Lineare Algebra 2 — Rebecca S Nauli

Vektorräume

Definition

Ein reeller Vektorraum besteht au seiner nichtleeren Menge V von Elementen, die wir Vektoren nennen.

Bedingungen:

- Addition: $\text{Für beliebige Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ in } V \text{ ist } \vec{a} + \vec{b} \text{ in } V.$
- Skalare Multiplikation:
  $\textit{Für beliebige Vektoren } \vec{a} \in V \textit{ und } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ ist } \lambda\vec{a} \textit{ in } V.$

Rechengesetze:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ für alle } \vec{a}, \vec{b} \in V$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \text{ für alle } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \text{ für alle } \vec{a} \in V,$
   Neutralelement $\vec{0}$ Addition
4. $\vec{a} \in V \text{ gibt genau } 1 - \vec{a} \in V$
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \text{ für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{a} \in V$
7. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \text{ für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } a \in V$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \text{ für alle } \vec{a} \in V$
   Neutralelement skalare Multiplikation

Beispiel

Spaltenvektor

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^n$$

→Mit der Addition und skalaren Multiplikation V = reeller Vektorraum.

Matrizen

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n \right\}$$

→Menge der mxn Matrizen mit Matrixaddition und skalare Multiplikation = reeller Vektorraum

Polynome

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Wobei x = Variabel und $a_{i,} i = 0,1,2 = reelle\ Zahlen$

Max. 2. Grades

<u>Addition:</u>

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

<u>Skalare Multiplikation:</u>

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2$$

→Die Menge $\mathbb{P}^2$ ist mit dieser Addition und skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum.

<u>Nullpolynom = Nullvektor</u>:

$$o(x) = 0 + 0x + 0x^2$$

Gilt für jedes Polynom! Da: $p(x) + o(x) = p(x)$

<u>Gegenvektor (entgegengesetzt):</u>

$$-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2$$

Rechengesetze:

- $\lambda(p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$
- $(\lambda + \mu)p(x) = \lambda p(x) + \mu p(x)$
- $\mathbb{R}[x] = \{p(x) | p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \textit{ mit } a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3, \dots\}$ = reeller Vektorraum

Stetige Funktionen

Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen mit Definitionsbereich [a, b]:

$$V = C[a, b] = \{f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

<u>Addition:</u> $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

<u>Skalare Mulitplikation:</u> $\lambda f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

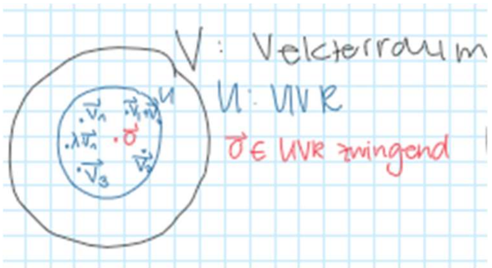
Neutralelement: $o : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto o(x) = 0$$

Unterraum

Definition

Es sei V ein Vektorraum und U eine nichtleere Teilmenge von V. Ist U ein Vektorraum bezüglich der Addition und der skalaren Multiplikation in V, so ist U ein Unterraum (oder Untervektorraum) von V.



Bedingungen:

- Nicht leere Menge
- $\vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ in } U \to \vec{a} + \vec{b} \text{ in } U$
- $\lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{a} \in U \to \lambda\vec{a} \text{ in } U$
- $\vec{0} \in U \text{ (zwingend!)}$

falls LGS im $\mathbb{R}^n$:

- $= 0$ $(homogen)$ dann UVR
- $\neq 0$ $(inhomogen)$ dann kein UVR

Nullvektorraum

Definition

Teilmenge $\{\vec{0}\}$: Nullvektorraum ist ein Untervektorraum von V.

Unterräume von V (triviale Lösungen):

- Ganzer Raum V
- Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$

Repetition Gerade und Ebene

Parameterfrom Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

oder

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Koordinatenform Gerade

$$ax + by + c = 0$$

Parameterform Ebene

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

oder

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Koordinatenform Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

Unterraum Ebene/Gerade:

Bedingung

- Ebene/Gerade MUSS Ursprung enthalten um Unterraum von $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}^2$
- Nullvektor muss zu jedem Unterraum gehören!

Vorgehen um Unterraum zu finden:

1. Beliebige Vektoren bestimmen
2. Addition überprüfen, Gleichung aufstellen
3. Skalare Multiplikation überprüfen

Lösungsraum

Homogenes LGS:

Definition

$$A\vec{x} = \vec{0}$$
$$mit\ A \in \mathbb{R}^{mxn}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

- Nie leer da Nullvektor immer dazu gehört!

