KURVENDISKUSSION

Eine Kurvendiskussion besteht aus
- Definitionsbereich (Bei Polynomen: $D = \mathbb{R}$), Wertebereich
- Symmetrie
- Schnittpunkte mit Koordinatenachsen
- Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$
- lokale Max/Min
- Wendepunkte

GRAPHEN SKIZZIEREN

1. Nullstellen bestimmen
2. Extremalstellen bzw. Sattelpunkte
3. Asymptotisches Verhalten

NULLSTELLE

$x_0 \in \mathbb{R}$ heisst Nullstelle von f, falls $f(x_0) = 0$.

MONOTONIE

Definition

Eine Funktion $f(x)$ heisst monoton wachsend, falls für $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Eine Funktion $f(x)$ heisst monoton fallend, falls für $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Satz

Falls $\boldsymbol{f'(x_0) > 0}$, dann ist $f(x)$ in einer Umgebung um x_0 monoton **wachsend**.

Falls $\boldsymbol{f'(x_0) < 0}$, dann ist $f(x)$ in einer Umgebung um x_0 monoton **fallend**.

KRÜMMUNGSVERHALTEN

SATZ

Falls $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, dann ist $f(x)$ **konkav** in einer Umgebung um x_0 (d.h. der Graph macht lokal eine **Rechtskurve**).

Falls $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, dann ist $f(x)$ **konvex** in einer Umgebung um x_0 (d.h. der Graph macht lokal eine **Linkskurve**).

LOKALES MAXIMUM/MINIMUM

SATZ (notwendiges Kriterium)

Falls der Graph von $f(x)$ in x_0 ein lokales Maximum/Minimum besitzt, dann gilt

$$f'(x_0) = 0$$

SATZ (hinreichendes Kriterium)

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist der Punkt $M(x_0, f(x_0))$ ein lokales Maximum.

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist der Punkt $M(x_0, f(x_0))$ ein lokales Minimum.

WENDEPUNKT

SATZ (notwendiges Kriterium)

Falls der Graph von $f(x)$ in x_0 einen Wendepunkt besitzt, dann gilt

$$f''(x_0) = 0$$

SATZ (hinreichendes Kriterium)

Falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x0) \neq 0$, dann ist der Punkt $W(x_0, f(x_0))$ ein Wendepunkt.

SATTELPUNKT

Definition

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit Tangente parallel zur x-Achse, d.h. ein Wendepunkt mit der zusätzlichen Bedingung, dass

$$f'(x_0) = 0$$

NEWTON-VERFAHREN

Definition

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dozent: David Bernhardsgrütter

FUNKTIONEN

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ ordnet jedem $x \in \mathbb{D}$ genau ein Element $y \in \mathbb{B}$ zu. x heisst Argument, y heisst unktionswert, $\mathbb{D}$ ist die Definitionsmenge und $\mathbb{B}$ ist die Bildmenge.

POLYNOMFUNKTIONEN

Definition

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Dabei heissen $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, n heisst der Grad des Polynoms. Der zum Grad gehörige Koeffizient heisst Leitkoeffizient.

Vorgehen Graphen von Polynomen skizzieren:

1. Nullstellen einzeichnen
2. asymptotisches Verhalten
3. Berücksichtige Vielfachheit der Nullstellen und berücksichtige asymptotische Verhalten

FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

Ein Polynom vom **Grad n** besitzt **höchstens n reelle Nullstellen**.

Beispiel:

$$x^3 = max. 3\ NS$$

Die Linearfaktorzerlegung (bzw. die Nullstellen) eines Polynoms findet man durch Polynomdivision, oder falls man damit nicht weiterkommt, durch den Newton-Algorithmus (folgt später).

DIFFERENTIALQUOTIENT

Sekantensteigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ABLEITUNG IN x_0

Wenn für die Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert, dann heisst f an der Stelle x_0 differenzierbar.

Tangentensteigung am Graph an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung der Funktion nehmen!

