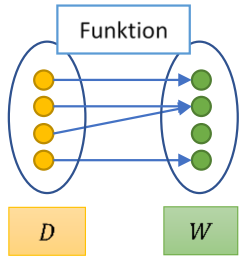
Funktionen

Definition

Jedem Element einer Menge D wird genau ein Element aus einer Menge W zuordnet.

$$f: D \to W$$
$$x \to f(x) = \cdots$$



Polynome und Polynomdivision

$$\begin{array}{ll}
(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 & \mid \; x^3 : x = x^2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} & \\
\quad -x^2 - 5x & \mid -x^2 : x = -x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} & \\
\qquad -6x + 6 & \mid -6x : x = -6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Eine *Polynomfunktion* vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Quadratische Funktionen

$y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

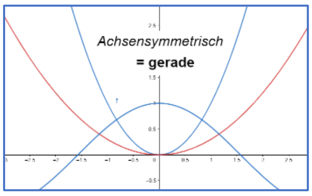
Scheitelpunkt

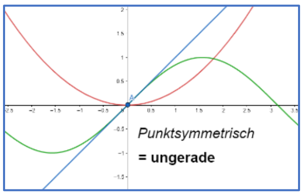
- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- S = $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Eigenschaften von Funktionen

<u>Symmetrie</u>

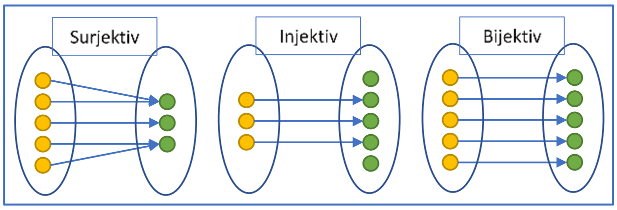
- *gerade* $\quad f(-x) = f(x)$
- *ungerade* $\quad f(-x) = -f(x)$





<u>Monotonie</u>

- *monoton wachsend* $\quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* $\quad f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) > f(x_2)$



Operationen von Funktionen

- Addition $\quad x \to f(x) + g(x)$
- Subtraktion $\quad x \to f(x) - g(x)$
- Multiplikation $\quad x \to f(x) \cdot g(x)$
- Division $\quad x \to f(x) \,/\, g(x)$

Komposition

- Verkettung $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Intervalle

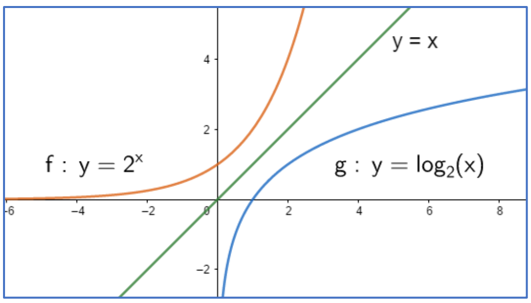
- Abgeschlossen $\quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Offen $\quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Halboffen $\quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- Unendlich $\quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Umkehrfunktion

- Bijektive Funktion $\quad f: D \to W$
- Umkehrunktion f^{-1} $\quad g: W \to D$

Vorgehen $f(x) = y$

- Nach x auflösen $\quad \to x = g(y)$
- Variablen vertauschen $\quad \to y = g(x)$



Folgen und Reihen

Definition • $n \in \mathbb{N}^* \to a_n \in \mathbb{R}$ • $(a_k) = (a_k)_{k\geq 1} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n-1}, \dots)$ Die Elemente einer Folge heissen *Glieder* der Folge $\to a_n$.	Abkürzungen • A = Anfangs-Glied • d = Differenz • q = Quotient

Arithmetische Folge $a_k = (2, 3, 4, 5, \dots) \to d = 1, A = 2$	**Geometrische Folge** $a_k = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right) \to q = \frac{1}{2}, A = 1$
N-tes Glied $a_n = A + (n-1) \cdot d$	N-tes Glied $a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$
Mittelwert $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	Mittelwert $\|a_k\| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$
Partial-Summe $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot (A + \frac{n-1}{2} \cdot d)$	Partial-Summe $S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

