

MESY 3 – Frederic Strickler

1. Kinetik

Ort	x	φ	Winkel
Geschwindigkeit	v	ω	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	a	$\dot{\omega}$	Winkelbeschleunigung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

1.1. Numerisch «Ableiten»

Nur in seltenen Fällen liegen Ortsfunktionen als analytische Funktionen vor, und abgeleitete Grössen müssen numerisch gewonnen werden.

$$v_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}$$

$$a_k = \frac{\frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta t} - \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x_k - 2 * x_{k-1} + x_{k+2}}{(\Delta t)^2}$$

1.1.1. Messfehler:

Dies kann bei Ableitungen zu starken Fehlern wegen Messrauschen führen.

$$v_k = \frac{x_k - (x_{k-1} + \Delta 1)}{t_k - t_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta 1}{\Delta t}$$

2. Koordinatensysteme

2.1. Kartesische Koordinaten → Rechtssystem

$$r(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$v(t) = \dot{r} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$a(t) = \dot{v} = \ddot{r} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

2.2. Zylinder Koordinaten

$$x = r * \cos(\varphi)$$

$$y = r * \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

$$\varphi = \text{atan}(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r = r * e_r + z * e_z$$

$$s = \frac{1}{2} * a * t^2, a * t = v$$

$$\text{Winkel} = \text{atan}\left(\frac{\text{Seitung in \%}}{100}\right)$$

2.2.1. Ableitungen

$$\dot{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e_\varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ -\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = -e_r \dot{\varphi}$$

$$\dot{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \dot{r} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r + \dot{z}e_z = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}e_z$$

$$a = \dot{v} = \ddot{r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi + \ddot{z}e_z$$

2.3. Funktionaldeterminante

Berechnet sich aus der Determinante der Jacobimatrix

$$J = \frac{\partial X}{\partial R} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z \end{pmatrix} \quad \& \quad R = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Jakobi von Zylinderkoordinaten:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminante von Zylinderkoordinaten:

$$|J| = r$$

2.4. Kugelkoordinaten

$$x = r\cos(\varphi)\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$$

$$z = r\sin(\theta)$$

Jakobi von Kugelkoordinaten:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminante von Kugelkoordinaten:

$$\det(J) = r^2 \cos(\theta)$$

3. Newtonsche Mechanik

$$p = m * v$$

Erstes Newton'sches Gesetz

Wirkt keine Kraft auf eine Masse, so bewegt sie sich mit der momentanen Geschwindigkeit auf einer Geraden weiter bzw. verharrt an der Stelle, falls sie in Ruhe war.

Zweites Newton'sches Gesetz

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der Kraft die auf den Massenpunkt wirkt.

$$F = \frac{d}{dt} p$$

Mit konstanter Masse:

$$F = m * a$$

In einem abgeschlossenen System (von aussen wirken keine Kräfte):

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} (m * v) = mv + m\dot{v} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow m\dot{v} = -m\dot{v} \quad -m\dot{v} = S = \text{Schub}$$

Drittes Newton'sches Gesetz

Zu jeder Kraft gibt es eine Gegenkraft, die genau entgegengesetzt und gleich gross ist.

actio = reactio

3.1.1. Raketenstart

μ = Massenausstoss, w = Geschwindigkeit

$$m(t) * a(t) = -m(t)g + \mu * w$$

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

$$v(t) = -gt + w * \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$$

4. Rotationsbewegung

4.1. Drallsatz

$$\theta \ddot{\varphi} = M$$

Beschreibt die Bewegung eines starren Körpers aufgrund eines Drehmoments, welches auf den Körper wirkt

Massen Trägheitsmoment: $\theta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$