SYMMETRIE

gerade: $f(-x) = f(x)$
symmetrisch bzgl. der y-Achse

ungerade: $f(-x) = -f(x)$
symmetrisch bzgl. dem Ursprung

PERIODIZITÄT

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst periodisch mit Periode T, wenn gilt: $f(x + T) = f(x)\ für\ alle\ x \in \mathbb{R}$

MONOTONIE (WIEDERHOLUNG)

- monoton wachsend:

$x_1 < x_2$ gilt → $f(x_1) \leq f(x_2)$

- monoton fallend:

$x_1 < x_2$ gilt → $f(x_1) \geq f(x_2)$

BIJEKTIVITÄT

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$

- injektiv:

$x_1 \neq x_2\ stets\ f(x_1) \neq f(x_2)$

- surjektiv:

$y \in \mathbb{B}$ ein $x \in \mathbb{D}$ gibt mit $f(x) = y$.

- bijektiv: injektiv & surjektiv

UMKEHRFUNKTION

Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ eine bijektive Funktion. Die Umkehrfunktion $f\ -1 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ ist definiert durch $(f - 1 \circ f)(x) = x, (f \circ f - 1)(y) = y$

Bestimmung der Umkehrfunktion:

- Löse $y = f(x)$ nach x auf
- Vertausche die Variablen x und y.

GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN

Definition

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0}$$

$\boldsymbol{n > m}$: Funktion **echt** gebrochenrational
$\boldsymbol{n \leq m}$: Funktion **unecht** gebrochenrational

NULLSTELLEN

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,
wenn $p(x_0) = 0, q(x_0) \neq 0.$

Vorgehen:
Einfach: "Zähler = 0" setzen, mit Nenner ≠ 0 überprüfen

POLSTELLEN

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine Polstelle der Funktion
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn $q(x_0) = 0, p(x_0) \neq 0$

Vorgehen:
Einfach: "Nenner = 0" setzen, mit Zähler ≠ 0 überprüfen

HEBBARE DEFINTIONSLÜCKEN

Definition

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine hebbare Definitionslücke der Funktion

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *, wenn* $q(x_0) = 0, p(x_0) = 0$

Vorgehen:

1. Einfach: Zähler und Nenner = 0
2. HD in $f(x)$ einfügen nach herauskürzen

BESTIMMUNG DES ASYMPTOTISCHEN VERHALTENS IM UNENDLICHEN

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$: echt gebrochenrationale Funktion → $y = 0$ die Asymptote von $f(x)$ im Unendlichen.

- Falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$: unecht gebrochenrationale Funktion $f(x) = p(x) + r(x)$ (Polynomdivision) → $p(x)$ = Asymptote von $f(x)$ im Unendlichen.

ABLEITUNGSFUNKTION

Eine Funktion f heisst differenzierbar, falls f in jeder Stelle $x0 \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion $f'(x)$ heisst Ableitung von f.

HÖHERE ABLEITUNGEN

Falls die Funktion $f'(x)$ wieder differenzierbar ist, nennt man die Ableitung von der Ableitung die zweite Ableitung von f. Notation: $f''(x)$ bzw. $\frac{d^2f}{dx^2}$. Analog für höhere Ableitungen.

ABLEITUNG VON POTENZFUNKTIONEN

Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^a$ Ist gegeben durch $f'(x) = ax^{a-1}$.

FAKTORREGEL

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

SUMMENREGEL

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^2 - 3x + 5 \Rightarrow$$
$$f'(x) = 12x^3 + 8x - 3$$

PRODUKTREGEL

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

QUOTIENTENREGEL

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

VERKETTUNG/KETTENREGEL

Für zwei Funktionen $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ und $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

INVERSENREGEL

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

ABLEITUNGEN ELEMENTARER FUNKTIONEN

$f(x)$	$f'(x)$
x^a mit $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
$cot(x)$	$-1 - cot^2(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$ln(a) \cdot a^x$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a)x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot(t)$	$-sin^2(x)$

GRENZWERTE

GRENZWERT EINER FUNKTION AN EINER STELLE

Definition

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0, falls für jede Folge x_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Definition

Konvergenz: Grenzwert existiert

Divergenz: Grenzwert existiert **nicht**

STETIGKEIT

Anschaulich: Eine Funktion f ist stetig, falls der Funktionsgraph keine “Sprünge” aufweist.

