2d = 4c - 2d \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = -c \\ b = -c \\ c, d \text{ beliebig} \end{array} \right.$$

Verfahren

1. $\det(A) = \det(B)$? Nein
2. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ Nein
3. P finden $\Rightarrow AP = PB$ Nein
   $\Rightarrow$ wenn ja, dann ähnlich

Diagonalisierbar $AP = PD$

A ist diagonalisierbar EINE erfüllt

1. A hat n linear unabhängige $\vec{x}$
2. A hat n verschiedene λ $(\mu = \gamma = 1)$
3. es gilt $\gamma\lambda = \mu\lambda$ / $\mu_1 = \gamma_1$ & $\mu_2 = \gamma_2$
4. A ist reell & symmetrisch

Nicht diagonalisierbar müssen alle 1–4 falsch sein!

Potenzen

$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$

$A^k = PD^kP^{-1}$

Lineare Differenzialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

$y(t) = ce^{at}$

$y'(t) = cae^{at}$

$D = P^{-1}AP$ $\qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{pmatrix}$

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$

$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$

$\vec{y}(0) = c_1\vec{v}_1 + c_n\vec{v}_n$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$

$P\vec{c} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\quad y_1(0) = 1 / y_2(0) = 5$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ $\quad c_1 = 1 / c_2 = 4$

$y(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4e^{3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_1(t) = -e^{3t} + 2e^{3t}$

$y_2(t) = e^{-3t} + 4e^{3t}$

Unterraumkriterium überprüfen

Bsp 1

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$2a_1 + 3a_2 + a_3 = 0$$
$$2b_1 + 3b_2 + b_3 = 0 \quad \text{für } a+b$$

$$\Rightarrow \; = 2(a_1+b_1) + 3(a_2+b_2) + (a_3+b_3)$$
$$= 2a_1 + 3a_2 + a_3 + 2b_1 + 3b_2 + b_3 = 0 + 0$$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$ ✓

$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} : 2(\lambda a_1) + 3(\lambda a_2) + \lambda a_3$$
$$= \lambda(2a_1 + 3a_2 + a_3) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \lambda\vec{a} \in U$ ✓ Bedingungen erfüllt

Bsp 2 $U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x = 2y \right\}$

$x_1 = 2y_1 \;/\; x_2 = 2y_2$

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} : 2y_1 + 2y_2$$

$\Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U$ ✓

$x = 2y \;/\; \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$:

$$\lambda x = \lambda 2y = 2 \cdot \lambda y$$

$\lambda\vec{x} \in U$ ✓ Bedingungen erfüllt

Lineare Abhängigkeit Matrizen

Bsp 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \ldots \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ linear unabhängig ✓

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

Bsp 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_1 = -2\lambda_2$
$2\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$
$3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_2 = -\lambda_3$
$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow$ linear abhängig

Basen mit Matrizen

Bsp 1 $4(A_1, A_2, A_3, A_4)$

Basis von $\mathbb{R}^{2\times 3}$?
$\Rightarrow$ Nein, da 6 Matrizen nötig

Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$?
$\Rightarrow$ Ja, wenn unabhängige Matrizen