Grenzwerte von Folgen

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat einen *Grenzwert / Limes* falls die Zahl $a \in \mathbb{R}$ jede noch so kleine Umgebung des Grenzwertes erreicht und nicht mehr verlässt.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: |a_n - a| < \epsilon$$

- Folgen mit Grenzwert — *Konvergent* — $a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots)$
- Folgen ohne Grenzwert — *Divergent* — $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \dots)$
- Beliebig gross (∞) / klein ($-\infty$) — *bestimmt divergent* — $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)$

Eine Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert!

Unendliche geometrische Reihe $S = \sum_{k=1}^{\infty} A q^{k-1} = \frac{A}{1-q}$ Bedingung • $\|q\| < 1$	<u>Beispiel</u> $a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \dots = 14$ • $q = \frac{1}{2} \to$ Die Reihe *konvergiert* • $S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$

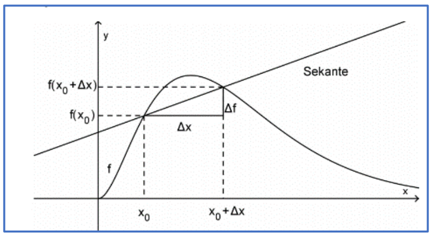
Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Sekanten-Steigung

Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall im Definitionsbereich von f. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heisst *Differenzenquotient* von f.



Tangentengleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Grenzwert einer Funktion

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* y_0, falls

- für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$

Bemerkungen

- Die Stelle x_0 muss nicht im Definitionsbereich D sein

Konvergenz / Divergenz

- *Konvergenz* Funktion mit Grenzwert $x \to \infty$
- *Divergenz* Funktion ohne Grenzwert $x \to \infty$
- *Bestimmte Divergenz* Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$

Beispiel *Grenzwert*

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$
1	0	1
2	0.5	1.5
3	0.66	1.66
4	0.75	1.75
5	0.8	1.8
10	0.9	1.9
100	0.99	1.99
1000	0.999	1.999
$n \to \infty$	$x_0 = 1$	2

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Differenzierbar

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Existiert, so heisst f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als *Ableitung*.

Eine Funktion ist *differenzierbar, falls*

- Die Kurve keine Knicke macht

Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion ist *stetig*, falls

- die Kurve keine Sprünge macht
- man den Graphen der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (q < 1)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$

- k = höchste Potenz

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0+0}$$

Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$

- k = höchste Potenz
- a = grösste Basis

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3\cdot 3^n+2^n}{3^n+2} = \frac{\frac{3\cdot 3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2}{3^n}}$$

$$\frac{3+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0}$$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)}+\sqrt{b(n)}$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}{1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2+n)}-\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}-\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Erweitern zu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} 4n = \frac{3n}{2}\cdot a \\ a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3} \end{gathered}}$$

Ableitung – Grundfunktionen

- Potenz

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

- Exponent

$$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$
$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$$

- Logarithmus

$$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \log_a(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Ableitung – Höhere Ableitungen

- Summe / Differenz

$$f(x) = u + v \qquad f'(x) = u' + v'$$

- Produkt

$$f(x) = u \cdot v \qquad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Quotient

$$f(x) = \frac{u}{v} \qquad f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

- Kettenregel

$$f(x) = (u \circ v) = u(v) \qquad f'(x) = u'(v) \cdot v'$$

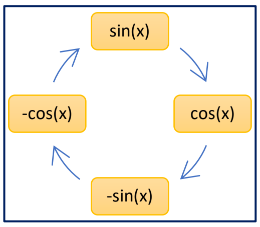
- Logarithmus

$$f(x) = u^v \qquad f'(x) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u}\right)$$

- Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ableitung – Geometrische Funktionen



$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- Tangens

$$f(x) = \tan(x) \qquad f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$f(x) = \cot(x) \qquad f'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Integral