➔ Mit Vorsicht zu geniessen!

Definition

- **stetig** an der Stelle x_0:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

- Funktion f **stetig**:

stetig in **jedem Punkt x_0** $\in \mathbb{D}$ ihres Definitionsbereichs.

STETIGKEIT DER GRUNDFUNKTIONEN

Polynome	$y = a_n x^n + \ldots + a_0$
Gebrochenrationale Funktionen	$y = \frac{p(x)}{q(x)}$
Exponentialfunktionen	$y = a^x$
Logarithmusfunktionen	$y = \log_a(x)$
Trigonometrischen Funktionen	$y = sin(x)$, $y = cos(x)$, $y = tan(x)$

DIFFERENZIERBARKEIT VS STETIGKEIT

- Die Funktion ist stetig, falls der Graph keine Sprünge hat.
- Die Funktion ist differenzierbar, falls der Graph keine Knicke hat.
- Eine unstetige Funktion ist an ihren Unstetigkeitsstellen auch nicht differenzierbar.
- Eine differenzierbare Funktion ist stetig, eine stetige Funktion ist nicht unbedingt differenzierbar.

LISTE VON ELEMENTAREN GRENZWERTEN

1.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2.	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $\lvert q\rvert < 1$
3.	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
4.	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5.	$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

GRENZWERTSÄTZE

Definition

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot a$ *für alle* $\lambda \in R$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
1. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$
2. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
3. 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ *für* $b \neq 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ *Üblicherweise gegeben falls* $f(x)$ *stetig ist*

TRICKS

BEISPIEL	TRICK
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3}$	erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ k: grösster Exponent
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+1}}{7^n + 5}$	erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ a: grösste Basis k: kleinster Exponent
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$	erweitern mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{3n})^{4n}$	umformen zu $\lim\limits_{x\to\infty} ((1 + \frac{1}{x})^x)^a = e^a$

WICHTIGE GRENZWERTE

$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{arctan(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{sin(ax)} = \frac{1}{a}$

$\lim_{x\to 0} = \frac{sin(ax)}{sin(x)} = a$

$\lim_{x\to\infty} n \cdot sin(\frac{1}{n}) = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)$

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{tan(x)}{x} = \mp\infty$

$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

$\lim_{x\to 0} x^a \cdot ln^b(x) = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^k} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$

INTEGRAL

Definition

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$, falls $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist nicht eindeutig definiert: Falls $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist auch $\boldsymbol{F(x) + C}$ eine Stammfunktion.

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen heisst unbestimmtes Integral von $f(x)$, man schreibt $\int f(x)dx$. Die Funktion $f(x)$ heisst Integrand.

Beispiel:

$$\int 4x^2 - 2x + 3dx = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$$

Definition

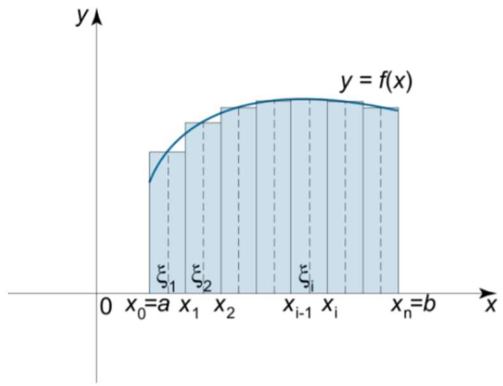
Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ über $[a,b]$ ist definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

SATZ (Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung)

