Folgen und Reihen

Summen

Konstante in der Summe:

$$\sum_{k=s}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=s}^{n}(a_k)$$

Addition in der Summe

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=s}^{n}(a_k) + \sum_{k=s}^{n}(b_k)$$

Summen aufspalten:

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k) + \sum_{k=n+1}^{m}(a_k) = \sum_{k=s}^{m}(a_k)$$

Doppelsummen:

$$\sum_{k=s}^{n}\sum_{i=s}^{n}(a_{ki}) = \sum_{k,i=s}^{n}(a_{ki})$$

Summationsindex verschieben

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k) = \sum_{k=s-k_0}^{n-k_0}(a_k + k_0)$$

Arithmetische Folgen

Definition

Die Differenz zweier benachbarter Glieder ist immer gleich gross.

$$a_{k+1} - a_k = d$$

Bildungsgesetz

$a_1 = A$

$$a_n = A + (n-1) \cdot d$$

Arithmetische Mittel

a_k = das Arithmetische Mittel von a_{k-1} und a_{k+1}

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Arithmetische Partialsummen

S_n = die n-te Partialsumme

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$$

Geometrische Folge

Definition

Der Quotient zweier benachbarter Glieder ist immer gleich gross.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

Bildungsgesetz

$a_1 = A$

$$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$$

Geometrisches Mittel

$|a_k|$ = das Geometrische Mittel von $|a_{k-1}|$ und $|a_{k+1}|$

$$|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

Geometrische Partialsummen

S_n = die n-te Partialsumme

$$S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Partielsummen $n \longrightarrow \infty$

Konvergent falls $|q| < 1$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{A}{1-q}$$

Reele Funktionen

Zahlenmengen

$\mathbb{N}^*$ = Menge der Natürlichen Zahlen ohne Null
$\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}$ = Menge der Natürlichen Zahlen
$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = Menge der Ganzen Zahlen
$\{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = Menge der Rationalen Zahlen
$\{-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \ldots\}$

$\mathbb{R}$ = Menge der reelen Zahlen
$\{\mathbb{Q} + \sqrt{2}, \pi, \ldots\}$

Charaktisierung

Aufzählend:

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Beschreibend:

$$M = \{x | x \text{ hat die Eingenschaft} \ldots\}$$

Funktionsdarstellung

D = Definitionsbereich W = Wertemenge

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Darstellung von Funktionen

Standard-Darstellung

$$f(x) = mx + b$$

Punkt-Steigungsform:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Zwei-Punkte-Form:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Intervalle

Abgeschlossene Intervalle

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

Offene Intervale

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

Halboffene Intervalle

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

Unendliche Intervalle

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$$

Komposition von Funktionen

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Grenzwerte

Es kann nur einen Grenzwert geben

Begriffe

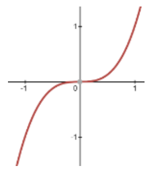
Konvergent Grenzwert existiert
Divergent: Kein Grenzwert oder Unendlich

Stetigkeit

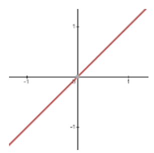
- Eine Funktion ist stetig an der Stelle x_0 falls ein Grenzwert existiert und $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
- Eine Funktion ist stetig, falls sie an jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Monotomie

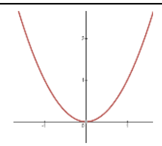
Monoton steigend



Streng monoton steigend

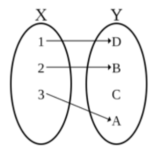


nicht monoton



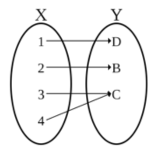
Injektiv, Surjektiv ,Bijektiv

Injektiv



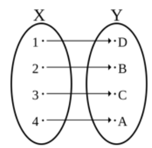
jedes X zeigt auf höchstens ein Y

Surjektiv



auf jedes Y zeigt mindestens ein X

Bijektiv



injektiv und surjektiv

Differentialrechnung

Definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitungsregeln

Ableitung von Konstanten

für jedes $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$$

Potenzregel

für jedes $n \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Faktorregel

für jedes $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f(x) = c \cdot g(c) \longrightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Exponentiafunktionen

für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar

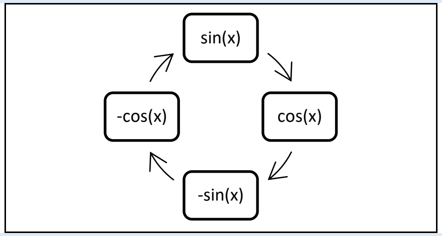
$$f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Logarithmusfunktionen

für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f(x) = \log_a x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Trigonometrische Funktionen



Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'^{(x)} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'^{(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel

$$f(x) = (u \circ v)(x) \longrightarrow f'^{(x)} = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Ableiten von Umkehrfunktionen

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Für Trigonometrische Umkehrfunktionen gilt:

$$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Monotomie/Kurvendiskusion

Monotomie

Wenn $f(x)$ differenzierbar ist mit $x_0 \in \mathbb{D}$ so gilt:

$f'(x_0) > 0$	Kurve wächst streng monoton in der Umgebung von Punkt P$(x_0, f(x_0))$
$f'(x_0) < 0$	Kurve fällt streng monoton in der Umgebung von Punkt P$(x_0, f(x_0))$
$f'(x_0) = 0$	Kurve hat bei Punkt P$(x_0, f(x_0))$ eine horizontale Tangente

Krümmung

Wenn $f(x)$ differenzierbar ist mit $x_0 \in \mathbb{D}$ so gilt:

$f''(x_0) > 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt P$(x_0, f(x_0))$ nach links gekrümmt, konvex
$f''(x_0) < 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt P$(x_0, f(x_0))$ nach rechts gekrümmt, konkav
$f''(x_0) = 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt P$(x_0, f(x_0))$ nicht eindeutig gekrümmt

Relative Extrema

$f(x)$ hat bei x_0 einen Extremwert, wenn gilt:

$$f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0$$

für die Extremwerte gilt:

$f''(x_0) > 0$	relatives Minimum
$f''(x_0) < 0$	relatives Maximum

Wendepunkt

$f(x)$ hat bei x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0$$

falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$, ist x_0 ein Sattelpunkt oder Terassenpunkt

Integralrechnung

Definition

$$F(x) = \int f(x)dx \longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Begriffe

Stammfunktion

$F(x)$ist eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn die Definition $F'(x) = f(x)$ gilt.

$+C \mid C \in \mathbb{R}$ nicht vergessen

Unbestimmtes Integral

Das Unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$+C \mid C \in \mathbb{R}$ nicht vergessen

Bestimmtes Integral

Das Bestimmte Integral hat eine untere und obere Grenze. Es liefert als Ergebnis einen absoluten Wert.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Potenzfunktionen

$$\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Logarithmische Funktionen

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \log_a(x)\,dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

Verschobene Funktionen

$$\int f(x-k)\,dx = F(x-k) + C$$

Gestreckte funktionen

$$\int f(x \cdot k)\,dx = \frac{1}{k} \cdot F(x \cdot k) + C$$

Integrationsgrenzen

Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Identische Integrationsgrenzen

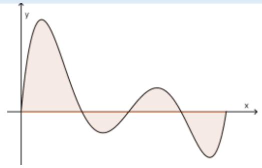
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Zerlegung Integrationsbereich

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)$$

Fächeninhalt

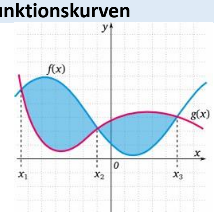
Bei wechselnden Vorzeichen



$x_1, x_2, \dots, x_n$ sind Nullstellen von $f(x)$

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|$$

Zwischen zwei Funktionskurven



$x_1, x_2, \dots, x_n$ sind Schnittpunkte $f(x) = g(x)$

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))dx\right|$$

Allgemein

Newton-Verfahren

Für Gleichungen die analytisch nicht lösbar sind

Ziel: Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

x_0 = Startwert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Tangentengleichung

$t(x)$ ist eine Tangente von $f(x)$ an der Stelle x_0

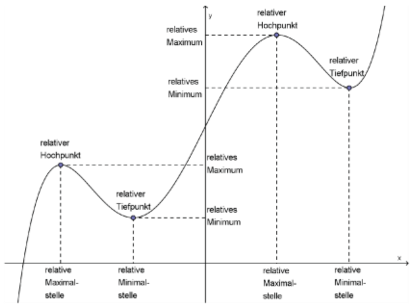
$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

L'Hospital

Wenn $\lim\limits_{n \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{"0"}{"0"} \;\vee\; \frac{"\infty"}{"\infty"}$ gilt:

$$\lim_{n \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Geometrie



Partielle Integration

$$\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx}$$

Partialbruchzerlegung

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2}}$$

Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen!

Unecht-gebrochen rationale Funktionen müssen durch Polynomdivision in Rest + echt-gebrochen rationale Funktionen umgewandelt werden.

