

1. Deformation fester Körper

$$p = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}, \quad \text{Kompressibilität}$$

$$\sigma = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}, \quad \text{Zugspannung}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\tau = \frac{F_T}{A} = G \cdot \tan \alpha$$

1.1.1. Inkompressible Materialien

$$E = 3 \cdot G, \quad G: \text{Schubmodul}$$

1.1.2. Torsion

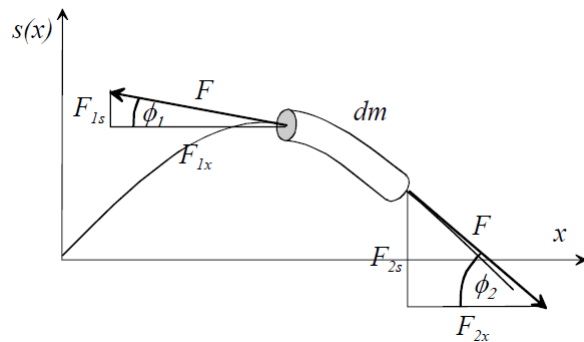
$$M = \frac{\pi r^4}{6h} \cdot E \cdot \beta$$

h : Länge

β : Torsionswinkel

2. Transversalwellen auf einer Saite

$$dm \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \rho A_{fil} \cdot dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_i F_{is}$$



$$\left[\frac{\delta s}{\delta x} \right]_1 = \frac{F_{1s}}{F_{1x}} = \frac{F_{1s}}{F \cdot \cos \phi_1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\left[\frac{\delta s}{\delta x} \right]_2 = \frac{F_{2s}}{F_{2x}} = \frac{F_{2s}}{F \cdot \cos \phi_2}$$

$$v = \frac{\omega}{2\pi}$$

2.1. Wellengleichung

$$\rightarrow dx = \delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\delta^2 s}{\delta x^2} = \frac{\rho A_{fil}}{F} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Mit:

$$\sigma = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$\frac{\delta^2 s}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

λ : Wellenlänge

v : Frequenz in Hz

c : Wellengeschwindigkeit

2.3. Stehende Wellen

Randbedingungen: (eingespannt bei $x = 0$ & $x = l$)

$$s(0, t) = s(l, t) = 0$$

Mögliche Wellenlängen:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mögliche Frequenzen:

$$v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2l} \cdot n$$

2.3.1. Wellenfunktion für stehende Wellen

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

2.2. Lösungsansätze

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot \sin(kx \mp \omega t) \text{ oder}$$

$$s(x, t) = \hat{s} \cdot \cos(kx \mp \omega t)$$

Einsetzen:

$$\frac{\delta^2}{dx^2} [\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)] = -\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

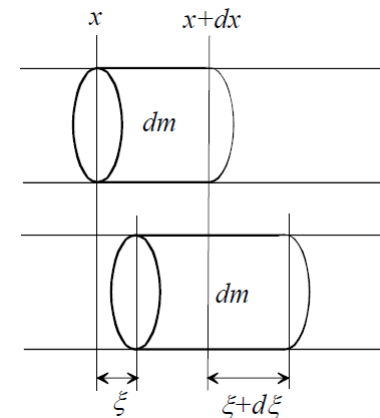
$$= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} [\hat{s} \cdot \cos(kx - \omega t)]$$

$$= -\frac{\hat{s} \cdot \omega^2}{c^2} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

2.2.1. Berechnung der Konstanten

$$c = \frac{\omega}{k} = v \cdot \lambda$$

3. Longitudinalwellen in Festkörpern



Longitudinalwellen Festkörper

3.1. Linear-elastische Beanspruchung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{d\xi}{dx}$$

3.1.1. Wellengleichung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\delta^2\xi}{\delta x^2}$$

Geschwindigkeit: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

4. Flüssigkeiten und Gase

$$p = \frac{\rho g V}{A} = \rho g h$$

4.1. In idealen Gasen

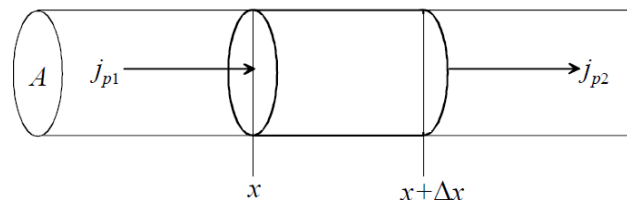
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot p$$

