ANALYSIS 2 REBECCA S NAULI

INTEGRALE

BESTIMMTES INTEGRAL (RIEMANN-INTEGRAL)

Definition bestimmtes Integral

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

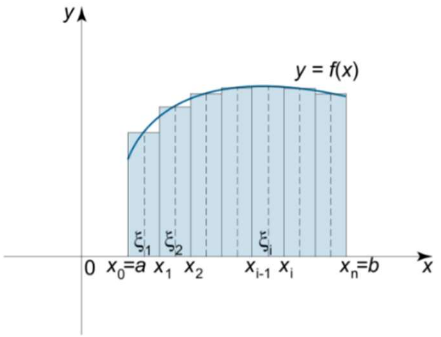
HAUPTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Definition

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$, falls $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Bsp: $\boldsymbol{f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3}$



Bsp: $\int_1^3 x^2 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_1^3 =$
$\left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 2\cdot 1^2\right) = -\frac{22}{3}$

Definition unbestimmtes Integral

- Die Menge aller Stammfunktionen = unbestimmtes Integral von $f(x)$ → $\int f(x)dx$.
- Die Funktion $f(x)$ = Integrand.

Beispiel:

$$\int 4x^2 - 2x + 3dx = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$$

FLÄCHENINHALT

$f_u(x) \leq f_o(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$

$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx = \int_a^b f_o(x)dx - \int_a^b f_u(x)dx$

Falls Intervall $[a, b]$ nicht gegeben → Schnittpunkte berechnen

Nur über den + Bereich der Achse integriert!

Doz: David Bernhardsgrütter

SCHNITTPUNKTE FUNKTIONEN

1. $f(x) = g(x)$ auflösen → x-Koordinate
2. x-Punkt in $f(x)$ einsetzen → y-Koordinate

EIGENSCHAFTEN

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

LISTE STAMMFUNKTIONEN

f(x)	F(x)
$x^a mit\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$

METHODEN

"Ansatz mit Korrektur"

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$$

1. Ansatz: $A = f(g(x))$
2. Ableiten: $A' = f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)(Kettenregel)$
3. Korrektur: $A_k = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \rightarrow F\big(g(x)\big) + C \; bzw. = A_k$

Beispiel:

$$\int \cos(x^3) \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

Beispiel 3

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Ansatz: $A(x) = e^{2x}$

Korrektur: $A'(x) = e^{2x} \cdot \boxed{2}$

$\Rightarrow A_k(x) = 1/2 \cdot e^{2x}$

[Kontrolle: $(1/2 \cdot e^{2x})' = 1/2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}$ ✓]

$\Rightarrow \int_0^1 e^{2x} dx = \left[1/2\, e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2}$

$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$

Partielle Integration

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$$

$$= \int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Beispiel:

Beispiel 1

Wir berechnen $\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'} dx$:

wir definieren
$v(x) = x$
$u'(x) = \sin(x)$
und berechnen
$v'(x) = 1$
$u(x) = -\cos(x)$

$\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'} dx$

$= x \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x) \cdot 1\, dx$

$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) dx$

$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$

Partialbruchzerlegung

Falls unecht gebrochenrationale Funktion:

- ➔ Polynomdivision
- ➔ Danach gleiches Vorgehen für echt gebrochenrational

Falls echt gebrochenrationale Funktion: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Fall 1: $q(x)$ hat nur 1-fache Nullstelle x_i:

$$q(x) = (x - x_i) \dots (x - x_n)$$

→Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Konstanten $A_1, \dots, A_n$:

- durch Koeffizientenvergleich oder
- Nullstellen einsetzen (schnellere Variante)

→Integral vom Typ $\ln(|x|)$:

$$\int \frac{A_1}{x - x_i} dx = A_i \ln(|x - x_n|) + C$$

Beispiel:

Wie geht man vor, falls der Integrand unecht gebrochenrational ist?

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + x + 4}{x^2 - 7x + 10} dx$$

⚠ Zählergrad ≥ Nennergrad

Zuerst Polynomdivision

$$(x^3-5x^2+x+4):(x^2-7x+10) = x+2+\frac{5x-16}{x^2-7x+10}$$

$$\frac{-(x^3-7x^2+10x)}{2x^2-9x+4}$$

$$\frac{-(2x^2-14x+20)}{5x-16}$$

$$\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-7x+10} dx = \int x+2 dx + \int \frac{5x-16}{(x-5)(x-2)} dx$$

$\Rightarrow$ Ansatz: $\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2}$ | · Hauptnenner

$$5x-16 = A\cdot(x-2) + B\cdot(x-5)$$

$x=2$: $10-16 = B\cdot(-3) \Rightarrow B=2$

$x=5$: $25-16 = A\cdot 3 \Rightarrow A=3$

$$\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-7x+10} dx = \int x+2 dx + \int \frac{3}{x-5} + \frac{2}{x-2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2+2x+3\ln(|x-5|)+2\ln(|x-2|)+C$$

