1 - Erweiterung der Integralrechnung

Partielle Integration

$$\int \left(u'(x) \cdot v(x)\right) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int \left(u(x) \cdot v'(x)\right) \cdot dx$$

$$\int_a^b \left(u'(x) \cdot v(x)\right) \cdot dx = \left(u(x) \cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left(u(x) \cdot v'(x)\right) \cdot dx$$

Faustregel

- v Polynome $(x^n + \cdots + c)$, $\ln(x)$ Ableitung $(v \to v')$
- u' Exp- $(e^x, \ldots)$ / Trigo-Funktionen $(\sin(x), \ldots)$ Integration $(u' \to u)$

Für v sollte der Faktor verwendet werden, der durch eine Ableitung vereinfacht werden kann.

Beispiel 1

$$\int (\ln(x) \cdot x^2) dx$$

$$\int \underbrace{(x^2 \cdot \ln(x))}_{u' \cdot v} \cdot dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x)}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\right)}_{u \cdot v'} dx$$

$$\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{3}\right) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} = \ln(x) - \frac{2x^3}{9}$$

Beispiel 2

$$\int \left(\underbrace{(x+1)}_{v} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{u'}\right) dx$$

$$\int \left(\underbrace{(x+1) \cdot e^{-x}}_{v \cdot u'}\right) dx = \underbrace{(x+1) \cdot -e^{-x}}_{v \cdot u} - \int \left(\underbrace{1 \cdot -e^{-x}}_{v' \cdot u}\right) \cdot dx$$

$$-e^{-x} \cdot (x+1) - e^{-x} + C = -e^{-x} \cdot x - 2e^{-x} + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$sin^2 + cos^2 = 1$$

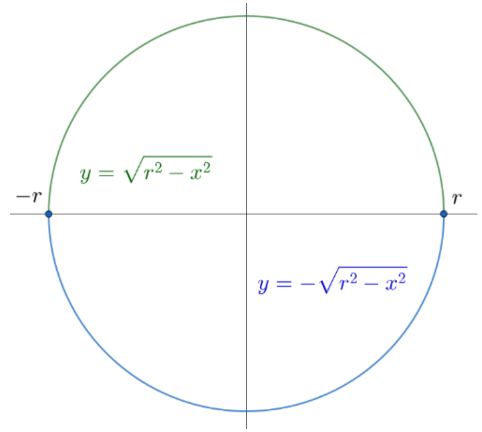
$$1 - sin^2 = cos^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

Kreisfunktion

$$y = \sqrt{x^2 - r^2}$$



Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- $\deg(p(x)) < \deg(q(x)) \rightarrow echt\ gebrochen$
- $p(x), q(x): Polynome$

Nullstellen $(x_1 - x_n)$ bestimmen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)(x-x_2)}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \cdots$$

Koeffizienten A, B_1, B_2 ... bestimmen

$$p(x) = A(x-x_2)(x-x_2) + B_1(x-x_1)(x-x_2) + B_2(x-x_1) + \cdots$$

Integration durch Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot g(x)}{dx} = g'(x)$$

$$u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot dx = \int \varphi(u) \cdot du$$

$$\int \varphi(u) \cdot du = \phi(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\phi(u) + C = \phi(g(x)) + C$$

Beispiel - Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot x^2}{dx} = 2x$$

$$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot dx = \int x \cdot \cos(u) \cdot \frac{du}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \cos(u)\, \mathrm{du} = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

Beispiel

Nullstellenform im Zähler

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Zuordnung eines Partialbruchs zu jeder Nullstelle

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)(x-2)}$$

Koeffizienten bestimmen

$$x + 1 = A(x-2)(x-2) + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)$$

$$A = 2, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 3$$

Einsetzen in ursprüngliche Gleichung

$$\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-2)}$$

Integral zu berechnen (*nicht teil des Verfahrens*)

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Weiteres Grundintegral

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = ln\sqrt{(x-\beta)^2 + \gamma^2} + C$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{\gamma} \arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + C$$

Pascal Isliker

Der **Mittelwert** μ einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall von $[a, b]$.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot dx$$