Nullraum der Matrix A:

$$N(A) = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Inhomogenes LGS:

Definition

$$W = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{c}\ mit\ \vec{c} \neq \vec{0}\}$$

- KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$, den $A\vec{0} = \vec{0} \neq \vec{c}$

Durchschnitt von Unterräumen

Definition

$$U_1, \dots, U_n = UVR\ eines\ Vektorraums\ V, dann:$$
$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n\ wieder\ ein\ UVR.$$

Beispiel

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \middle| \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungsmenge:

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Vorgehen:

1. Koeffizientenmatrix der beiden Gleichungen bilden
2. Nach Gauss Verfahren auflösen
3. Falls freie Variabel = λ setzen
4. Lösungsmenge nach λ auflösen

Lineare Hülle auch Erzeugendensystem

Definition

V = Vektorraum, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$

Menge aller Linearkombinationen von $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$:

$$Lin(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = \{\vec{x} \in V | \vec{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}\ mit\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathcal{R}\}$$

Merke:

- Für Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^3$ min. 3 Vektoren
- Da Lineare Hülle = UVR, muss durch Ursprung verlaufen!!

Lineare Abhängigkeit

Linear abhängig:
wenn nicht alle $\lambda = 0$

Linear unabhängig:
$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0}$

Vorgehen überprüfen ob l.a. oder l.u.?
Vektoren:
1. Koeffizientenmatrix aufstellen
2. Gauss-Verfahren auflösen
3. Falls x,y,z = 0 dann l.u.

Polynome:
1. Linearkombinationsgleichung aufstellen
2. Polynome einfügen, lambda ausmultiplizieren
3. LGS aufstellen & auflösen
4. Falls $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, dann l.u.

Matrizen:
1. Linearkombination aus Matrizen
2. lamda mal Matrizen ausmultiplizieren
3. Gleiche $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$- Matriz = Nullmatrix
4. LGS aufstellen und lösen
5. $\lambda_i = 0$ sind l.u.

Basis

Definition

Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$ bilden eine Basis $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$, wenn:

Bedingung
- Vektoren sind l.u.
- $Lin(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = V$ d.h. jeder Vektor lässt sich als Linearkombination $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ darstellen

Basisvektoren: $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$
Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Es gibt verschiedene Basen in einem Vektorraum → nicht eindeutig

Vorgehen um Basis zu finden:
1. erweiterte Matrix
2. Gauss Verfahren → ZSF
3. Führende 1 → Anzahl bestimmt Rang = dim oder l.u. der 3 Vektoren

Merke:
- Basis im $\mathbb{R}^3$: $genau\ 3\ Vektoren$
- Matrix: $\mathbb{R}^{2\times 3}$: $6\ Dimensionen \rightarrow 6\ Matrizen$

Beispiel:
Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ bilden Basis für $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$$

Basis $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_x}, \dots, \overrightarrow{e_n})$: kartesische Basis/Standardbasis

Definition

Jedes Erzeugendensystem (Lineare Hülle) von U enthält eine Basis von U.

Dimension

Definition

Die Anzahl der Vektoren einer Basis eines Vektorraums V ist die Dimension des Vektorraumes.

Notation: dim(V)

Beispiel: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
$dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4\ Matrizen$

Vorgehen um Dimension zu finden:
1. erweiterte Matrix
2. Gauss Verfahren → ZSF
3. Führende 1 → Anzahl bestimmt Rang = dim

Koordinatenvektor

Definition

Sei V ein reeller Vektorraum und $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ eine Basis von V. Sei $\vec{v}$ ein beliebiger Vektor aus V mit der Darstellung: $\vec{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}$, wobei die eindeutig bestimmten Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

$$\boldsymbol{\vec{v}_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} \\ \boldsymbol{\lambda_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix}$$ (Koordinatenvektor von $\boldsymbol{\vec{v}}$ bezüglich $\boldsymbol{\mathcal{B}}$)

Vorgehen um Koordinaten zu finden:
1. Vektorgleichung aufstellen
2. Gauss Verfahren
3. Auflösen für λ
4. In Vektorgleichung einsetzen

Lineare Abbildungen

Definition

Lineare Abbildungen sind "natürliche" Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Eine Abbildung $f : x \in V \mapsto y = f(x) \in W$ heisst lineare Abbildung vom endlichdimensionalen VR V in den endlichdimensionalen VR W, falls gilt:

Bedingung linear

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall\, x,y \in V$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ und\ \forall\, x \in V$
3. $f(0) = \vec{0}$

Merke:

Jede lineare Abbildung $f : V \mapsto W$ lässt sich durch eine $m \times n$ Matrix A beschreiben.