Mit m = Massenmittelpunkt und r = senkrechte Abstand zur Drehachse

$$[\theta] = kg * m^2$$

Verallgemeinert:

$$\theta = \int_V \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 dV$$

Trägheitsradius: $r_{\theta} = \sqrt{\theta/m}$

4.1.1. Satz von Steiner

$$\bar{\theta} = \theta + mr^2$$

mit θ = Massenträgheitsmoment im Schwerpunktsystem

Grösse	Einheit	Grösse	Einheit
Masse m	kg	Trägheitsmoment θ	kg m ²
Kraft F	N	Moment M	Nm
Weg x	m	Winkel φ	rad
Geschwindigkeit v, \dot{x}	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}, \omega$	rad/s
Beschleunigung a, \dot{v}, \ddot{x}	m/s ²	Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}, \dot{\omega}$	rad/s ²
$F = m \cdot a = m\ddot{x}$		$M = \theta \cdot \ddot{\varphi}$	
kin. Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Joule	kin. Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}\theta\omega^2$	Joule
Impuls $p = mv$	kg m/s	Drehimpuls $L = \theta\omega$	kg m ² /s

5. Getriebe

Getriebe sind mechanische Bewegungswandler. Die Getriebeübersetzung bringt Drehzahlen, Geschwindigkeiten, Positionen, Kräfte und Momente von An- und Abtriebsseite in Beziehung zueinander. Bei dynamischen Anwendungen müssen für die

Motorauslegung die Lastträgheiten berücksichtigt werden!

$$i = \frac{n_{Motor}}{n_{Last}}$$

In den meisten Fällen wird die Drehzahl vom Motor ausgehend verlangsamt und es ist $i > 1$. Wenn wir Verluste vernachlässigen, werden Drehmomente selbstverständlich entsprechend übersetzt:

$$M_{Last} = M_{Motor} * i$$

5.1. Ersatzträgheit bei rotatorischem Getriebe

$$\theta_M \dot{\omega}_M = M_{Antrieb} - M_Z$$

ω = Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

M_Z = Drehmoment über Zahnrad

$$\text{Lastseite: } \theta_L * \dot{\omega}_L = M_Z * i \quad \omega_L = \frac{\omega_M}{i}$$

$$M_Z = \frac{\theta_L * \dot{\omega}_M}{i^2}$$

$$M_{Antrieb} = \dot{\omega}_M * \left(\theta_M + \frac{\theta_L}{i^2}\right) = \dot{\omega}_L * i * \left(\theta_M i + \frac{\theta_L}{i}\right)$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{\theta_L}{\theta_M}}$$

5.2. Ersatzträgheit bei Seilantrieb

$$F_{Seil} = \frac{i}{R} * M_{Motor}$$

$$\theta_{Ges} = \theta_{Last} + mR^2$$

$$\theta_{Ges}^{Mot} = \theta_{Mot} + \frac{\theta_{Ges}^{Last}}{i^2}$$

5.3. Ersatzträgheit beim Spindelantrieb

$$F = \frac{M_{mot} * i * 2\pi}{h}$$

$$x = \frac{\varphi * h}{2\pi * i} \quad v = \frac{\omega * h}{2\pi * i}$$

$$\theta_{Ersatz} = \frac{mh^2}{4\pi^2 * i^2}$$

6. Energie

Das Potential einer Masse m auf der Erde ist gegeben

$$\text{durch: } \phi(R) = -\frac{M_E \cdot G \cdot m}{r} = E_{\text{pot}}/E_{\text{kin}}$$

Erdradius: $r=6.366\text{E}6$

Erdmasse: $m=5.97\text{E}24$ kg

Gravitationskonstante: $G=6.67\text{E}-11$

$$1\text{J} = 1\text{Nm} = 1\text{Ws} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

6.1. Leistung

Arbeit pro Zeit

Mechanisch: $P = F \cdot v$

$$P = M \cdot \omega \quad (\text{Rotatorisch})$$

Elektrisch: $P = U \cdot I$

$$\begin{aligned} E_{\text{Kin}} &= \int_0^t P \cdot dt = \int_0^t M\omega(t) \cdot dt = \int_0^t \theta \frac{d\omega}{dt} \omega \cdot dt \\ &= \int_0^t \theta \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} \theta \omega_0^2 \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot C_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