Unbestimmtes Integral

Potenzfunktionen

- $\int (x^{\alpha})\,dx \quad = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
- $\int \left(\frac{1}{x}\right)\,dx \quad = \ln|x| + C$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- $\int (e^x)\,dx \quad = e^x + C$
- $\int (a^x)\,dx \quad = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int (\ln(x))\,dx \quad = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int (\log_a(x))\,dx \quad = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

Geometrische Funktionen

- $\int (\cos(x))\,dx \quad = \sin(x) + C$
- $\int (\sin(x))\,dx \quad = -\cos(x) + C$
- $\int (\tan(x))\,dx \quad = -\ln|\cos(x)| + C$

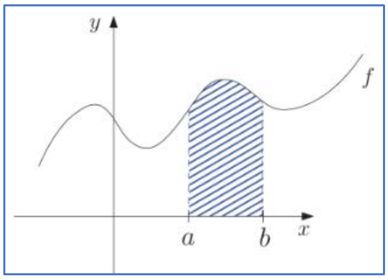
Weitere Funktionen

- $\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \quad = \arctan(x) + C$
- $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx \quad = \arcsin(x) + C$
- $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx \quad = \arccos(x) + C$

Integralregeln

- $\int f(x-k)\,dx \quad = F(x-k) + C$
- $\int f(x \cdot k)\,dx \quad = \frac{1}{k} F(x \cdot k) + C$
- $\int \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\,dx \ = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$

Bestimmtes Integral



Für ein bestimmtes Integral von f über $[a,b]$ schreibt man.

- $\int_a^b f(x)\,dx$

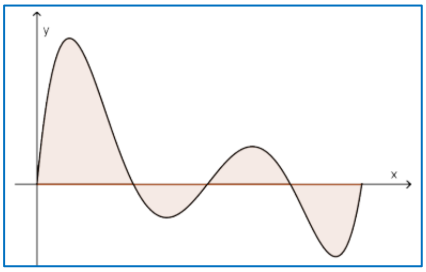
Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a,b]$ *stetige* Funktion.

- $F'_a(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a,b]$ *stetig* Funktion, und sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.

- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

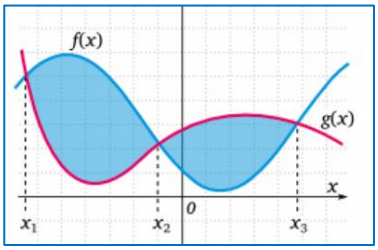
Flächeninhalt bei **wechselndem Vorzeichen** von $f(x)$



- $[a,b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \dots, x_n = Nullstellen$

$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Flächeninhalt zwischen **zwei Kurven** $f(x)$ und $g(x)$



- $[a,b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \dots, x_n = Schnittpunkte$

$$\left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))\right|$$

Monotonie

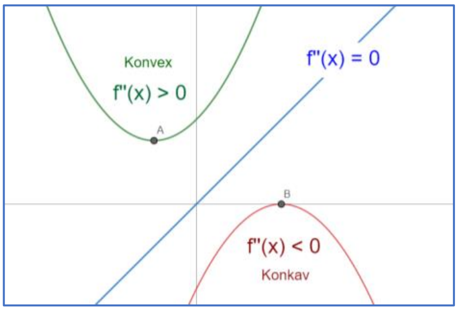
Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion in D mit $x_0 \in D$.

- $f'(x_0) > 0$ Streng monoton wachsend
- $f'(x_0) < 0$ Streng monoton fallend
- $f'(x_0) = 0$ Horizontale Tangente

Krümmung

Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung

- $f''(x_0) > 0$ *Konvex* Nach links gekrümmt
- $f''(x_0) < 0$ *Konkav* Nach rechts gekrümmt
- $f''(x_0) = 0$ Keine eindeutige Krümmung



Relative Extrema

- *Relative Extremal-**Stelle*** x_0 *Minimal- / Maximalstelle*
- *Relatives Extremum* y_0 *Maximum / Minimum*
- *Relativer Extremal-**Punkt*** $P_0 = (x_0, y_0)$ *Hoch- / Tiefpunkt*