Darstellungsmatrix

Definition

Ist $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die kartesiche Bases des $\mathbb{R}^n$ und ist eine beliebige lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben, so bilden die Vektoren:

$$\vec{a}_j := f(\vec{e}_j) \in \mathbb{R}^m für\ alle\ j = 1, \dots, n,$$

die Spalten einer $Matrix\ A := (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{A\vec{x} = f(\vec{x})}$

Vorgehen um Darstellungsmatrix zu finden:

1. Einheitsvektoren in $f(x)$ einsetzen
2. Die Spaltenvektoren von 1. aneinander reihen
   ➔ Darstellungsmatrix

Für Polynome:

1. Anstatt Einheitsvektoren Basen einsetzen
2. Koordinatenvektor erstellen
3. A = aneinander gereihte Koordinatenvektoren

Kern & Bild

Definition Kern

Die Menge aller Vektoren, welche auf null abgebildet werden, heisst Kern der Funktion f.

$$Ker(f) = \{\vec{x} \in V\ |f(\vec{x}) = \vec{0} \in W\}$$

Merke:

- $Ker(f)$ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$.
- $L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\ |\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
-
- Der Nullvektor ist immer ein UVR!
- $Ker(f)$ ist ein Unterraum von V.
- $\boldsymbol{A\vec{x} = f(\vec{x})}$

Vorgehen um $Ker(f)$ zu bestimmen:

1. Darstellungsmatrix A von f
2. homogenenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$
3. Gauss-Jordan Verfahren
4. $Ker(f)$ = Lösungsmenge LGS
5. $dim(Ker(f))$ = Anzahl freier Variabeln.

Definition Bild

Die Menge aller Bildvektoren $y \in V$ heisst Bild der Matrix A.

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \in W | \vec{x} \in V\}$$

Merke:

- $\vec{b}$ liegt im Bild von A, wenn das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist.
- Bild f ist ein Unterraum von W.
- Der Nullvektor ist immer ein UVR!
- $\boldsymbol{A\vec{x} = f(\vec{x})}$

Vorgehen um $Im(f)$ zu bestimmen:

1. Darstellungsmatrix A von f
2. homogenenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ oder $A\vec{x} = \vec{b}$
3. Gauss-Jordan Verfahren
4. $Im(f)$ = Spaltenvektoren von A
5. $dim(Im(f)) = rang(A)$ = Anzahl führender Einsen.

Bild von einer Matrix M finden:

1. Koordinatenvektor bestimmen mithilfe der Basen
2. Darstellungsmatrix mal Koordinatenvektor
3. $Im(M) = A \cdot \vec{v}_{B,M} = \vec{b}$

Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim\big(Ker(f)\big) + \dim\,(Im(f))$$

Eigenschaften

Zuerst immer Darstellungsmatrizen berechnen!

Addition:

$$f(x) + h(x) = A + C$$

Verkettung:

$$f(x) \circ g(x) = A \cdot B$$

Nur gültig wenn:

Definitionsbereich $f(x)$ = Wertebereich $g(x)$

Invertiert:

$$f(x)^{-1} = A^{-1}$$

Bijektive lineare Abbildungen

Satz

$\dim(V) = \dim(W) = n\ und\ f{:}\,V \to W$ eine lineare Abbildung mit der $n \times n\ Darstellungsmatrix\ A$:

f ist bijektiv, wenn min.eine der Bedinungen gelten:

1. $Ker(f) = \{\vec{0}_V\}\ und\ Im(f) = W$
2. $rang(A) = n$ (Spaltenvektoren in A sind l.u.)
3. A ist invertierbar
4. $\det(A) \neq 0$

Orthogonalprojektion

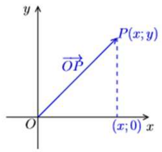
Orthogonalprojektion x-Achse

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A = \left(f(\overrightarrow{e_1})\ f(\overrightarrow{e_2})\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Orthogonalprojektion y-Achse

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A = \left(f(\overrightarrow{e_1})\ f(\overrightarrow{e_2})\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion xy-Ebene

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

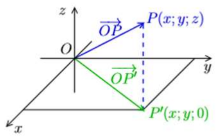
Darstellungsmatrix:

$$A = \left(f(\vec{e}_x) f(\vec{e}_y)\ f(\vec{e}_z)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion xz-Ebene

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$



Darstellungsmatrix:

$$A = \left(f(\vec{e}_x) f(\vec{e}_y)\ f(\vec{e}_z)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion yz-Ebene

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A = \left(f(\vec{e}_x) f(\vec{e}_y)\ f(\vec{e}_z)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion auf Vektor $\vec{a}$

$$f_a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{b} \mapsto f_a(\vec{b}) = \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = A_p \vec{b}$$

Darstellungsmatrix:

$$A_p = \left(f_a(\vec{e}_x)\ f_a(\vec{e}_y)\ f_a(\vec{e}_z)\right) =$$

$$\frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \vec{a}^T$$

geometrische Transformationen

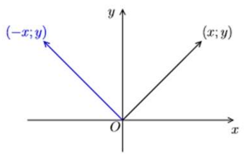
Spiegelung an der y-Achse

$$f_{Sy}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto f_{Sy}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A_{Sy} = \left(f_{Sy}(\overrightarrow{e_x})\ f_{Sy}(\overrightarrow{e_y})\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