7. Stossprozesse

Erhaltungsgrößen: Impuls (+Drehimpuls)

$$p = m \cdot v$$

$$L = \theta \cdot \omega$$

Stosszahl e :

$e=1 \rightarrow$ elastischer Stoss

$0 < e < 1 \rightarrow$ teilelastischer Stoss

$e=0 \rightarrow$ inelastischer Stoss

$$e = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{v_1 - v_2} \quad \bar{v} = \text{nach dem Stoss}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 \quad (\text{Impulserhaltung})$$

$$\bar{v}_1 = -e \cdot (v_1 - v_2) + \bar{v}_2$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + (v_1 - v_2)$$

$$\bar{v}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2 e (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Anteil an Energie, der beim Stoss durch Reibung verlorenggeht:

$$\Delta E = \frac{1-e^2}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2$$

7.1. Spezialfälle

1. $e = 1, m_1 = m_2 = m, v_2 = 0$

$$\bar{v}_1 = 0$$

$$\bar{v}_2 = v_1$$

2. $e = 1, m_1 > m_2, m_1 = (1 + \alpha)m_2, v_2 = 0$

$$\bar{v}_1 = \frac{\alpha}{2 + \alpha} v_1 > 0$$

$$\bar{v}_2 = \frac{2 + 2\alpha}{2 + \alpha} v_1 > 0$$

3. $m = \infty, v_2 = 0$

Schubmodul Stahl:

$$G_{\text{Stahl}} = 80\text{GPa}$$

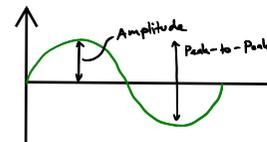
Schwingungsdauer Fadenpendel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Statische Federkraft

$$F = -c \cdot \Delta x$$

$$[N] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right]$$



Energieinhalt einer Spiralfeder:

$$E = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varphi^2$$

8. Schwingungslehre

Eigenfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)}$, $\omega = \dot{\varphi}$

8.1. Harmonischer Oszillator

DGL: $m\ddot{x} = -cx(t)$

Lösungsansatz: $A * \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} * t + \varphi\right)$, $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)}$

Anfangsbedingungen: $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

$\varphi = \arctan\left(\omega_0 \frac{x_0}{v_0}\right)$

$A = \frac{x_0}{\sin(\varphi)} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}$

8.1.1. gedämpfte Harmonische Oszillator

DGL: $m\ddot{x} = -d\dot{x} - cx(t)$

Lösungsansatz: $A * e^{-D\omega_0 t} * \sin(\omega_e * t + \varphi)$

$D = \frac{d\omega_0}{2c}$, $\omega_e = \omega_0 * \sqrt{1 - D^2}$

Anfangsbedingungen: $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

$\varphi = -2 \arctan\left(\frac{v_0 + D\omega_0 x_0 - \sqrt{v_0^2 + 2Dv_0\omega_0 x_0 + \omega_0^2 x_0^2}}{\omega_e x_0}\right)$

$A = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2Dv_0\omega_0 x_0 + \omega_0^2 x_0^2}}{\omega_e}$

Amplitude der 2. Schwingung:
 $A_n = A_0 e^{-D\omega_0 T}$
 mit $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_e}$

Spezialfälle:

$x_0 = 0, v_0 \neq 0: A = \frac{v_0}{\omega_0}$, $\varphi = 0$

$x_0 \neq 0, v_0 = 0: A = \frac{x_0}{\sqrt{1 - D^2}}$,
 $\varphi = 2 \arctan\left(\frac{1 - D}{\sqrt{1 - D^2}}\right)$