[ln(x), ln x
sin(x), sin x]

Fall 2: $q(x)$ = m-fache Nullstelle x_i:

$$q(x) = (x-1) \dots (x-x_i)^m \dots (x-x_k)$$

➔ Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{B_1}{x-x_i} + \dots \frac{B_m}{(x-x_i)^m} + \dots + \frac{A_k}{x-x_k}$$

→Integral vom Typ $\ln(|x|)$ *und* $\frac{1}{x^k}$:

$$\int \frac{a}{(x-c)^k} dx = -\frac{a}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-c)^{k-1}} + C$$

Beispiel:

1. Schritt: Nenner faktorisieren

$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x-5)(x-1)^2$ [In diesem Bsp müssen Sie das nicht können!

Ansatz: Pro n-fache NS x_0 verwendet man die Summanden $\frac{A_i}{(x-x_0)^i}$, $i = 1, \dots, n$

Hier: $\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

2. Schritt: Konstanten bestimmen

$$\frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Big| \cdot (x-5)(x-1)^2$$

$$-x^2+2x-17 = A\cdot(x-1)^2 + B\cdot(x-5)(x-1) + C\cdot(x-5)$$

Var. 1: Koeffizientenvergleich

(rechte Seite ausmultiplizieren, lineares Gleichungssystem lösen)

→ Skript S. 7

Var 2: NS einsetzen:

$x=5$: $-25+10-17 = A\cdot 4^2 + 0 + 0 \quad |:16$

$\Rightarrow A = -2$

$x=1$: $-1+2-17 = 0+0+C\cdot(-4) \quad |:(-4)$

$\Rightarrow C = 4$

$x=0$: $-17 = \underbrace{(-2)}_{A}\cdot(-1)^2 + B(-5)(-1) + \underbrace{4}_{C}\cdot(-5)$

irgendein Wert

$\Rightarrow B = 1$

Es gilt:

$$\frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5} = \frac{-2}{x-5} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

3. Schritt: integrieren

$$\int \frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5} dx = \int \frac{-2}{x-5} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} dx$$

$$= -2\cdot\ln|x-5| + \ln|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + C$$

[$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C$]

Substitutionsregel

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy$$

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(y)\, dy$$

Beispiel:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} du$$
$$= 2 \int \sin(u)\, du = -2\cos(u) + C = -2\cos(\sqrt{x}) + C$$

Substitution:

$$u(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

Beispiel:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$$

Substitution: $u(x) = 1 - x^3$

Ableitung: $\frac{du}{dx} = -3x^2 \quad | \cdot dx$

$du = -3x^2 dx \quad | : (-3x^2)$

$\frac{1}{-3x^2} \cdot du = dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx = \int \frac{\cancel{x^2}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{-3\cancel{x^2}} \cdot du$$
$$= -\frac{1}{3} \int u^{-1/2} du$$
$$= -1/3 \cdot 2 u^{1/2} + C$$
$$= -2/3 \cdot \sqrt{1-x^3} + C$$

Rücksubst.

Substitutionsmethode

Beispiel: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$

Lösung durch Substitution:

$\int_0^{?} \sin(y)\, dy?$

Substitution: $y = 2x$ $\quad u(x) = 2x$

Was passiert mit den Integrationsgrenzen?

$x \in [0, \pi/2] \Rightarrow y \in [0, \pi]$

$u(0) \quad u(\pi/2)$

Was ist dy?

Wir leiten ab: $y' = \frac{dy}{dx} = 2 \quad | \cdot dx$

$dy = 2dx \quad | : 2$

$dx = \frac{1}{2} dy$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx = \int_0^{\pi} \sin(y) \cdot \frac{1}{2} dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(y)dy$$
$$= \frac{1}{2} \cdot [-\cos(y)]_0^{\pi} = \ldots = 1$$

MITTELWERT

Mittelwert μ

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Mittelwert von der Funktion $f(x) = x^2 + 2$ auf dem Intervall $[0, 3]$.

$$\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2+2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 15 = \underline{\underline{5}}$$

BOGENLÄNGE EINES GRAPHEN

Bogenlänge L des Graphen f(x):

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Beispiel:

Berechnen Sie die Länge des Graphen von $f(x) = \sqrt{\left(2x-\frac{1}{9}\right)^3}$ auf dem Intervall $[1, 3]$.