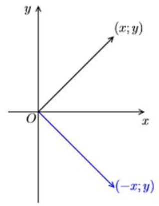
Spiegelung an der x-Achse

$$f_{Sx}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto f_{Sx}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A_{Sx} = \left(f_{Sx}(\overrightarrow{e_x})\ f_{Sx}(\overrightarrow{e_y})\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Spiegelung am Nullpunkt in Ebene

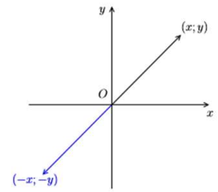
$$f_{SN}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto f_{SN}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A_{SN} = \left(f_{SN}(\overrightarrow{e_x})\ f_{SN}(\overrightarrow{e_y})\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Spiegelung Gerade in Ebene durch Nullpunkt

$$g: ax + by = 0, \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Projektion $\overrightarrow{0P}$ auf $\vec{n}$:

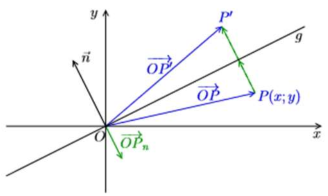
$$\overrightarrow{0P_n} = A_p \overrightarrow{0P} \text{ mit } A_p = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\vec{n}^T = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung:

$$f_g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\overrightarrow{0P} \mapsto \overrightarrow{0P'} = f_g(\overrightarrow{0P}) = A_g \overrightarrow{0P}$$

Darstellungsmatrix Spiegelung an g:

$$A_g \coloneqq \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$



Vorgehen:
1. Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen
2. Projektion $\overrightarrow{0P}$ auf $\vec{n}$
3. Spiegelvektor

Spezielle Gerade:

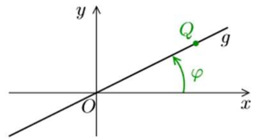
$$g: y = x \Leftrightarrow -x + y = 0$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix:

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2 \cdot (-1)^2 & -2 \cdot (-1) \cdot 1 \\ -2 \cdot (-1) \cdot 1 & |\vec{n}|^2 - 2 \cdot 1^2 \end{pmatrix}$$

Unbekannte Gerade/ Winkel zwischen x-Achse und g

- Falls wir die Koordinatengleichung der Geraden nicht kennen, sondern nur den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Geraden g, müssen wir zunächst einen Normalenvektor bestimmen.



Sei Q ein Punkt auf der Geraden g, so dass $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ ist. Dann hat Q die Koordinaten $Q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu g.

Die zugehörige Darstellungsmatrix:

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 - 2(-\sin(\varphi))^2 & -2(-\sin(\varphi))\cos(\varphi) \\ -2(-\sin(\varphi))\cos(\varphi) & 1 - 2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2(\varphi) & 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 1 - 2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

denn $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ und $\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2(\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1$.

Spiegelung Ebene durch Ursprung

- Die Überlegung für die Spiegelung an einer Ebene $ax + by + cz = 0$ durch den Ursprung ist analog. Die entsprechende lineare Abbildung ist:

$$f_E: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\overrightarrow{OP} \mapsto f_E(\overrightarrow{OP}) = A_E \overrightarrow{OP}$$

mit $A_E = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$ und

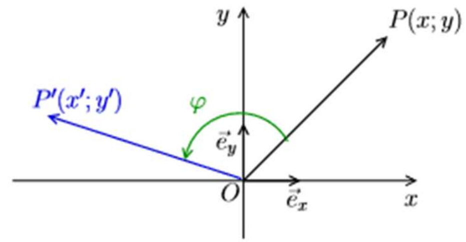
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Drehungen
Ebene

$$P(x, y) \to P'(x', y')$$

Lin. Abb.:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\overrightarrow{0P} \mapsto \overrightarrow{0P'} = f(\overrightarrow{0P}) = A_\varphi \overrightarrow{0P}$$



Drehmatrix:

$$A_\varphi = \left(f(\vec{e_x})\ f(\vec{e_y})\right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

- Determinante Drehmatrix immer = 1

$$\det(A_\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}$$
$$= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

- Drehmatrix: orthogonale Matrix

$$A_\varphi^T A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

- Drehmatrix für Winkel 0°

$$A_{0°} = \begin{pmatrix} \cos(0°) & -\sin(0°) \\ \sin(0°) & \cos(0°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

- *Drehmatrix für $-\varphi$*

$$A_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = A_\varphi^T = (A_\varphi)^{-1}$$

- *Drehmatrix α&β*

$$A_\beta A_\alpha = A_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

- *Komposition um φ und $-\varphi$*

$$A_{-\varphi}A_\varphi = A_{-\varphi+\varphi} = A_{0^\circ} = I_2$$

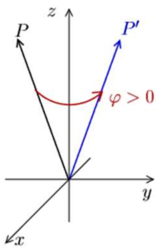
$\rightarrow A_\varphi^{-1} = A_{-\varphi}$

Raum

Lin. Abb.:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{0P} \mapsto \overrightarrow{0P'} = f\left(\overrightarrow{0P}\right) = A_\varphi \overrightarrow{0P}$$



Drehmatrix:

$$A_\varphi = \left(f(\vec{e}_x) f(\vec{e}_y)\, f(\vec{e}_z)\right)$$

positive Drehrichtung mittels Rechtsregel!