Berechnung

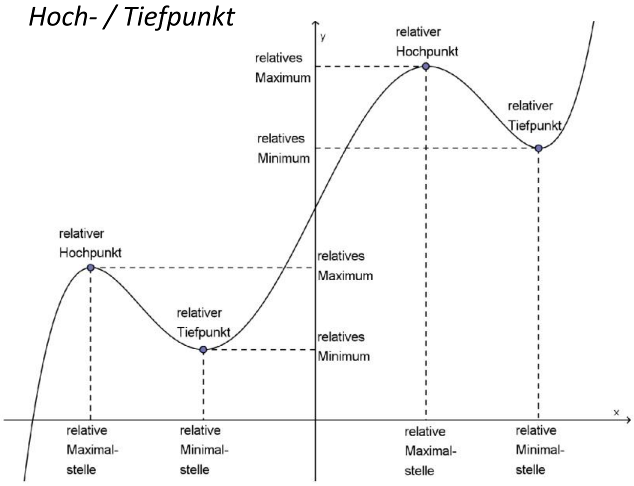
Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$.

Bedingungen

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

Typenbestimmung

- $f''(x_0) < 0 \rightarrow relatives\ Maximum$
- $f''(x_0) > 0 \rightarrow relatives\ Minimum$



Vorgehen – Relative Extrema

$$f(x) = y$$

1. Erste Ableitung
2. Extremalstellen x_0 bestimmen
   - $f'(x) = 0 \rightarrow x_0$
3. Zweite Ableitung
4. Typenbestimmung
   - $f''(x_0) < 0 \rightarrow Relatives\ Maximum$
   - $f''(x_0) > 0 \rightarrow Relatives\ Minimum$
5. In Gleichung $f(x_0) = y_0$ einsetzen
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

Beispiel

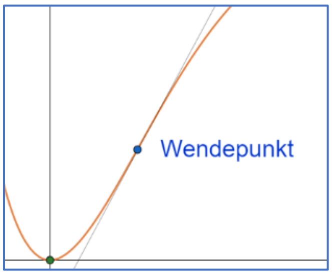
$$f(x) = x^5 - \frac{65}{3}x^3 + 180x$$

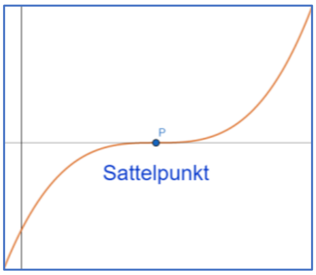
1. $y' = 5x^4 - 65x^2 + 180$
2. $y' = 0$
   - $\rightarrow x_0 = 2 \pm \sqrt{3}$
3. $y'' = 20x^3 - 130x$
4. $f''(x_0) = 20 \cdot \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^3 - 130 \cdot \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$
   - $f''\left(2 - \sqrt{3}\right) = -34 \rightarrow Maximum$
   - $f''\left(2 + \sqrt{3}\right) = 554 \rightarrow Minimum$
5. Gleichung $f(x_0) = y_0$
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

Wende- und Sattelpunkte

Definition

Als Wendepunkte werden Punkte bezeichnet bei denen sich der «Drehsinn» ändert. *Wendepunkte* mit horizontaler Tangente werden als *Sattelpunkte* oder *Terrassenpunkte* bezeichnet





<u>Wendetangente</u>

- Tangente an einem Wendepunkt

Berechnung

Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0 \to x_0$.

<u>Bedingungen</u>

Sei $y = f(x)$ *dreimal differenzierbar*

- $f''(x_0) \ = 0$
- $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ $\to$ Wendepunkt
- Falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$ $\to$ Sattelpunkt

Allgemeines Kriterium

Sei $f(x)$ eine genügend oft differenzierbare Funktion

- $f'(x_0) = 0$

Sei n die Ordnung der <u>*ersten nicht verschwindenden Ableitung*</u> von $f(x)$ an der Stelle x_0.

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Wenn n gerade, dann gibt es ein relatives Extremum $\left(f^{(n)}(x_0) \neq 0\right)$
Wenn n ungerade, dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt und damit einen Sattelpunkt.