$$L = \int_1^3 \sqrt{1+(f')^2}\,dx$$

$$f(x) = \left(2x-\frac{1}{9}\right)^{3/2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(2x-\frac{1}{9}\right)^{1/2}\cdot 2 \leftarrow \text{Ketten-regel!}$$

$$= 3\sqrt{2x-\frac{1}{9}}$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1+9\cdot\left(2x-\frac{1}{9}\right)}\,dx = \int_1^3 \sqrt{18x}\,dx$$

$$= \sqrt{18}\int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \sqrt{18}\int_1^3 x^{1/2}\,dx = \sqrt{18}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_1^3$$

$$\approx 11.87$$

SCHWERPUNKT EINER FLÄCHE

Fläche A wird durch $f_o(x) \geq f_u(x)$ beschränkt

$S = (x_s|y_s)$:

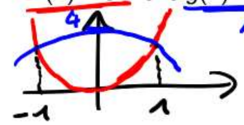
$$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x\big(f_o(x) - f_u(x)\big)dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b ({f_o}^2(x) - {f_u}^2(x))dx$$

Beispiel:

Wir berechnen den Schwerpunkt der Fläche, die durch die Funktionen $f_u \rightarrow f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 4 - x^2$ begrenzt wird. $\uparrow f_o$



Schnittpkte: $3x^2 = 4 - x^2 \quad | +x^2$

$4x^2 = 4 \quad |:4$

$x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$a = -1,\ b = 1$

$$A = \int_{-1}^{1} f_o - f_u\,dx = \int_{-1}^{1} 4-x^2-3x^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4-4x^2\,dx = 4x - \frac{4}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} x\cdot(4-4x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_{-1}^{1} 4x-4x^3\,dx = \frac{3}{16}\left[2x^2-x^4\right]_{-1}^{1}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$y_s = \frac{3}{32}\int_{-1}^{1} (4-x^2)^2 - (3x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{3}{32}\int_{-1}^{1} x^4 - 8x^2 + 16 - 9x^4\,dx = \ldots = \underline{\underline{\frac{11}{5}}}$$

ROTATIONSKÖRPER

Definition

Der Rotationskörper entsteht durch Rotation der Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um die x-Achse.

VOLUMEN:

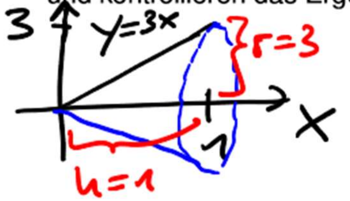
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Beispiel:

Rotationsvolumen

Beispiel 1: Kegelvolumen

Wird der Graph von $f(x) = 3x$ im Intervall $[0, 1]$ um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Kegel. Wir berechnen das Volumen durch $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ und kontrollieren das Ergebnis mittels $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



$$V = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 9x^2 dx = \pi\, 3x^3 \Big|_0^1 = \underline{\underline{3\pi}}$$

Kontrolle: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 1 = 3\pi$ ✓

MANTELFLÄCHE:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Beispiel:

Beispiel 1: Mantelfläche Kegel

Wird der Graph von $f(x) = 3x$ im Intervall $[0, 1]$ um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Kegel.

Wir berechnen die Mantelfläche durch $M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ und kontrollieren das Ergebnis mittels $M_{\text{Kegel}} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

$f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

$$M = 2\pi \int_0^1 3x \cdot \sqrt{1 + 3^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 3 \cdot \sqrt{10} \cdot x\, dx$$

$$= 2\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \int_0^1 x\, dx = 2\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}_{1/2} = \underline{\underline{3\sqrt{10} \cdot \pi}}$$

Kontrolle:

$h = 1,\ r = 3$

$M = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} = \underline{\underline{\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{10}}}$

BERNOULLI DE L'HÔPITAL

Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf einem Intervall $I = (a, b)$ definiert sind. Sei weiter $x_0 \in I$. Falls

1. $lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (oder jeweils $= \pm\infty$)
2. $g'(x) \neq 0$ für $x \in I, x \neq x_0$
3. $lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

Dann gilt

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit der Regel von Bernoulli de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} \qquad x^2+3x-4 = f(x), \quad x^2-1 = g(x)$$

Bemerkung zu Bernoulli de l'Hôpital: Die Voraussetzungen 1-3 müssen erfüllt sein, sonst könnte die Anwendung der Regel zu einem falschen Ergebnis führen. Für Sie ist jedoch die Überprüfung des 1. Punktes ("$\frac{0}{0}$" bzw. "$\frac{\infty}{\infty}$") am wichtigsten. Die Gegenbeispiele für Voraussetzung 2 sind so kompliziert, dass Sie im Rahmen dieser Vorlesung nicht damit rechnen müssen (das ist eher etwas für Mathe-Studis).

Analysis 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+4)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$$

(eigentlich ist die Aufgabe lösbar mit Tricks aus AN1)

Mit Bernoulli:

1) "$\frac{0}{0}$" ✓ $\quad f'(x) = 2x+3$, $\quad g'(x) = 2x$

2) $g'(x) = 2x \neq 0$ auf einem Intervall um $x_0 = 1$, z.B. $I = (0.5, 1.5)$

$I = (0.9, 1.1)$ auch ok!