Winkel um x-Achse

Drehmatrix:

$$A_{x\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Winkel um y-Achse

Drehmatrix:

$$A_{y\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Winkel um z-Achse

Drehmatrix:

$$A_{z\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel

Definition

$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\right)$ *und* $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$ zwei Basen des Vektorraums V. Dann nennt man die $n \times n$ *Matrix* $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$, deren Spaltenvektoren die Koordinatenvektoren $k_\mathcal{C}(\vec{b}_k)$ der Basisvektoren $\vec{b}_k \in \mathcal{B}$ bezüglich Basis $\mathcal{C}$ sind, die Basistransformationsmatrix von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{C}$. Es gilt also:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \left(k_\mathcal{C}(\vec{b}_1)\; k_\mathcal{C}(\vec{b}_2)\; k_\mathcal{C}(\vec{b}_k)\right)$$

Satz

Satz

Seien $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ und $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$ zwei Basen des Vektorraumes V und $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ die Basistransformationsmatrix von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{C}$.
Dann gilt:

- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\, \vec{v}_\mathcal{B} = \vec{v}_\mathcal{C}$.
- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *ist eindeutig bestimmt.*
- $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *ist invertierbar mit*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$$

Basistransformationsmatrix

Die **Basistransformationsmatrix** $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ ergibt sich also mit dem Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\left(\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2 \;\middle|\; \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(I_2 \;\middle|\; P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\right)$$

und ein analoges Prozedere gilt für zwei beliebige Basen in $\mathbb{R}^n$.

Falls die alte Basis die kartesische Basis, dann:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \left(\vec{b}_1\, \vec{b}_2\, \vec{b}_3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ist die neue Basis die kartesische Basis, dann ist die Basistransformationsmatrix gleich der Matrix, die durch die Basisvektoren der alten Basis gebildet wird: $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}$.

Beispiel

Der Koordinatenvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ in der Basis $\mathcal{B}$ lautet:

$$\vec{v}_\mathcal{B} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}\, \vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet: $\vec{v} = -2\vec{b}_2 + 6\vec{b}_3$.

Der Vektor $\vec{w} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$ in der kartesischen Basis lautet:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}\, \vec{w}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Komplexe Zahlen

Kartesische Form

Definition

- imaginäre Einheit i

$$i^2 = -1$$

- komplexe Zahl z

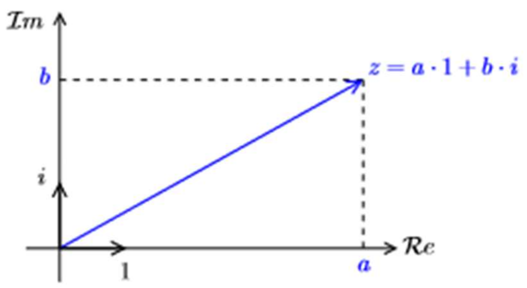
$$z = a + bi, mit\ a, b\ \in \mathbb{R}$$

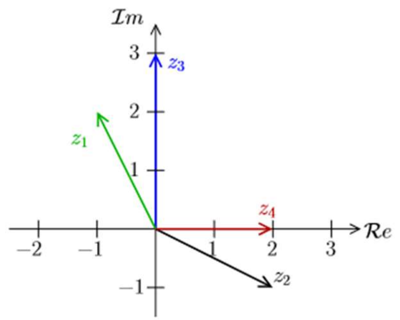
$$a = \mathcal{Re}(z)\ und\ b = \mathcal{Im}(z)$$

- Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Gauss'sche Zahlebene





Definition

$$z_1 = a_1 + b_1 i \;\&\; z_2 = a_2 + b_2\, i$$

Betrag

$$|z| = |a + b\, i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

Differenz

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

- in $\mathbb{R}^2$ keine Multiplikation vorhanden
- Keine Nullteilung

inverse Elemente

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a - bi)$$

➔ Als Kontrolle $z \cdot z^{-1} = 1$ rechnen!

konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Rechenregeln:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\mathcal{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})\ und\ \mathcal{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Quotient

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2$$

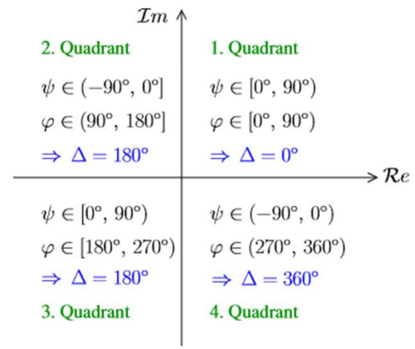
Wichtige Potenzen

i^0	1
i^1	i
i^2	-1
i^3	$-i$
$\boldsymbol{i^4}$	$\boldsymbol{1}$

Polarform

$$z = a + bi = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{=a} + \underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_{=b}\, i = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i)$$

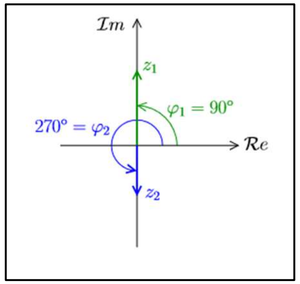
- $r = |z|$
- $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta = \psi + \Delta$



Für Zahlen die auf der imaginären Achse liegen ist:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta = \psi + \Delta$$

<u>nicht</u> anwendbar!