Vorgehen

1. Erste und zweite Ableitung
2. Wendepunkt bestimmen
   - $f''(x_0) = 0 \to x_0$
   - $f^{(3)}(x_0) \neq 0$
3. Sattelpunkte bestimmen
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f''(x_0) = 0$
   - …
   - $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
     - Gerade $\to$ relatives Extremum
     - Ungerade $\to$ Sattelpunkt
4. x_0 in ursprüngliche Gleichung einsetzen

Kurvendiskussion

Vorgehen

Kurvendiskussion für eine Funktion $y = f(x)$

- Definitionsbereich
- Symmetrie
  - Gerade / Ungerade
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - Nullstellen
  - Schnittpunkte mit Y-Achse
- Verhalten für $x \to \infty$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Graphen skizzieren

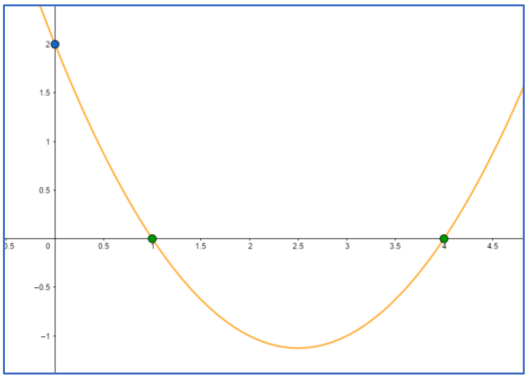
$y = 0.5 \cdot (x^2 - 5x + 4)$

Nullstellen

- $0 = 0.5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) \qquad \to x_1 = 1, x_2 = 4$

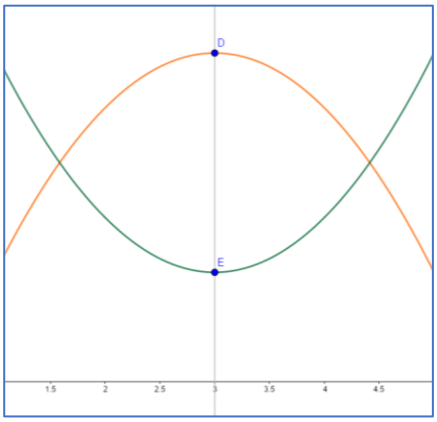
Y-Achsenabschnitt

- $y = 0.5 \cdot x^2 - 2.5 \cdot x + 2 \qquad \to y_0 = 2$



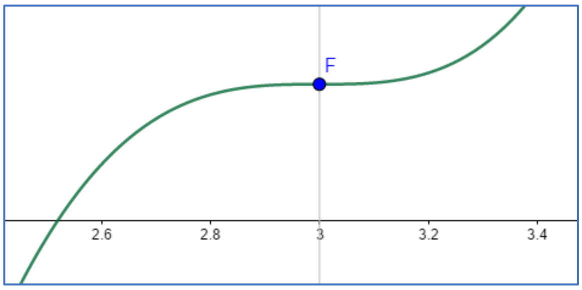
Relative Extrema $n = gerade\ (n > 1)$

- Positiv $y = 0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + 3 \qquad \to D = Hochpunkt$
- Negativ $y = -0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + 1 \qquad \to E = Tiefpunkt$

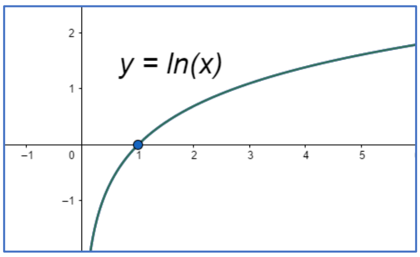


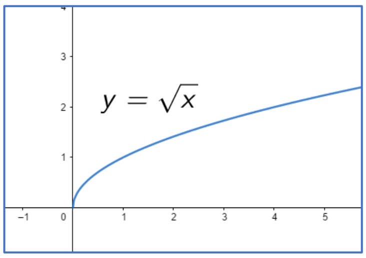
Wechselpunkte $n = ungerade\ (n > 2)$

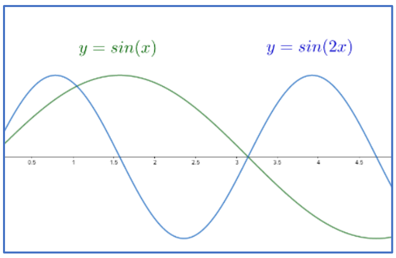
- $y = 0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + c \qquad \to F = Wechselpunkt$