8.1.2. Federsteifigkeiten

Verkettung Parallel: $c^* = c_1 + c_2$

Verkettung Serie: $\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

DGL: $\theta\ddot{\varphi} = -c_{rot} * \varphi(t)$

Rotations Feder: $c_{rot} = \frac{G * I_p}{l}$

$c_{rot} = c_{trans} * l^2$

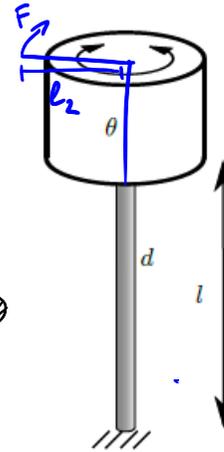
Polares Flächenmoment: $I_p = \frac{\pi r^4}{2}$

$\rightarrow c_{rot} = \frac{\pi * G * r^4}{2l} = \frac{\pi * G * d^4}{32l}$

Eigenfrequenzen: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{rot}}{\theta}} = \sqrt{\frac{\pi * G * d^4}{32 * l * \theta}}$

Einseitiger Federbalken: $c = \frac{F}{\omega_{max}} = \frac{3 * E * I}{l^3}$

Zweiseitig gelagerter Balken: $c = \frac{F}{\omega_{max}} = \frac{48 * E * I}{l^3}$



8.2. Freie und Erzwungene Schwingung

Freie Oszillation $a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x(t) = 0$

Erzwungene: $a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x(t) = f(t)$

8.2.1. Anregung durch Verschiebung

$m\ddot{x} = c(x(t) - u(t)) = -c * x(t) + c * u(t)$

Mit $c * u(t) = f(t)$

8.2.2. Anregung durch Unwucht

$\vec{a} = -r_u \omega^2 * \vec{e}_r$

$F_u = m * a = -m_u * r_u * \omega^2$

$F_{uy} = m * a_y = -m * r_u * \omega^2 * \sin(\varphi)$

Mit Beschleunigung:

$F_{uy} = -m r_u * (\dot{\omega} * \cos(\varphi) - \omega^2 * \sin(\varphi))$

8.2.3. Reibungsarten

Viskose Reibung:

mit Dämpfungsterm $d\dot{x}$ ist dieser linear (viskose Dämpfung)

Materialdämpfung & Stossdämpfer

Luftreibung (näherungsweise, wenn gut gelagert)

Trockene Reibung:

$m\ddot{x} = -cx(t) - F_r * \text{sign}(\dot{x})$ (Vorzeichenfunktion)

$F_r = -\mu * m * g$

$\left(x_0 - \frac{F_r}{c}\right) * \cos(\omega_0 t) + \frac{F_r}{c}$

Amplitude x Abnahme pro Schwingungsperiode:

$\Delta A = \frac{2F_r}{c}$

Halbperioden bis Schwingung zum Stehen:

$n_{\text{Halbperioden}} = \text{floor}\left(\frac{x_0 * c}{2F_r}\right)$

8.3. Frequenzbereich

$\text{Mag} = 10^{\frac{db}{20}}$

$dB = 20 \log(\text{Mag})$

$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx(t) = f(t)$

$x(t) = A e^{j(\omega * t + \phi)}$

$\dot{x}(t) = j\omega A e^{j(\omega * t + \phi)}$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A e^{j(\omega * t + \phi)}$

Definition des Frequenzganges eines LTI-Systems:

$G(j * \omega) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{-m * \omega^2 + D * j\omega + c}$
 $= \frac{1}{-m * \omega^2 + 2D\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$

Mit $D = \frac{d}{2 \cdot \sqrt{c \cdot m}}$ & $\omega_0 = \sqrt{c/m}$

$|G(j\omega)|$ *Anregung = Systemantwort

Die Systemantwort ist wiederum eine komplexe Schwingung gleicher Frequenz. Die Amplitude des Ausgangs ist A. Die Phase des Systemausgangs ist verschoben.