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{2x} = \frac{5}{2}$$

Bem 2: Falls $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to$ "$\frac{0}{0}$" / "$\frac{\infty}{\infty}$", dann wendet man Bernoulli nochmals an:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

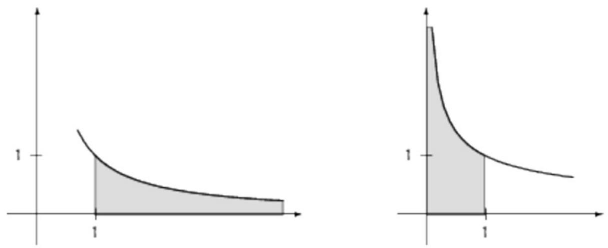
UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Ein uneigentliches Integral ist vom Typ

$$\int_a^\infty f(x)dx \int_{-\infty}^b f(x)dx \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

oder $\int_a^b f(x)dx$, wobei $f(x)$ einen Pol in $[a,b]$ hat

Berechnung 1. Typ



$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^\lambda f(x)dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_\lambda^b f(x)dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^0 f(x)dx + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_0^\lambda f(x)dx\right)$$

Beispiel 1. Typ:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

① $\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx = \int_1^\lambda x^{-2}dx = -x^{-1}\Big|_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda}-(-1)$
$= 1-1/\lambda$

② $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\lambda\to\infty}(1-1/\lambda)$
$= \underline{\underline{1}}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \underline{\underline{1}}$ ("konvergent")

Berechnung 2. Typ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx\right) \quad Pol\ bei\ x=a$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx\right) \quad Pol\ bei\ x=b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx\right) + \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right) \quad Pol\ bei\ x=c\in(a,b)$$

Beispiel 2. Typ:

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ hat bei $x=0$ ein Pol

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

① $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}dx = 2\cdot x^{1/2}\Big|_\varepsilon^1$
$= \underline{\underline{2-2\cdot\sqrt{\varepsilon}}}$

② $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to0}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = \underline{\underline{2}}$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \underline{\underline{2}}$ (konvergent)

TAYLORREIHEN

Definition Potenzreihe

Potenzreihe: «ein Polynom vom Grad ∞»

$$p(x) = a_o + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^2$$

- $a_0, a_1, \ldots$ heissen Koeffizienten der Potenzreihe,
- x_0 ist das Zentrum

Beispiel:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Bestimmen Sie das Zentrum x_0 und die Koeffizienten a_k der folgenden Potenzreihen:

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = 1 + 1\cdot(x-0) + 1\cdot(x-0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k$$

$x_0 = 0$, $a_k = 1$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1x^2}{2!} + \frac{1x^3}{3!} + \ldots$$

a_2, a_3

$x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$

$\downarrow e^x$

$$p_3(x) = (x-1) - \frac{1(x-1)^2}{2} + \frac{1(x-1)^3}{3} - \frac{1(x-1)^4}{4} \pm \ldots$$

a_2, a_3, a_4

alternierend $+, -, +, -, \ldots$

$\downarrow \ln(x)$

$x_0 = 1$, $a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$, $a_0 = 0$

auch richtig: $a_k = (-1)^{k-1} \cdot 1/k$

Institute of Computational Physics — zhaw — Kapitel 2 — 6 / 18

Definition Taylorreihe

Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0: Diejenige Potenzreihe $p(x)$ sodass alle Ableitungen von $p(x)$ mit den Ableitungen von $f(x)$ übereinstimmen

$$t_f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Beispiel:

Beispiel 1: Taylorreihe von e^x

Wir berechnen die Taylorreihe von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$$t_f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

$k=0$: $f(0) = e^0 = 1$

$k=1$: $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$

$k=2$: $f''(x) = e^x$, $f''(0) = e^0 = 1$

k: $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{t_{e^x}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x^1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$$

$\Rightarrow$ auf Zusammenfassung

Definition Taylor-Polynom

Wenn die Potenzreihe nach dem Term n-ter Ordnung abgebrochen wird, erhält man das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f(x) an der Stelle x_0:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Beispiel:

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades $p_3(x)$ von der Funktion $f(x) = (\ln(x))^2_3$ an der Stelle $x_0 = 1$.

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k$$

$$f(x) = (\ln(x))^2$$

$k=0$: $f(1) = \ln(1)^2 = 0$

$k=1$: $f'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = 2\ln(x) \cdot x^{-1}$ (→ Kettenregel!)