Bsp:

$$\int \frac{x^2+21}{x^2+x-6}dx =$$

$$x^2 + 21 : (x^2+x-6) = 1 + \frac{-x+27}{x^2+x-6}$$

$$\frac{-x^2+x-6}{0-x+27}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x-x_1}dx = ln|x-x_1| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-x_1)^r}dx = -\frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{(x-x_1)^{r-1}} + C\ (r \geq 2)}$$

Mittelwert einer Funktion

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

Volumen eines Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

Bogenlänge einer Kurve

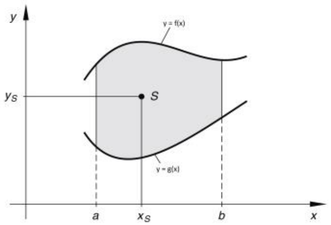
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$\boxed{M = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Schwerpunkte

Schwerpunkt Fläche



Schwerpunkt S einer Fläche mit Flächeninhalt A

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_a^b x\cdot(f(x)-g(x))dx}$$

$$\boxed{y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx}$$

Schwerpunkt RotationsKörper

V = Volumen des Rotationskörpers

$$\boxed{x_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b f(x)^2}$$

Unendliche Integrale

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_\lambda^b f(x)dx\right)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_\lambda^c f(x)dx\right) + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_c^\lambda f(x)dx\right)}$$

Taylor Reihe

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

$$\boxed{p_n = \sum_{k=0}^n a_k\cdot(x-x_0)^k}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cdots}$$

Binominalreihe

für Taylorreihen von der Form $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\boxed{a_k = \binom{\alpha}{k}}$$

$$\boxed{\binom{\alpha}{0} = 1}$$

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}$$

k entspricht der Anzahl Faktoren

Bsp:

$(1+x)^{\frac{1}{2}} \quad a_k = \binom{\frac{1}{2}}{k}$

$$a_0 = \binom{1/2}{0} = 1$$

$$a_1 = \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$a_3 = \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

KonvergenzRadius

Radius ρ um Punkt x_0

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad oder \quad \rho = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|ak|}}}$$

Für den Konvergezbereich müssen die Grenzen separat untersucht werden.

BSP KonvergenzBereich:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot x^k \Rightarrow a_k = (k+1)$ $\Rightarrow x_0 = 0$

$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{1} = 1$ l' Hopital

$x = 1: \; 1 + 2x + 3x^2\ldots$ divergent

$x = -1: \; 1 - 2 + 3 - 4\ldots$ divergent

$\Rightarrow (-1, 1)$

Fehler bei der Approximation

n = grad des TaylorPolynoms

$\xi \in [x_0, x]$

$$\boxed{|R_n| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\right|}$$

DifferentialGleichung

Konstante Lösung

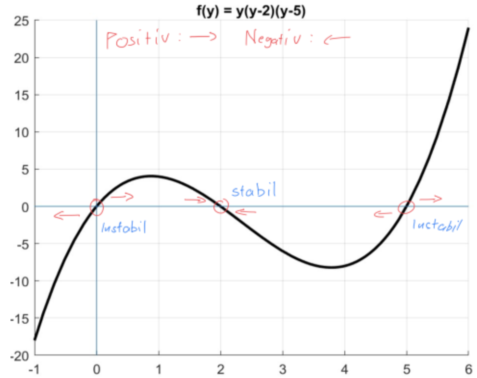
$$\boxed{\text{Nullstellen der Funktion } y' = f(y)}$$

BSP stabilität bestimmen:

$$y' = y(y-2)(y-5)$$

Konstante Lösungen: $y_1 = 0,\ \ y_2 = 2,\ \ y_3 = 5$

Betrachtung des Grafen:



Separierbare DGL

Lösungsverfahren an BSP

$$y' = -\frac{x}{y} \quad bzw \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Trennung von x- und y-Terme:

$$y\,dy = -x\,dx$$

Integrieren auf beiden Seiten:

$$\int y\,dy = \int -x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

Nach y auflösen:

$$y = \pm\sqrt{K-x^2} \quad (wobei\ K = 2C)$$

Lineare DGL

Für DGL der Form: $y' + f(x)y = g(x)$

$$\boxed{y = e^{-F(x)}\cdot\int g(x)e^{F(x)}dx}$$

$F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$

BSP:

$$y' - 4y = e^{2x}$$

$f(x) = -4 \quad g(x) = e^{2x}$

$F(x) = -4x$

$$y = e^{-F(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{F(x)}\,dx$$

$$y = e^{4x}\cdot\int e^{2x}\cdot e^{-4x}\,dx$$

$$y = e^{4x}\cdot\int e^{-2x}\,dx$$

$$y = e^{4x}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right)$$

$$y = e^{4x}\cdot -\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{4x}\cdot c$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^{4x}\cdot c \quad (c \in \mathbb{R})$$