Beispiel

$$y = -\frac{1}{16} x^2 + 5$$

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{16} x^2 + 5\right)^2 \cdot dx = \frac{2624 \cdot \pi}{15}$$

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx$$

Beispiel

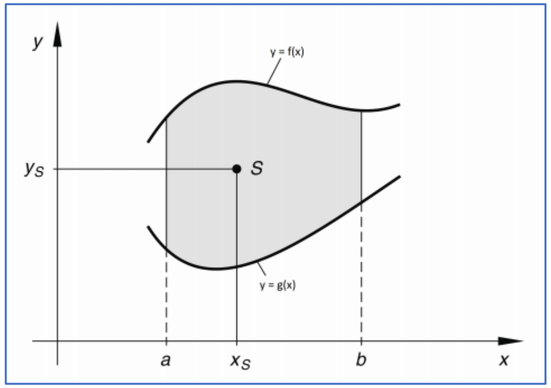
$$f(x) = \frac{1}{2} x^2, I = [0, 3] \rightarrow L = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx$$

Schwerpunkte von Flächen

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) \cdot dx$$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b \left(x \cdot \left(f(x) - g(x)\right)\right) \cdot dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) \cdot dx$$



Schwerpunkt von Volumen

Die x -Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_S, 0, 0)$ eines Rotationsköpers mit Volumen V, der durch Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x - Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ gebildet wird, wobei $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt, ist durch folgende Formel gegeben:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b \left(x \cdot f(x)^2\right) \cdot dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

- $A_{Mantel} = (R + r) \cdot \pi \cdot m$

$$M = 2\pi \int_a^b \left(f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) \cdot dx$$

Beispiel

$$f(x) = 3x + 2, I = [0, 2] \rightarrow M = 2\pi \int_0^2 \left((3x + 2) \cdot \sqrt{1 + (3)^2}\right) \cdot dx = 62.83$$

Uneigentliche Integrale erster Art

$$\int_a^\infty f(x)\cdot dx\,,\qquad \int_\infty^b f(x)\cdot dx\,,\qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\cdot dx\,,\qquad (f(x){:}\,stetig)$$

Integration über $[a, \lambda]$

$$I = \int_a^\infty f(x)\cdot dx\,,\qquad I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\cdot dx$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I = \int_a^\infty f(x)\cdot dx = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^\lambda f(x)\cdot dx\right)$$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das Integral $\int_a^\infty f(x)\cdot dx$ *konvergent*, sonst *divergent*.

Beispiel

$$I = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx$$

Integration über $[1, \lambda]$

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx = \left|\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda} + 1\right) = 1$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert → *konvergent*

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Vorgehen zur Berechnung $f(x)$, mit Pol bei $x = a$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

Integration über $[a + \epsilon, b]$

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\cdot dx\right)$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx$$

$$\int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx = \left|2\sqrt{x}\right|_\epsilon^1 = 2 - 2\cdot\sqrt{\epsilon}$$

Im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx\right) = \lim_{\epsilon\to 0}(2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

2 - Potenzreihen und Taylor-Reihen

Taylorpolynom *n-ter* Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Vorgehen

1. *n-te* Ableitung berechnen
$$f^{(n)}(x) = \cdots$$
2. x_0 in Ableitungen einsetzen
$$f^{(n)}(x_0) = \cdots$$
3. Vorfaktoren $a_0 - a_n$ bestimmen
$$a_n = \frac{f^n(x)}{k!}$$
4. Taylorreihe $t_f(x)$ bestimmen
$$t_f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Binomialreihe

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{k} x + \binom{\alpha}{k} x^2 + \binom{\alpha}{k} x^3 \ldots \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{k} x + \binom{n}{k} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^n$$

Beispiel

$$\alpha = \frac{1}{2}:\ a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (a-1) \cdot (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 3) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}$$

$$a_0 = \binom{0.5}{0} = 1$$

$$a_1 = \binom{0.5}{1} = \frac{\alpha}{k!} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \binom{0.5}{2} = \frac{\alpha \cdot (a-1)}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$a_3 = \binom{0.5}{3} = \frac{\alpha \cdot (a-1) \cdot (\alpha - 2)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