Amplitudenmaximum bei der Frequenz:

$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$

$A(\omega_{max}) = \frac{1}{2D \cdot c \cdot \sqrt{1 - D^2}}$

Amplitudenüberhöhung:

$v = \frac{A_{max}}{A(0)} = \frac{1}{2D \cdot \sqrt{1 - D^2}}$

Im Bereich der Eigenfrequenz kommt der Dämpfung also grosse Bedeutung zu

$dB_{\text{überhöhung}} = 20 \log\left(\frac{1}{2D}\right)$

8.3.1. Pol- & Nullstellen
Eingang Kraft, Ausgang Position

$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

$p_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2}$
 $= \omega_0 \cdot (-D \pm \sqrt{D^2 - 1})$

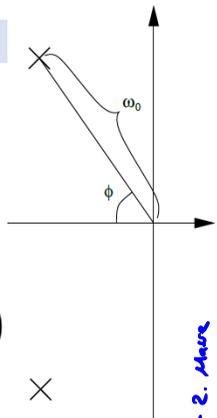
$\phi = \arccos(D)$

9. Zweimassensysteme: DGL

2 Massen: m_1, m_2 / 2 Federn: c_1, c_2

4 dynamische Grössen: $x_1, x_2, v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2$

0, 1 oder 2 Eingänge



$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 - c_2(x_1 - x_2) + f_1$

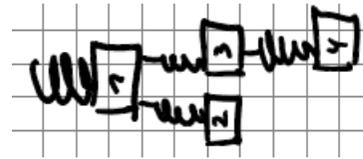
$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) + f_2$ (ohne Dämpfung)

In Matrizen-form: $M \ddot{\vec{x}} = -C \vec{x} + \vec{f}(t)$

mit $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Erweiterung auf 3, 4 Massen:

$M = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$



9.1. Vektorielle Form: Eigenwertgleichung

$M \ddot{\vec{x}} = -C \vec{x}$ homogen: $\vec{f}(t) = 0$

Lösungsansatz:

$\vec{x}(t) = \vec{q} * e^{j\omega t}$ mit q als konstanter Vektor

$\omega^2 * \vec{v} = M^{-1} * C^{-1} * q$ vgl.: $A \vec{v} = \lambda \vec{v}$

Matlab:

```
syms c1 c2 m1 m2 q
M = diag([m1 m2]);
C = [c1+c2 -c2; -c2 c2];
wsq = eig(inv(M)*C);
```

9.2. Zweimassensystem: Frequenzgang

DC-Wert ist: $G(0) = 1/c_1$

Die erste Frequenz mit grosser Überhöhung, Phasendrehung nach -180°

Tilgerfrequenz (Antiresonanz) -> Fast keine Auslenkung

$G_{12} = \frac{c_1 \cdot m_2 / m_1}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)) s^2 + c_1 c_2}$

9.3. Schwingungstilger

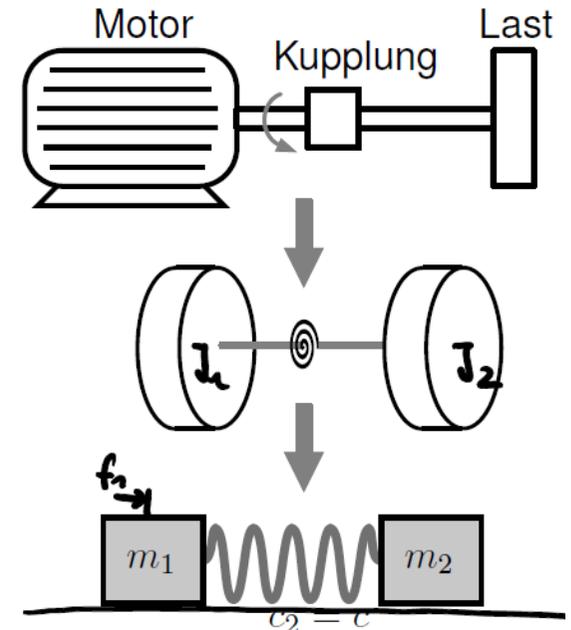
Bewegung der Masse 2 erzeugt stets genau die Gegenkraft über die Feder, die durch f_1 eingebracht wird (f_2 ; x_1 entsprechend).