$f'(1) = 0$

$k=2$: $f''(x) = 2\left(x^{-1} \cdot x^{-1} + \ln(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2}\right) = 2(x^{-2} - \ln(x)\, x^{-2})$

$f''(1) = 2$

$k=3$: $f'''(x) = 2\left(-2x^{-3} - \left(x^{-1} \cdot x^{-2} + \ln(x) \cdot (-2)x^{-3}\right)\right) = \ldots$

$f'''(1) = 2 \cdot (-2-1) = -6$

$$P_3(x) = 0 + 0 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{(-6)}{3!}(x-1)^3$$

$$= (x-1)^2 - (x-1)^3$$

Wichtige Taylorreihen

Funktionen $f(x) = e^x, f(x) = \sin(x), f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$

$t_f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f'''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots$
$t_{e^x}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
$t_{sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$t_{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

$t_{ln}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$

Konvergenzbereich

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \middle| p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \ ist\ konvergent \right\}$$

- Der Konvergenzbereich ist immer ein Intervall um x_0.
- Der Abstand zwischen x_0 und dem Rand des Konvergenzintervalls heisst Konvergenzradius ρ
- Man berechnet ρ durch

  $\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ oder $\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$
- Konvergenz/ Divergenz am Rand: Man muss die Werte am Rand des Intervalls in die Potenzreihe einsetzen und die resultierende Reihe untersuchen.

Beispiel:

Konvergenzradius der Taylorreihe von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$t_{e^x}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{a_k} x^k$$

Konvergenzbereich?

1) Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cancel{k}\cdot\cancel{(k-1)}\cdots\cancel{2\cdot 1}}{\cancel{k}\cdot\cancel{(k-1)}\cdots\cancel{2\cdot 1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} k+1 \text{ "}=\infty\text{"}$$

2) Konvergenzbereich:

$$I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$$
$$= (0-\infty, 0+\infty) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

Sammlung konvergenter/divergenter Reihen

$1+1+1+1+1+\cdots$	Divergent
$1-1+1-1+1\pm\cdots$	Divergent
$1-2+3-4+5\pm\cdots$	Divergent
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$	Divergent
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\pm\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$	Konvergent
$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$	Konvergent
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$	konvergent

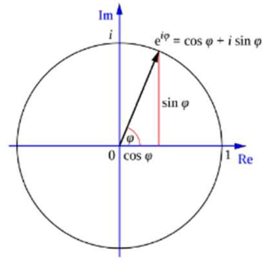
POTENZREIHEN

Mit Potenzreihen kann man innerhalb der Konvergenzintervalle rechnen wie mit Polynomen.

- Innerhalb ihres Konvergenzintervalls ist eine Potenzreihe eine stetige Funktion.
- Im Durchschnitt der Konvergenzintervalle zweier Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt kann man diese Potenzreihen addieren und multiplizieren.
- Identische Potenzreihen besitzen dieselben Koeffizienten → Koeffizientenvergleich
- Potenzreihen können gliedweise differenziert und integriert werden.

Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), i^2 = -1$$



Restglied

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Restgliedformel nach Lagrange

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, wobei $\xi \in [x_0, x]$

Beispiel:

Wie gross ist der maximale Fehler auf dem Intervall $[0, 0.1]$, wenn man $f(x) = e^x$ durch das Taylorpolynom 3. Grades approximiert?

$$f(x) = e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}_{P_3(x)} + R_3(x)$$

Abschätzung des Fehlers:

$$|R_3(x)| \le \max \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot x^4\right|$$

$$= \max\left|\frac{e^{\xi}}{4!}x^4\right| = \frac{e^{0.1}}{4!}\cdot 0.1^4$$

$$\approx 4.6\cdot 10^{-6}$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Eine DGL ist eine **Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen**; gesucht sind Funktionen, die diese Beziehung erfüllen. Differentialgleichungen sind ein Werkzeug, mit dem mathematische Modelle realer Situationen erstellt werden.

Definition Differentialgleichung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (ordinary differential equation, ODE) ist eine Gleichung

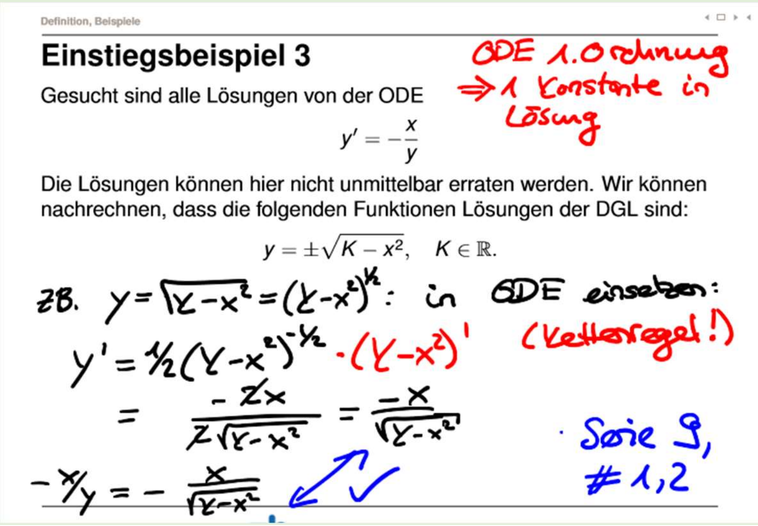
$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ auftreten (bis n-te Ableitung). Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man die DGL **explizit**, ansonsten **implizit**.