1. *4-te* Ableitung berechnen
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{15}{8} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{105}{16} \cdot x^{-\frac{9}{2}}$$
2. $x_0 = 1$ in Ableitungen einsetzen
$$f(1) = x^{-\frac{1}{2}} = 1$$
$$f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$
$$f''(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}$$
$$f^{(3)}(1) = -\frac{15}{8} \cdot 1^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{8}$$
$$f^{(4)}(1) = \frac{105}{16} \cdot 1^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{16}$$
3. Vorfaktoren $a_0 - a_n$ bestimmen
$$a_0 = \frac{1}{0!} \cdot 1 = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{1!} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$
$$a_3 = \frac{1}{3!} \cdot -\frac{15}{8} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$
$$a_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{105}{16} = \frac{105}{384} = \frac{35}{128}$$
4. $x_0 = 1$ in Taylorreihe einsetzen
$$t_f(x) = 1 + -\frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{3}{8} \cdot (x-1)^2 + -\frac{5}{16} \cdot (x-1)^3 + \frac{35}{128} \cdot (x-1)^4$$

Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \qquad \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ *konvergiert*
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ *divergiert*

Der **Konvergenzbereich** von $p(x)$ ist das Intervall I

$$I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Zusammen mit *0, 1 oder 2 Randpunkten* dieses Intervalls.

Bestimme den *Konvergenzbereich*

$$p_1(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots \rightarrow a_k = \frac{1}{2^k}$$

1. Radius berechnen

$$\frac{\frac{1}{2^{(k)}}}{\frac{1}{2^{(k+1)}}} = \frac{1}{2^{(k)}} \cdot \frac{2^{(k+1)}}{1} = 2$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} |2| = 2$$

2. Randpunkte $x = \pm\rho$ prüfen

$x = 2$ $\quad 1 + 1 + 1 + 1 \ldots \rightarrow$ divergent $(2 \notin I)$

$x = -2$ $\quad 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \rightarrow$ divergent $(-2 \notin I)$

$$I = (-2; 2)$$

Präzision der Approximation

Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds

$$R_n(x) = f(x) - p_{n(x)}$$

Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_{n(x)}| \leq \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

<u>Beispiel</u>

Fehler bei Approximation von $f(x) = e^x$ durch $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ im Intervall $[0, 1]$

$$R_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^4(\xi)}{4!} \cdot (1 - 0)^4$$

$$\leq \frac{e^\xi}{24} \leq \frac{e}{24} \approx 0.113$$

$$x = 1: e^1 = 2.71828 \ldots$$

$$p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.667 \rightarrow \Delta = 0.0516\ (< 0.113)$$

Regel von **Bernoulli-de l'Hospital** (BH)

Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Vorgängige Umformungen

- $0 \cdot \infty \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $\infty - \infty \qquad f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{0}{0} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{1}\right) \rightarrow x = 0: \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x + 7}\right) = \frac{\infty}{\infty} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{4x + 3}\right) \rightarrow x = \infty: \frac{1}{2}$$

3 – Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung (DGL) n*-ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0$$

Für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitung von $y(x)$ bis zur *n*-ten Ordnung auftreten.

Überprüfung einer Lösung

Wir können nachrechnen, ob eine Funktion tatsächlich eine Lösung einer bestimmten *DGL* ist.

Zu Lösungen und Lösungsmengen einer Differentialgleichung

- $\mathbb{L} =$ *Menge von Funktionen*
- Eine *DGL* ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen
- Die Lösung ist erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich zur *DGL* noch eine oder mehrere *Anfangsbedingungen* vorgibt.
- Eine DGL zusammen mit einer Anfangsbedingung ist ein *Anfangswertproblem.*

Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.