→ Integrieren: $p(z) = e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} z} \cdot e^c$

$$e^c = p_0 = p(0)$$

$$p(z) = p_0 \cdot e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} z}$$

4.2. Schallwellen



$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{L \cdot C^*} \cdot \frac{\delta^2v}{\delta x^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C^*}}$$

L^* : Induktive Grösse für Impuls

C^* : Masse pro Länge

In Flüssigkeiten:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}}$$

Gase:

$$c = \sqrt{\chi \frac{RT}{M}}$$

M : Molmasse

4.2.1. Dopplereffekt

$$v = v_0 \cdot \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q}$$

v_Q : Geschwindigkeit der Quelle

v_B : Geschwindigkeit Beobachter

v_0 : Quellenfrequenz

4.2.2. Schallpegel

J : Schallintensität

$$J = \frac{dP}{dA}$$

4.2.3. Punktförmige Quelle

$$J = \frac{J_{ref}}{r^2}$$

$$L = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{J}{J_0} \right), \quad L: \text{Schallpegel}$$

5. Elektromagnetische Wellen

5.1. Basics

$$\rho = \frac{dQ}{dV}, \quad \text{Ladungsdichte}$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r$$

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \quad \text{Stromdichte}$$

Energie in el. Feld:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Energie in magn. Feld:

$$P = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2$$

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

$$\text{div}(\vec{j}) = \nabla \cdot \vec{j} = \frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} + \frac{dj_z}{dz}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

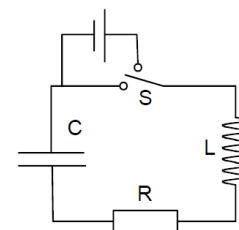
5.2. Induktion

$$U = E \cdot I$$

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \text{Magn. Fluss}$$

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \Phi_m$$

5.3. Schwingkreis



Induktion Spule

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 \cdot N^2 \cdot A_L}{l}$$

μ_r : Materialspezifisch
 μ_0 : magn. Permeabilität
 $\rightarrow = 1$ für Luft

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} - \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

5.3.1. Spezialfall R=0

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}$$

$$\rightarrow Q(t) = \hat{Q} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

5.3.2. Mit Dämpfung R>0

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2$$

5.3.3. Phasenlage & Impedanz

$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{u}_L - \hat{u}_C}{\hat{u}_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

6. Maxwell-Gleichungen

6.1. Faradaysches Induktionsgesetz

$$-\int_A \frac{\delta B}{\delta t} \cdot d\vec{A} = -A \cdot \frac{dB}{dt} = U_{ind}$$

→ B ist senkrecht & homogen auf A

6.2. Durchflutungssatz für Magnetfelder

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

6.3. Zeitliche Ableitung des E-Feldes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \mu_0 I$$

6.4. Rechenregeln

6.4.1. Divergenz

$$\text{div}(\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{u}$$

$$\text{div}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{div}(\vec{u}_1) + \text{div}(\vec{u}_2)$$

$$\text{div}(c\vec{u}) = c \cdot \text{div}(\vec{u})$$

$$\text{div}(f\vec{u}) = f \cdot \text{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \text{grad}(f)$$