Konjugierte Zahl in Polarform:

$$\bar{z} = r \cdot \cos(-\varphi) + r \cdot \sin(-\varphi)\, i =$$

$$r \cdot (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\, i)$$

Rechenregeln

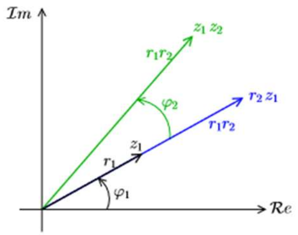
Addition und Subtraktion NUR in kartesischer Form möglich!

Multiplikation:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\, i)$$

geometrische Konstruktion:

- Drehstreckung
- $r_2 - fache\ gestreckt$
- $\varphi_2\ gedreht$



Da kommutativ: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\, i)$$

geometrische Konstruktion:

- $\frac{1}{r_2} - fache\ gestreckt$
- $\varphi_2\ zurückgedreht$
  - $\varphi_2 > 0: Drehung\ negativ$
  - $\varphi_2 < 0: Drehung\ positiv$

Eulersche Form

$$z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i$$

Für $\varphi = \pi$:

$$e^{i\pi} = -1$$

Eulersche Form in Polarform

$$z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i) = r \cdot e^{i\varphi}$$

Übersicht

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + b\,i$	$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i)$	$z = r\,e^{i\varphi}$
$a = r\,\cos(\varphi)$ $b = r\,\sin(\varphi)$	$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$ mit $\Delta = \begin{cases} 0°, & z \text{ in 1. Quadrant} \\ 180°, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \\ 360°, & z \text{ in 4. Quadrant} \end{cases}$	

Bemerkung:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

konjugierte Zahl in Eulerschen Form

$$\bar{z} = \overline{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$$

Satz von Moivre (Potenz)

Eulersche Form:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Polarform:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)\, i)$$

Vorgehen kartesische Form potenzieren:

1. Kartesiche Form → eulerschen Form
2. Satz von Moivre anwenden

Operation Potenzieren:

- “wiederholte” Multiplikation
- $r = Streckung, \varphi = Drehung$

Wurzeln

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

$$max.\, n\ reelle\ Lösungen \mathrel{\hat{=}} Grad\ n$$

Fundamentalsatz der Algebra

Definition

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

$$mit\ a_i \in \mathbb{C}, i = 0, \dots n$$

Anmerkung:

- Unbekannte in $\mathbb{C}$ mit z bezeichnet statt x
- Linearfaktorzerlegung:
  $a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$,
  $mit\ z_1, z_2, \dots z_n\ Polynomnullstellen)$
- nur reelle Koeffizienten→ Wurzeln paarweise

Beispielsweise: $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die Art der Wurzeln hängt dabei vom Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Wurzeln: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D = 0$: eine doppelte reelle Wurzel: $z_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- $D < 0$: zwei konjugiert komplexe Wurzeln:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|D|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\, i}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{|D|}\, i$$

Somit: $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{|D|}\, i$ und $z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{|D|}\, i = \bar{z}_1$

n-te Wurzel aus a

Definition

$$z^n = a = a_0 e^{i\alpha} \; mit \; a \in \mathbb{C}$$
$$z = \sqrt[n]{a}$$

Eulerschen Form:

$$z^n = a \Leftrightarrow \left(re^{i\varphi}\right)^n = a_0 e^{i\alpha} \Leftrightarrow$$
$$r^n e^{in\varphi} = a_0 e^{i(\alpha + k\cdot 360°)}, k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k = re^{i\varphi_k} = r(\cos(\varphi_k) + \sin(\varphi_k)\, i)$$
$$r^n = a_0 \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{a_0}$$
$$\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360°}{n}, k \in \mathbb{Z}, k = 0, \dots, n-1.$$

Beispiel:

Wir bestimmen die Wurzeln der Gleichung

$$z^4 = 8 + 8\sqrt{3}\, i.$$

Zunächst bringen wir die rechte Seite der Gleichung in die Eulersche Form:

$$a_0 = 8\sqrt{1+3} = 8\sqrt{4} = 16$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) + 0° = \arctan(\sqrt{3}) = 60°.$$

Somit gilt: $z^4 = 16\, e^{i\,60°}$.
Der Betrag und das Argument der Wurzeln lauten:

$$r = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$\varphi_k = \frac{60° + k \cdot 360°}{4} = 15° + k \cdot 90°, \quad k = 0, \dots, 3.$$

Wenn $z_1 = 1 - i \; ist \; \bar{z}_1 = 1 + i$ auch eine Lösung der Wurzel.