Es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$



Beispiel:

$$\int_1^3 x^2 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_1^3 =$$
$$\left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 1^2\right) = -\frac{22}{3}$$

EIGENSCHAFTEN

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

FLÄCHENINHALT

Der Flächeninhalt, der durch die beiden Funktionen $f_u(x) \le f_o(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ eingeschlossen wird, ist gegeben durch

$$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx = \int_a^b f_o(x)dx - \int_a^b f_u(x)dx$$

Falls Intervall [a,b] nicht gegeben → Schnittpunkte berechnen

Vorgehen Schnittpunkte finden:

1. $f(x) = g(x)$ auflösen → x-Koordinate
2. x-Punkt in $f(x)$ einsetzen → y-Koordinate

Dozent: David Bernhardsgrütter

FOLGEN UND REIHEN

Definition

Eine Folge ordnet jedem Index $k \geq 1$ eine reelle Zahlen a_k zu. Man nennt a_k das kte Glied der Folge.

Definition

Die zu einer Folge gehörende Reihe ist definiert als die Folge der Partialsummen, d.h.

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Reihe $s_n, n \geq 1$ ist selbst wieder eine Folge.

ARITHMETISCHE FOLGE & REIHE

Definition

$a_k - a_{k-1} = d$ (wobei d konstant ist)

- Rekursives Bildungsgesetz:

$$a_k = a_{k-1} + d$$

- Explizites Bildungsgesetz:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

- Explizites Bildungsgesetz der Reihe:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n \cdot d}{2}$$

- Gausssche Summenformel:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

GEOMETRISCHE FOLGE & REIHE

Definition

$\frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot q$ (wobei q konstant ist)

- Rekursives Bildungsgesetz:

$$a_k = a_{k-1} \cdot q$$

- Explizites Bildungsgesetz:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

- Explizites Bildungsgesetz der Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Definition

Falls eine Reihe **konvergiert**, so nennt man ihren Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

den Wert der Reihe.

Wert der geometrischen Reihe:
Falls $|q| < 1$, dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

EIGENSCHAFTEN

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \dots + a_n$$

- Homogenität

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Additivität

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

- Konstanter Summand

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$

- Teleskopsumme

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

SPEZIELLE REIHEN

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$, «Kleiner Gauss»
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $3.\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

MONOTONIE FOLGE

Definition

Eine Folge a_n heisst monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n ∈ N gilt. Eine Folge an heisst monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in N$ gilt.

NACHWEIS MONOTONIE-VERHALTENS

• 1. Strategie: $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend (bzw. $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow$ monoton fallend)

• 2. Strategie: Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0$, dann ist die Folge monoton wachsend.

Def: Eine Folge a_n heisst nach oben beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in N$ gilt. Eine Folge an heisst nach unten beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt, so dass $a_n \geq M$ für alle $n \in N$ gilt.

Definition

Eine Folge a_n besitzt den Grenzwert $a \in R$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε gibt, so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ Besitzt eine Folge solch einen Grenzwert, so spricht man von Konvergenz der Folge – die Folge ist konvergent; sie konvergiert –, andernfalls von Divergenz.

SATZ

Sei a_k eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist. Dann ist die Folge konvergent.

Beispiel:

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Intuitiv: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

a

Sauber (gemäss Def.):

$|0 - \frac{1}{n}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$

zu bestimmen

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \quad | \cdot n : \varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \leftarrow$ aufrunden

Dozent: David Bernhardsgrütter

NICE TO KNOW

POLYNOMDIVISON

Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -5x^2 - x \\
\quad -(-5x^2 + 5x) \\
\hline
\qquad -6x + 6 \\
\qquad -6x + 6 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

MITTERNACHTSFORMEL

Falls $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

BINOMISCHE FORMELN

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

TRIGONOMETRISCHE IDENTITÄTEN

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

POWER LAWS

$$a^0 = 1$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

$$a^p : b^p = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

VERSCHIEDENE GRAPHEN