<u>Beispiel – Funktionen</u>







Vorgehen

- Zielfunktion f und Definitionsbereich D
- Falls *f* eine Funktion von 2 Variablen, $f(x, y)$
  - Nebenbedingungen in $f(x, y)$ einsetzen
- Gleichung $f'(x) = 0$ lösen
  - relative Extrema im innern des Intervals *I* finden
- Bestimmung des gesuchten Maximums/Minimums durch Vergleich der Funktionswerte an den relativen Extremalstellen sowie an den Randpunkten des Intervalls.

<u>Beispiel</u>

Zielfunktion

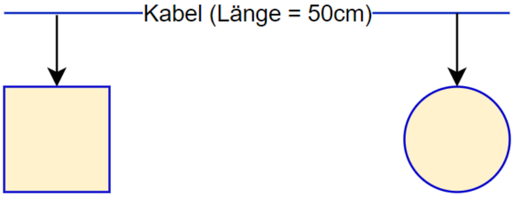
- $A_{Max} = A_{Quadrat} + A_{Kreis}$
- $A_{Quadrat} = s^2$
- $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Nebenbedingungen

- $U_{Quadrat} = 4s \quad \rightarrow s = \frac{U_Q}{4}$
- $U_{Kreis} = 2r\pi \quad \rightarrow r = \frac{U_K}{2\pi}$
- $U_Q = 50 - U_K \quad \rightarrow r = \frac{50-U_Q}{2\pi}$

Nebenbedingungen einsetzen

- $A_{Max}(r, s) = s^2 + r^2 \cdot \pi$
- $A_{Max}(U_Q) = \left(\frac{U_Q}{4}\right)^2 + \left(\frac{50-U_Q}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi$



$$U_{Quadrat} + U_{Kreis} = 50cm$$

$$A_{Quadrat} + A_{Kreis} \rightarrow Maximal$$

Erste Ableitung $f'(x) = 0$

- $A'(U_Q) = \frac{U_Q}{8} + \frac{25}{\pi} + \frac{U_Q}{2\pi}$
- $A'(U_Q) = 0 \qquad \rightarrow \boldsymbol{U_Q \approx 28}$

Zweite Ableitung $f''(x)$

- $A''(U_Q) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \rightarrow relative\ Minimalstelle$

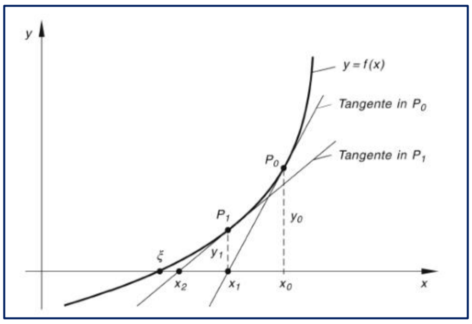
Newton – Tangenten Verfahren

Sukzessive Approximation der Funktionskurve $y = f(x)$ durch Tangenten, deren Schnittpunkt mit der x-Achse problemlos berechnet werden kann. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

Algorithmus

Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

- Startwert x_0 nahe bei ξ wählen
- Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



<u>Beispiel</u>

- Gleichung $x = e^{-x}$
- Startwert $x_0 = 0.5$

1. Gleichung = 0 setzen • $f(x) = 0 = x - e^{-x}$ 2. Gleichung ableiten • $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$	3. Startwert x_0 einsetzen • $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 4. Gleichung ableiten • $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$	5. Startwert x_0 einsetzen • $x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.566 \ldots$ 6. Letzten Schritt wiederholen • $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$