6.4.2. Rotation

$$\text{rot}(\vec{u}) = \nabla \times \vec{u}$$

$$\text{rot}(c\vec{u}) = c \cdot \text{rot}(\vec{u})$$

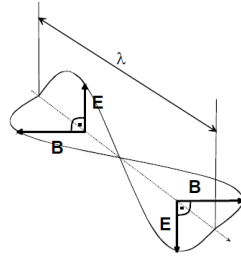
$$\text{rot}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{rot}(\vec{u}_1) + \text{rot}(\vec{u}_2)$$

$$\text{rot}(f\vec{u}) = f \cdot \text{rot}(\vec{u}) + \text{grad}(f) \times \vec{u}$$

6.4.3. Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

6.5. Skalarer, eindimensionaler Fall



$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$c = \lambda \nu$$

6.6. Lorentz-Transformation

$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = \gamma(z + v_z t)$$

$$\tilde{t} = \gamma \left(t - \left(\frac{v_z}{c^2} \right) \cdot z \right), \quad \text{Zeitdilatation}$$

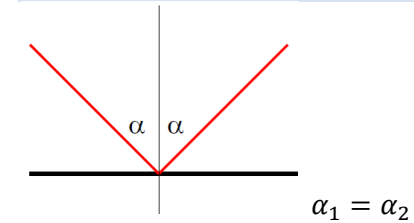
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c} \right)^2}}$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma}, \quad \text{Längenkontraktion}$$

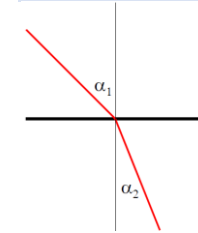
7. Wellen, Strahlen und Teilchen

7.1. Geometrische Optik

7.1.1. Reflexion



7.1.2. Refraktion



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{medium}}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha_1 \right)$$

Wellenlänge	434nm	486nm	589nm	656nm	768nm
Wasser	1.340	1.337	1.333	1.331	1.329
Quarzglas	1.467	1.463	1.458	1.456	1.4539
Diamant	2.417				
Glycerin	1.455				

Grenzwinkel für Totalreflexion:

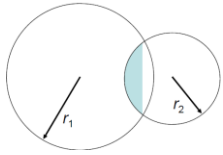
$$\alpha_1 = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

7.1.3. Dünne Linsen

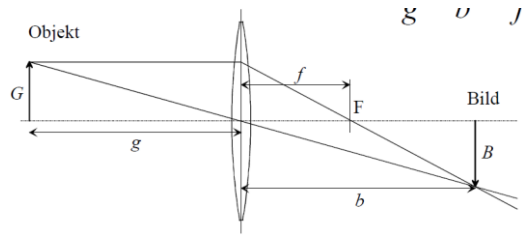
Brechkraft:

$$D = \frac{1}{f} \approx (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

in $[m^{-1} = \text{dpt} = \text{Dioptrie}]$



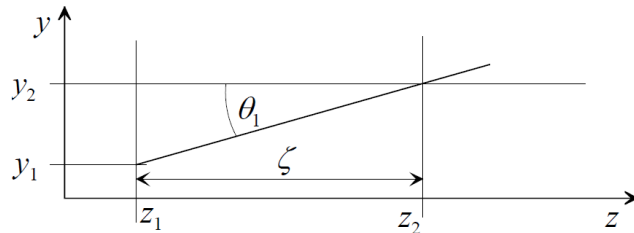
Brennweite:



$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \approx \frac{1}{f}$$

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

7.1.4. Para-axiale Optik



$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$

$$y_2 = y_1 + \zeta \theta_1$$

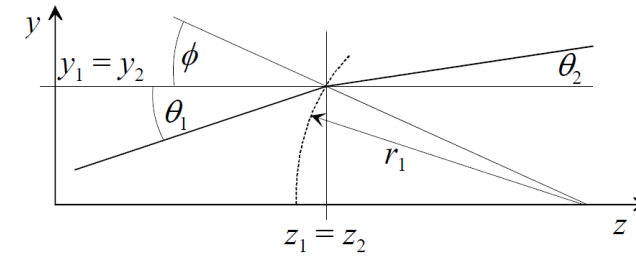
$$\theta_2 = \theta_1$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix}$$