Beispiel:
explizit: $y' = y + x$
implizit: $y' - y - x = 0$

Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die **allgemeine Lösung** der DGL.

Beispiel ist Funktion eine Lösung des DGL:



ANFANGSWERTPROBLEM

Die Lösung ist erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich zur DGL noch eine oder mehrere Anfangsbedingungen vorgibt. Eine DGL zusammen mit einer Anfangsbedingung ist ein Anfangswertproblem (AWP).

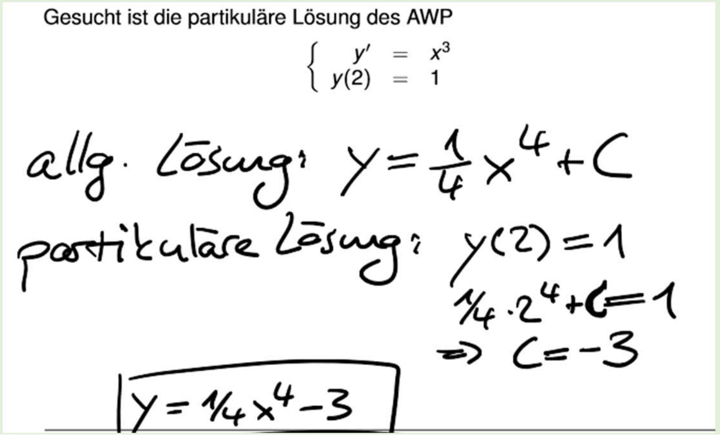
Definition Anfangswertproblem

Ein Anfangswertproblem einer DGL n-ter Ordnung ist

$$\begin{cases} F(x, y, y0\,, y00, \ldots, y(n)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Die Lösung eines Anfangswertproblems nennt man eine **spezielle** bzw. **partikuläre** Lösung der DGL.

Beispiel:



KLASSIFIKATION

Gewöhnliche DGL (ODE)

Wir betrachten die (gewöhnliche) DGL (1. Ordnung)

$$y' = F(x,y)$$

Es kommen nur Ableitungen nach einer Variablen vor.

Beispiel:

$$y' = -\frac{y}{x}$$

Partielle DGL (ODE)

Es treten Ableitungen nach mehreren Variablen auf.

Beispiel:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

Ordnung einer DGL

Höchste Ableitung, welche in der DGL vorkommt.

Beispiel 1. Ordnung:

$$y' = y$$

Lineare DGL (ODE)

Die Funktion und ihre Ableitungen kommen nur linear vor, also keine Ausdrücke wie $\sqrt{y(x)}, (y'(x))^2$, $e^{\,y(x)}$ etc.

Beispiel:

linear $y'' + y' = e^x$

nicht linear $y'' + \sqrt{y} = e^x$

Homogene DGL (ODE)

Wenn man alle Terme, welche die gesuchte Funktion (und deren Ableitungen) enthalten, auf die linke Seite der DGL schreibt, erhält man auf der rechten Seite Null.

Beispiel:

homogen $y' + xy = 0$

inhomogen $y' + xy = \cos(x)$

Separierbare DGL (ODE)

Die DGL heisst separierbar, falls die DGL von der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

ist.

Beispiel:

$$y' = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$$

Autonome DGL (ODE)

Die DGL heisst autonom, falls die DGL von der Form

$$y' = f(y)$$

ist. Autonome DGL sind <u>separierbar</u>! Keine x-Terme!

Beispiel:

$$y' = y = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$$

SEPERATION DER VARIABELN

Wir betrachten die (separierbare!) DGL

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

• Falls $h(y_0) = 0$: Dann ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL!

• Trennung aller x- und y-Terme:

$$\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

• Integration auf beiden Seiten:

$$\int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

• Auflösen nach y. Falls es sich um ein AWP handelt, dann die Anfangsbedingungen einsetzen, um die Konstante zu bestimmen.