Die ursprüngliche Resonanzüberhöhung wird aufgeteilt in 2 getrennte Resonanzen mit einer Antiresonanz dazwischen.

Wenn die Masse m_2 klein ist im Vergleich zu m_1 dann ist der Effekt gering. Dies führt zu einem kleinen Einfluss auf das Gesamtsystem.

Kraft m_n : $\omega_{\text{Tilger}} = \sqrt{c_2/m_2}$

10. Antriebssystem: DGL



Frei drehender Antrieb:

$m_1 \ddot{x}_1 = -c_2(x_1 - x_2) + f_1$

$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1)$

In Matrix-form: $M \ddot{\vec{x}} = -C \vec{x} + \vec{f}(t)$

$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_1 m_2 + c_2 m_1 \pm \sqrt{c_1^2 m_2^2 - 2c_1 c_2 m_1 m_2 + 2c_1 c_2 m_2^2 + c_2^2 m_1^2 + 2c_2^2 m_1 m_2 + c_2^2 m_2^2}}{2m_1 m_2}$

Mit: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$$

Eigenwertgleichung: $\omega_{1,2}^2 * \vec{q} = M^{-1}C\vec{q}$

C ist singular -> Ein Eigenwert = 0

1 Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zu EW=0
(Starkkörper form)

1 Eigenvektor $\begin{pmatrix} m_2/m_1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum EW $\omega^2 = \frac{c(m_1+m_2)}{m_1*m_2}$

Frequenzgang:

$$G_{11}(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2 * s^2 + c}{s^2 * (m_1 m_2 s^2 + c(m_1 + m_2))}$$

Eigenwerte von den entsprechenden Polstellen der Übertragungsfunktion:

$$G_{12}(s) = \frac{c}{s^2 * (m_1 m_2 s^2 + c(m_1 + m_2))}$$

Drehmoment -> Winkelgeschwindigkeit

(nur einfach integrierend)

$$G_{11}(\omega) = \frac{-J_2 * \omega^2 + c}{j\omega * (-J_1 J_2 \omega^2 + c(J_1 + J_2))}$$

$$G_{12}(\omega) = \frac{c}{j\omega * (-J_1 J_2 \omega^2 + c(J_1 + J_2))}$$

$$\omega_{Ares} = \sqrt{\frac{c}{J_2}}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 * J_2}}$$

10.1. Frequenzgänge des Antriebssystem

Betrachtung translatorisch x, v, m_1, m_2

Entsprechend rotatorisch: $\varphi, \dot{\varphi}, J_1, J_2$

10.1.1. Position

- Doppelter Integrator $\frac{1}{s^2} \rightarrow -40\text{db/dec}$ für kleine Frequenzen
- x_1 : Antiresonanz bei $\omega_{Ares} = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$
- Resonanz bei $\omega_{res} = \sqrt{\frac{c(m_1+m_2)}{m_1*m_2}}$
- Für grosse Frequenzen:

$$x_1: -\frac{40\text{dB}}{\text{dec}}, -180^\circ$$

$$x_2: -\frac{80\text{dB}}{\text{dec}}, -360^\circ$$

10.1.2. Geschwindigkeit

- Einfacher Integrator $\frac{1}{s} \rightarrow -20\text{db/dec}$ für kleine Frequenzen
- x_1 : Antiresonanz bei $\omega_{Ares} = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$
- Resonanz bei $\omega_{res} = \sqrt{\frac{c(m_1+m_2)}{m_1*m_2}}$
- Für grosse Frequenzen:

$$x_1: -\frac{20\text{dB}}{\text{dec}}, -90^\circ$$

$$x_2: -\frac{60\text{dB}}{\text{dec}}, -270^\circ$$