T : Translationsmatrix

7.1.5. Brechung an gekrümmter Oberfläche



$$n_2 \theta_2 = n_1 \theta_1 - \frac{(n_2 - n_1) \cdot y_1}{r_1}$$

$$y_2 = y_1$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 - n_2 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix}$$

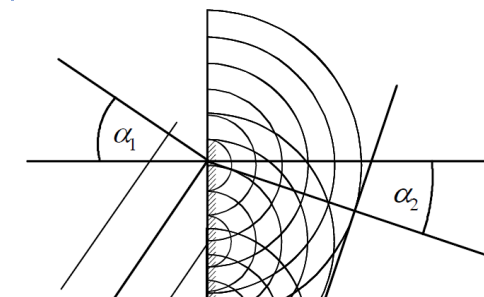
R : Brechungsmatrix

7.1.6. Kombiniert

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n\theta_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix} = RT \begin{pmatrix} y_1 \\ n\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\det(R) = \det(T) = \det(M) = 1$$

7.2. Wellenoptik



$$\lambda_2 = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n_2 \cdot \nu}$$

$$c_{\text{medium}} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n_2}$$

7.2.1. Beugung am Gitter

Bedingung für konstruktive Interferenz:

$$\sin \alpha_n = \frac{n\lambda}{d}$$

d : Gitterebenenabstand

n : Beugungsordnung

α : Beugungswinkel

7.2.2. Quantenmechanische Modelle

Energie eines Photons:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

h : Plancksches Wirkungsquantum

ν : Frequenz, ω : Kreisfrequenz

Impuls eines Photons

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

k : Wellenzahl

7.2.3. Wellenmech. Besch. des freien Teilchens

Energie des beschleunigten Elektrons:

$$E = eU = h\nu$$

$$\nu = \frac{eU}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

Impuls von Elektronen

Für $v \ll c$:

$$p = m_e \cdot v$$

$$eU = \frac{mv^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot eU}}$$

$$\lambda = d \cdot \frac{\sin \alpha_n}{n}$$

$$\alpha_n = \arcsin\left(\frac{nh}{d \cdot \sqrt{2m_e \cdot eU}}\right)$$

Axiome für eine Wellenmechanik

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{i\hbar}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

7.2.4. Tunneffekt und Unschärferelation

Schrödinger-Gleichung:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\psi] = (E_p - E) \cdot \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{2m(E_p - E)}{\hbar^2} \psi = \kappa \psi$$

Vorzeichen von κ :

Falls $E < E_p$:

$$\psi'' = -k^2 \psi$$

$$\psi(x) = \hat{\psi} \cdot \sin(kx + \varphi)$$

Falls $E > E_p$:

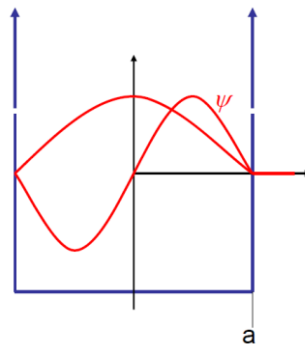
$$\psi'' = +k^2 \psi$$

$$\psi(x) = \hat{\psi} \cdot e^{kx}$$

→ k kann negativ oder positiv sein

→ Aufenthaltswahrscheinlichkeit nimmt exponentiell ab, wo die potentielle Energie grösser ist als die Teilchenenergie. Je grösser E_p , umso grösser k , umso schneller fällt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

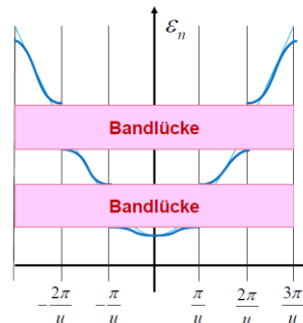
7.2.5. Potentialtopf



Zustände sind quantisiert!