Beispiel

Differentialgleichung (DFG): $y' = x + y$

Lösung zu prüfen: $y_1 = e^x - 1$

- Linke Seite *LS* $\quad y' = (e^x - 1)' = e^x$
- Rechte Seite *RS* $\quad x + y = x + (e^x - 1)$

$$LS \neq RS \rightarrow Keine\ Lösung\ der\ DFG$$

Lösung zu prüfen: $y_2 = -x - 1$

- Linke Seite *LS* $\quad y' = (-x - 1)' = -1$
- Rechte Seite *RS* $\quad x + y = x + (-x - 1) = -1$

$$LS = RS \rightarrow Lösung\ der\ DFG$$

Anfangswertproblem (spezielle / partikuläre Lösung) AWP für explizite DGL *n*-ter Ordnung

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^n) & = & G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) & = & y_0 & \\ y'(x_0) & = & y_1 & \\ & \vdots & & \\ y^{n-1}(x_0) & = & y_{n-1} & \end{cases}$$

Anfangswertproblem AWP für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' & = & G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) & = & y_0 & \end{cases}$$

Spezielle Typen von DGL

- *Unbestimmtes Integral* $\quad y' = f(x) \quad$ Das Richtungsfeld ist unabhängig von y
- *Autonome DGL* $\quad y' = f(y) \quad$ Das Richtungsfeld ist unabhängig von x

Beispiel

$$AWP: \begin{cases} y' = x - 4 \\ y(2) = 9 \end{cases}$$

$$y = \int (x - 4) \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

$$y(2) = 2 - 8 + C = 9 \rightarrow C = 15$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$$

Konstante Lösungen

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine *konstante Lösung der autonomen DGL* $y' = f(y)$. Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

- Stabil — Benachbarte Lösungen werden *angezogen*
- Instabil — Benachbarte Lösungen werden *abgestossen*
- Semi-Stabil — *Anziehung* auf einer, *Abstossung* auf der anderen Seite

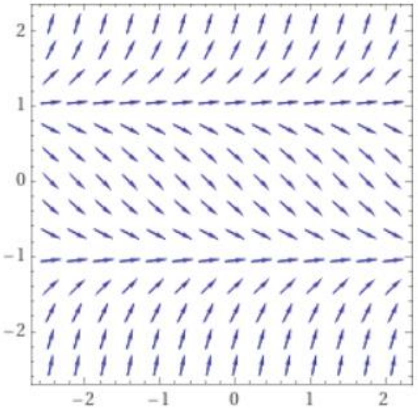
<u>Beispiel</u>

$$y' = y^2 - 1$$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1$: *Konstante Lösung*
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = -1$: *Konstante Lösung*

Werte in der Nähe der *Konstanten Lösung* einsetzen

- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
- $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $\boldsymbol{f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \textit{Instabil}}$
- $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
- $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $\boldsymbol{f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \textit{Stabil}}$
- $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



ACHTUNG

1. $+C$
2. Wert $\neq 0$ im Taylorpolynom einsetzen
3. Grenzen vom Integral berechnen

Separierbare Differentialgleichung

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = F(x,y)$$

- *Separierbar* falls $\quad y' = g(x) \cdot h(y)$
- *Autonom* falls $\quad y' = f(y)$

<u>Allgemein</u>	<u>Beispiel</u>
$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ Trennung aller x- und y-Terme $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$	$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Trennung aller x- und y-Terme $y \cdot dy = -x \cdot dx$
Integration auf beiden Seiten $\int \left(\frac{1}{h(y)}\right) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$	Integration auf beiden Seiten $\int (y) \cdot dy = -\int (x) \cdot dx$ $\frac{1}{2} y^2 + C_1 = -\frac{1}{2} x^2 + C_2$
Auflösen nach y $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \cdot ds = \int_{x_0}^{x} g(t) \cdot dt$	Auflösen nach y $y^2 = -x^2 + 2C$ $y = \pm\sqrt{K - x^2}$

Analytische Verfahren

Die Allg. Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Ist gegeben durch

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int \left(g(x) \cdot e^{F(x)}\right) \cdot dx$$

Wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

<u>Beispiel</u>

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^4}$$

DGL umformen

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\ln(x)$$

In Formel einsetzen

$$y = e^{--\ln(x)} \cdot \int \left(\frac{1}{x^4} \cdot e^{-\ln(x)}\right) \cdot dx$$

$$y = e^{--\ln(x)} \cdot \int \left(\frac{1}{x^5}\right) \cdot dx$$

Integral berechnen

$$y = e^{\ln(x)} \cdot \left(\frac{1}{-5+1} x^{5-1} + C\right)$$

$$y = x \cdot \left(-\frac{1}{4x^4} + C\right)$$

$$y = -\frac{1}{4x^3} + C \cdot x$$