Eigenschaften

Polarform oder Eulersche Form kürzen:

2π= 1 Kreisumfang

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei V ein Vektorraum und $f: V \to V$ eine lineare Abbildung.

- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$: $\boldsymbol{Eigenwert}$
- $\vec{x}$: $\boldsymbol{Eigenvektor}$ *zu Eigenwert* λ

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$

$$mit\ \vec{x} \neq \vec{0}\ und\ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Satz:

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Charakteristische Matrix A:

$$A - \lambda I_n$$

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\det(A - \lambda I) = \vec{0}$$

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Vorgehen Eigenwert bestimmen:

1. $\det(A - \lambda I)$
2. Laplace
3. faktorisieren
4. Nullstellen bestimmen = Eigenwerte

Beispiel:

Wir berechnen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Die Eigenwerte sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Die Lösungen von $p(\lambda) = 0$ sind: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$. Die Eigenwerte lauten demnach: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenvektoren bestimmen:

1. Eigenwerte berechnen
2. Eigenwerte in $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ einsetzen
3. Mit Hilfe des Gauss-Verfahrens ausrechnen
4. → Eigenvektoren zu Eigenwerten

Beispiel:

Die Berechnung der Eigenvektoren geschieht mit der Gleichung:

$$(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 2 \\ 3 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

- Setzen wir $\lambda_1 = 4$ ein, dann erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Verfahren liefert:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Variable y ist frei, d.h.: $y = \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Es folgt: $x = y = \alpha$. Somit hat das System unendlich viele Lösungen.

Eigenraum bestimmen:

1. Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen
2. Lösungsmenge des Systems zum λ_i: $V_{\lambda i}$ = Eigenraum

Beispiel:

Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ lautet:

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Dieser Unterraum beschreibt eine Gerade, deren Richtungsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Dieser Richtungsvektor $\vec{v}_1$ bildet eine Basis von V_{λ_1}, d.h.: $V_{\lambda_1} = \mathrm{Lin}(\vec{v}_1)$ und $\dim(V_{\lambda_1}) = 1$.

Der Richtungsvektor $\vec{v}_1$ und alle von Null verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_1$, d.h. $\alpha\vec{v}_1$ sind Eigenvektoren zum λ_1.

Vielfachheit

algebraische:

$$\mu: p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Erkennt man an Eigenwerten:

einfache/doppelte Nullstellen

geometrische:

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

Anzahl Vektoren in der Lin()

Merke:

$$1 \leq \gamma \leq \mu$$

Spektrum und Spektralradius

Definition Spektrum

Menge der Eigenwerte

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | es\ existiert\ \vec{x} \neq \vec{0}\ mit\ A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Definition Spektralradius

$$\rho(A) = grösster\ Betrag\ aller\ Eigenwerte$$

Eigenschaften:

- Anzahl k verschiedene Eigenwerte
$$1 \leq k \leq n$$
- Summe algebraischer Vielfachheit = n
$$\mu_1 + \dots + \mu_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j = n$$
- **Spur:** Summe aller Hauptdiagonalemelemente
$$Spur(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$
$$Spur(A) = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \dots + \mu_k\lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j\lambda_j$$
- Determinante von A = Produkt:
$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{\mu_k}$$

Satz:

Sei eine Matrix $n \times n$ Matrix. Dann gilt:

1. Ist λ ein Eigenwert von A und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zum λ, dann ist λ^k ein Eigenwert von A^k und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zum λ^k
2. A ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Eigenwerte von Null verschieden sind.
$$\lambda \neq 0 \rightarrow invertierbar$$
3. Ist λ ein Eigenwert und A invertierbar, dann ist der Kehrwert $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert der inversen Matrix A^{-1}

Satz:

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen reellen symmetrischen Matrix A besitzen folgende Eigenschaften:

1. Alle Eigenwerte sind reell
2. Für jeden Eigenwert λ gilt:
$$\gamma_\lambda = \mu_\lambda$$
3. Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal (d.h. das Skalarprodukt der Eigenvektoren ist Null).