$$\psi(x) = \hat{\psi} \cdot \sin(kx)$$

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{2a} = \frac{\pi \cdot n}{L}$$



$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$$

$$\varepsilon_{\text{gap}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{u}\right)^2$$

8. Kerne und Teilchen

8.1. Kernmodelle

8.1.1. Coulomb Energie

$$E_C = a_C \cdot Z^2 A^{\frac{1}{3}}$$

Z : Kernladungszahl

A : Nukleonenzahl

8.1.2. Oberflächenenergie

$$E_S = a_S A^{\frac{2}{3}}$$

8.1.3. Kondensationsenergie

$$E_V = a_V A$$

8.1.4. Energiebilanz

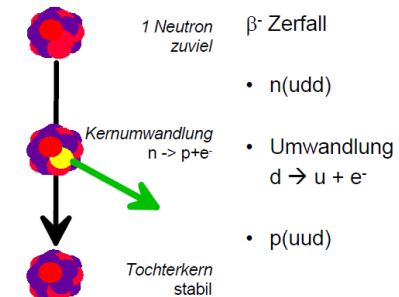
$$E_B = E_V - E_C - E_S$$

8.1.5. Kernradius

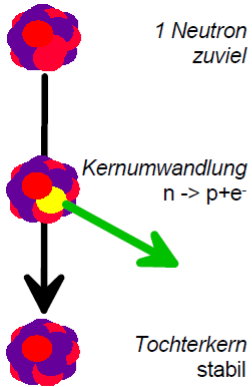
$$R = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

8.2. Radioaktiver Zerfall

8.2.1. β -Zerfall

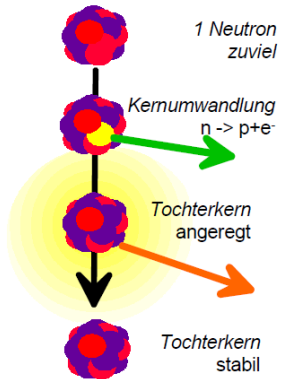


8.2.2. β^+ -Zerfall



- $p(uud)$
- Umwandlung $u \rightarrow d + e^+$
- $n(udd)$
- geht nur mit $E = mc^2!$
- Masse eines Positrons äquiv. zu 511 keV

8.2.3. γ -Zerfall



- Nach β -Zerfall angeregter Kern
- Energiefreisetzung bei Abregung
- Photon

8.2.4. Modellierung

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$A(t) = \dot{N} = -\lambda N(t)$$

$$\dot{A} = -\lambda A$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N : Anzahl Mutterkerne

A : Aktivität

8.3. Kernspin und Magnetresonanz

8.3.1. Magnetisches Dipolmoment

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

$$L_z = \hbar m$$

$$\mu_z = \gamma \hbar m = \pm \frac{1}{2} \cdot \gamma \hbar$$

μ : magnetisches Dipolmoment

L : Drehmoment

γ : gyromagnetisches Verhältnis

8.3.2. Energiezustände in äusserem Magnetfeld

$$E_m = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar m \cdot B_0$$

B_0 : äusseres Magnetfeld

8.3.3. Larmor-Frequenz

$$\omega_0 = \gamma B_0$$

8.3.4. Kernmagnetisierung

$$\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \cdot (\vec{M} \times \vec{B})$$

Kartesische Koordinaten:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma (M_y B_z - M_z B_y)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma (M_z B_x - M_x B_z)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma (M_x B_y - M_y B_x)$$

→ Ohne Spin-Spin-Wechselwirkung!

8.3.5. Mit Spin-Spin-WW

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma \cdot (M_y B_z - M_z B_y) - \frac{1}{T_2} \cdot M_x$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma \cdot (M_z B_x - M_x B_z) - \frac{1}{T_2} \cdot M_y$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma \cdot (M_x B_y - M_y B_x) - \frac{1}{T_1} \cdot (M_z - M_0)$$