Beispiel:

Wir betrachten die DGL

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Die DGL ist separierbar:

$$y' = \underbrace{(-x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{h(y)}$$

Lösung durch "Separation der Variablen":

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \Big| \; y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Big| \cdot dx, \cdot y$$

"Sortieren" ↔ "Sep. d. Var."

$$y \cdot dy = -x \cdot dx \quad \Big| \int$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx \quad \Big| \text{ auflösen}$$

$$\left(\tfrac{1}{2} y^2 + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Big| -C_1\right)$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \leftarrow C_2 - C_1 \quad \Big| \text{ nach } y \text{ auflösen} \quad \cdot 2$$

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2C}_{K} \quad \Big| \sqrt{}$$

⚠

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{K - x^2}}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

(vgl. Folie 7)

RICHTUNGSFELD

Das zur ODE 1. Ordnung

$y' = f(x, y)$

gehörende Richtungsfeld ordnet jedem Punkt

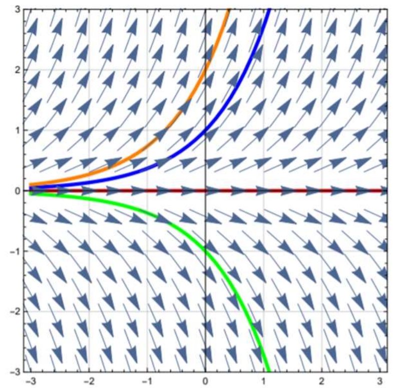
$P(x, y)$ den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ zu.

Beispiel: $y'(x) = y(x)$

Die Lösungen

$$y(x) = Ce^x$$

sind "Feldlinien" des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$



VARIATION DER KONSTANTEN

Wir suchen die Lösung der linearen, inhomogenen ODE 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$$

- Löse die zugehörige homogene lineare ODE

$$y'(x) \; - \; f(x)y(x) \; = \; 0$$

entweder durch Separation der Variablen oder mit Hilfe der L¨osungsformel

$$y_h(x) \; = \; K \; \cdot \; e^{F(x)}$$

wobei $K \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

- Die Konstante K wird "variiert": Ansatz

$$y_s(x) \; = \; K(x) \; \cdot \; e^{F(x)}$$

- Bestimme die Funktion $K(x)$:
  - Variante 1: Setze den Ansatz

$$y(x) \; = \; K(x) \cdot e^{F(x)}$$

in die ODE

$$y'(x) \; = \; f(x)y(x) + \; g(x)$$

ein.

Dies führt zu einer Gleichung für $K(x)$, die man auflöst.

  - Variante 2: Lösungsformel

$$K(x) \; = \; \int g(x)e^{-F(x)} \, dx$$

- Die allgemeine Lösung von $y'(x) \; = \; f(x)y(x) + \; g(x)$ lautet

$$y(x) \; = \; K(x) \; \cdot \; e^{F(x)}$$

Beispiel:

Gesucht sind die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - 3y(x) = xe^{4x}$$ linear, inhomogen

sowie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung ⇒ Var. Konst.

$$y(0) = 1$$

1. Schritt: Homogene Lösung finden

$y' - 3y = 0 \quad \Rightarrow$ Sep. d. Var.

$\frac{dy}{dx} = 3y \quad | \cdot dx, : y$ ← $h(y)$ ⇒ Nullstellen: $y = 0$ → konst. Lösung

$\frac{1}{y} dy = 3dx \quad | \int$

$\int \frac{1}{y} dy = \int 3dx \Rightarrow \ln|y| = 3x + C \quad | e^{\cdots}$

$\Rightarrow |y| = e^{3x} \cdot e^{C} \Rightarrow y = \pm e^{C} \cdot e^{3x}$

$\Rightarrow y_h = K \cdot e^{3x}, \quad K \in \mathbb{R}$

Variante: Lösungsformel

$y' - \underbrace{3y}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow F(x) = 3x$

$\Rightarrow y_h = K \cdot e^{F(x)} = K \cdot e^{3x}$

2. Schritt: Variation der Konstanten

$y_s = K(x) \cdot e^{3x}$

$y' \overset{PR}{\underset{KR}{=}} K' \cdot e^{3x} + K \cdot e^{3x} \cdot 3$ ← innere Ableitung

in ODE einsetzen

$K' \cdot e^{3x} + \cancel{3K e^{3x}} - \cancel{3K e^{3x}} = xe^{4x} \quad | : e^{3x}$

$K' = xe^{x} \quad | \int$

$K(x) = \int \underset{v \cdot u'}{xe^{x}} dx = \underset{v \cdot u}{x \cdot e^{x}} - \int \underset{v' \cdot u}{1 \cdot e^{x}} dx$

$= x \cdot e^{x} - e^{x} + C = \underline{\underline{(x-1)e^{x} + C}}$

$y(x) = ((x-1)e^{x} + C)e^{3x} = \underline{\underline{(x-1)e^{4x} + Ce^{3x}}}$

Variante Lösungsformel:

$K(x) = \int g(x) \cdot e^{-F(x)} dx = \int xe^{4x} \cdot e^{-3x} dx$

$= \int x \cdot e^{x} dx$

AWP: $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1 \cdot e^{0} + C \cdot e^{0} \Rightarrow C = 2$

$y(x) = \underline{\underline{(x-1)e^{4x} + 2e^{3x}}}$

EULER VERFAHREN

Wir betrachten das AWP (ODE 1. Ordnung)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

bzw.