Beachte:

Vektoren mit komplexen Komponenten = orthogonal wenn:

$$\overline{\overrightarrow{x_1}} \cdot \overrightarrow{x_2} = 0$$

Ähnlichkeit

Definition

A und B: $n \times n$ Matrizen, sind ähnlich wenn:

$$P^{-1}AP = B$$

Vorgehen um Ähnlichkeit zu überprüfen:

1. Definitionsgleichung
2. $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
3. Gleichung erweitern
4. Matrizenmultiplikation
5. Gleichung = 0 umstellen
6. (beliebige) Zahl bestimmen

Beispiel:

Wir zeigen, dass die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind. Die Definitionsgleichung für Ähnlichkeit

$$P^{-1}AP = B$$

kann man durch Multiplikation von links mit P umschreiben zu

$$\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}AP = PB \Leftrightarrow AP = PB$$

d.h., wir suchen eine invertierbare Matrix $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matrixmultiplikation führt zu

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ -4a-2c & -4b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 4a-2b \\ 2c & 4c-2d \end{pmatrix}$$

und damit zu folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2b & = & 4a-2b \\ -4a-2c & = & 2c \\ -4b-2d & = & 4c-2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a+c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-c \\ b=-c \\ c,d \text{ beliebig} \end{array}\right.$$

Eine einfache Wahl ist $c = -1$ und $d = 1$. Somit sind a und b gleich 1 und wir erhalten:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Beispiel zeigt, dass die Matrix P im Allgemein nicht eindeutig bestimmt ist. Es gibt viele Matrizen, mit denen man die Ähnlichkeit von A und B zeigen kann.

Satz von ähnlichen Matrizen:

A und B: $n \times n$ Matrizen, dann gilt:

1. Determinanten stimmen überein $\det(A) = \det(B)$
2. A ist nur invertierbar wenn B invertierbar
3. A und B: gleiche charakeristische Polynom
4. A und B: gleiche Eigenwerte

nur auschliessen möglich → "nicht ähnlich"

Diagonalisierbar

Definition

$n \times n$ quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, wenn Diagonalmatrix D existiert, welche zu A ähnlich ist.

$$P^{-1}AP = D$$

- $D: Hauptdiagonalelemente = Eigenwerte\ von\ A$ (doppelte: alle ausschreiben)
- $P: (\vec{x}_1 \vec{x}_2)$ (Eigenvektoren von Eigenwerten)
- $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beispiel:

Ist $P^{-1}AP = D$, dann gilt: $AP = PD$. Seien $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ die Spaltenvektoren von P und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und D. Dann gilt einerseits:

$$PD = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \ldots & \vec{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \ldots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \ldots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \ldots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{x}_1 & \lambda_2 \vec{x}_2 & \ldots & \lambda_n \vec{x}_n \end{pmatrix}$$

Andererseits folgt aus der Gleichung $AP = PD$:

$$A\begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \ldots & \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \ldots & A\vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{x}_1 & \lambda_2 \vec{x}_2 & \ldots & \lambda_n \vec{x}_n \end{pmatrix}$$

Somit: $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$, …, $A\vec{x}_n = \lambda_n \vec{x}_n$.
Dies bedeutet, dass die Vektoren $\vec{x}_i$ Eigenvektoren zum λ_i, $i = 1, \ldots, n$ sind.
Damit P invertierbar ist, müssen die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ linear unabhängig sein.

Satz:

$n \times n$ quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

- Existiert Diaganolamatrix D und invertierbare Matrix P
  - n Spaltenvektoren von P → l.u. Eigenvektoren von A
  - Diagonalelemente von D = Eigenwerte von A.
- n linear unabhängige Eigenvektoren von A bilden Basis von $\mathbb{R}^n$ = Eigenvektorbasis

Satz:

$n \times n$ quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, wenn **mindestens** eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
2. A hat n verschiedene Eigenwerte
3. Für jeden Eigenwert λ von A gilt:
$$\gamma_\lambda = \mu_\lambda$$
4. A ist rell und symmetrisch

Potenzen einer Matrix

k-te Potenz von A:

$$A^k = PD^kP^{-1}, k \geq 1$$

Reihenfolge wichtig!

$$AP = PD, A = PDP^{-1}$$

Differentialgleichungen

Wir suchen die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t), && \text{mit } y_1(0) = 7, \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) - 2y_2(t), && \text{mit } y_2(0) = 1, \\ y_3'(t) &= 2y_3(t), && \text{mit } y_3(0) = -1. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die wir in Beispiel 4.5.6. diagonalisiert haben. Die Eigenwerte von A, die wir mit ihren Vielfachheit zählen, sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -3$

und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die invertierbare Matrix P:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laut dem Satz ist die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$:

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{2t}\vec{v}_1 + c_2 e^{2t}\vec{v}_2 + c_3 e^{-3t}\vec{v}_3.$$

Wir bestimmen nun die Konstante c_1, c_2 und c_3, indem wir das System $P\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Verfahren lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Somit: $c_3 = -2$, $c_2 = -1$ und $c_1 = 1 - c_3 = 3$.

Die Lösung des Systems lautet:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = 3e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^{-3t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6e^{2t} + e^{-3t} \\ 3e^{2t} - 2e^{-3t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix},$$

also:

$$y_1(t) = 6e^{2t} + e^{-3t}, \quad y_2(t) = 3e^{2t} - 2e^{-3t} \quad \text{und} \quad y_3(t) = -e^{2t}.$$

Nice to know

Mitternachtsformel:

Falls $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$