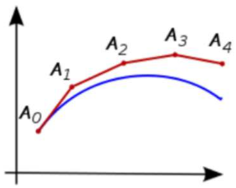
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dann lautet das Euler-Verfahren

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} t_k = t_0 + k \cdot h \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k) \end{cases}$$



Globaler Fehler

Abweichung der Approximation von der exakten Lösung zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t_k: $e_k = x(t_k) - x_k$

Lokaler Fehler

Abweichung der Approximation von der exakten Lösung *nach einem Schritt*.

Konvergenzordnung

Das numerische Verfahren heisst konvergent mit Konvergenzordnung p, falls $|e_k| \leq Ch^p$.

Das Euler-Verfahren hat **Konvergenzordnung 1**

$|ek| \leq Ch$ (wird die Schrittweite h um den Faktor 10 verkleinert, so wird der Fehler e_k ebenfalls ca. um den Faktor 10 verringert.)

NICE TO KNOW:

Funktionsbeschreibung

Kreis mit Radius r:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Umformungen

- $\ln(e^x) = x$
- $\ln(e^{ax}) = ax$
- $ln|x+7| + ln|x-3| = ln|(x+7)(x+3)|$

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

- $\cos(x) = y \rightarrow x = \arccos(y)$
- $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
- $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$
- $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
- $1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
- $1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$
- $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = tan^{-1}$

Integrationstabelle

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
sin^2	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin^3	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
sin^4	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
cos^2	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos^3	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
cos^4	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$sin \cdot cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$sin^2 \cdot cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$sin \cdot cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Wichtige Integrale

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}(f^2(x)) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$$

$$\int \frac{x}{(ax+b)^n}dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+a}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+a| + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+b| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$$

$$\int sin(ax) \cdot cos^n(ax)dx = -\frac{cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int tan^3(x)dx = \frac{sec^2(x)}{2} + ln(cos(x)) + C$$

$$\int tan^4(x)dx = x + \frac{1}{3}tan(x)(sec^2(x) - 4) + C$$

$$\int cot(x)dx = log(sin(x)) + C$$

$$\int coth(x)dx = log(sinh(x)) + C$$

$$\int \frac{cos(ax)}{sin^n(ax)}dx = -\frac{1}{(n-1)a \cdot sin^{n-1}(ax)} + C$$

$$\int \frac{1}{e^x+a}dx = \frac{x-ln(a+e^x)}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{e^x-a}dx = \frac{ln(e^x-a)-x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = ln(x) - ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$$

$$\int x \cdot e^{ax}dx = (\frac{ax-1}{a^2}) \cdot e^{ax} + C$$

$$\int x^2 \cdot e^{ax}dx = (\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}) \cdot e^{ax}$$

$$\int \frac{1}{p+q \cdot e^{ax}}dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \cdot ln|p + q \cdot e^{ax}| + C$$

$$\int \frac{e^{ax}}{p+q \cdot e^{ax}}dx = \frac{1}{ap} \cdot ln|p + q \cdot e^{ax}|$$

$$\int e^{ax} \cdot sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cdot sin(bx) + b \cdot cos(bx)] + C$$

$$\int e^{ax} \cdot cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cdot cos(bx) + b \cdot sin(bx)] + C$$

$$\int x \cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$$

$$\int \frac{(ln(x))^n}{x}dx = \frac{(ln(x))^{n+1}}{x+1} + C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = artanh(x) = log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) + C, |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = arsinh(x) = log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = arcosh(x) = log(x + \sqrt{x^2-1}) + C, 1 \leq x$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cot(x) + C$$

$$\int sin^3(x)dx = \frac{1}{12}(cos(3x) - 9cos(x)) + C$$

$$\int sin^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x - 8sin(2x) + sin(4x)) + C$$

$$\int cos^3(x)dx = \frac{1}{12}(9sin(x) + sin(3x)) + C$$

$$\int cos^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x + 8sin(2x) + sin(4x)) + C$$

$$\int sin^{\frac{3}{2}}(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x) + C$$

$$\int cos^{\frac{3}{2}}(2x)dx = sin(x)cos(x) + C$$

$$\int sin(x)cos(x)dx = -\frac{1}{2}cos^2x + C$$

$$\int sin^2(x)cos(x)dx = \frac{1}{3}sin^3(x) + C$$

$$\int sin(x)cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}cos^3(x) + C$$

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - sin(4x)) + C$$

$$\int sin^n(ax) \cdot cos(ax)dx = \frac{sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$