1 - Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Addition und Subtraktion

Dimensionen beider Matrizen identisch sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

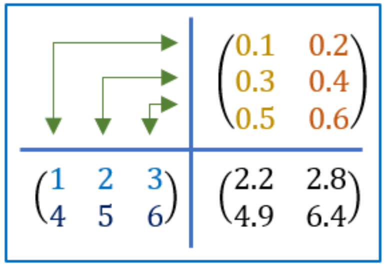
$$\begin{pmatrix} \#1 \rightarrow \\ \#2 \rightarrow \\ \#3 \rightarrow \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \#1 & \#2 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 12 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

- Bedingungen für $A \cdot B$ $\quad A_{clm-count} = B_{row-count}$
- Resultat von $A \cdot B$ $\quad A_{clm-count} \times B_{row-count}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 & 2.8 \\ 4.9 & 6.4 \end{pmatrix}$$



Zeilenstufenform (Gauss)

1. Nullzeilen stehen zuunterst
2. Die erste Zahl $\neq 0$ ist eine *führende Eins*
3. *Führende Einsen*, die weiter unten stehen → nach rechts versetzt

Reduzierte Zeilenstufenform (Gauss-Jordan)

- Spalten mit *führender Eins* enthalten sonst nur Nullen

Rang einer Matrix

Rang $rg(A)$ einer Matrix A (Zeilenstufenform) mit $n =$ Anzahl Spalten.

$$rg(A) = Anzahl\ Zeilen - Anzahl\ Nullzeilen$$

- Lösbar $\quad rg(A) = rg(A|\vec{c})$
- Genau eine Lösung $\quad rg(A) = n$
- Unendlich viele Lösungen $\quad rg(A) < n$

Bestimmung der Lösungen aus der reduzierten Zeilenstufenform

- *Führende Unbekannte* — Spalte mit führender Eins
- *Freie Unbekannte* — Spalte ohne führende Eins

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Auflösen nach der *führenden Unbekannten*

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \qquad x_2 = \lambda \qquad x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \qquad x_4 = \mu \qquad x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Parameterdarstellung}$$

2 - Vektorgeometrie

Ein Vektor ist ein Objekt, das ein *Betrag* und eine *Richtung* hat.

- $\vec{0} = Nullvektor$ — Vektor mit dem Betrag 0
- $\vec{e} = Einheitsvektor$ — Vektor mit Betrag 1
- $-\vec{a} = Gegenvektor$ von $\vec{a}$

Orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow orthogonal$$

Orthogonale Projektion $\overrightarrow{b_a}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}, \qquad |\overrightarrow{b_a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Einheitsvektor

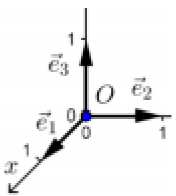
Gegeben ist ein Vektor mit Betrag $a = |\vec{a}|$.

$$\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \overrightarrow{e_a}$$

Räumliches Koordinatensystem

$$\mathbb{R}^3 = Räumliches\ Koordinatensystem$$

- $O = Ursprung$
- $\overrightarrow{e_1} = Einheitsvektor$
- $\overrightarrow{e_2} = Einheitsvektor$ um 90° gedreht
- $\overrightarrow{e_3} = Einheitsvektor$
  - Orthogonal zu $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$
  - Rechtwinklig zu $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$



Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Skalarprodukt

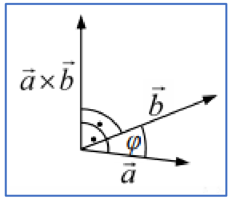
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

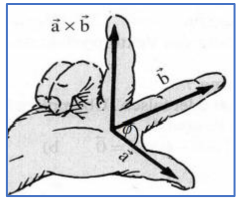
Winkelberechnung

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Vektorprodukt

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ **ist orthogonal zu** $\vec{a}$ und **zu** $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

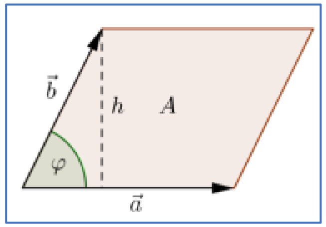




$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Fläche des aufgespannten Parallelogramms

- $h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$



Kollinear (Parallel)

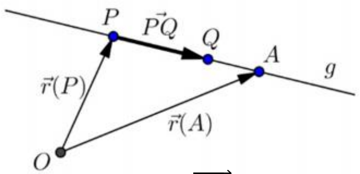
Sind zwei Vektoren *kollinear*, so ist ein Vektor an Vielfaches des anderen.

Komplanar (Auf gleicher Ebene)

Drei Vektoren sind *komplanar*, wenn sie auf der gleichen Ebene sind.

Gerade in der Ebene und im Raum

- $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$
- $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

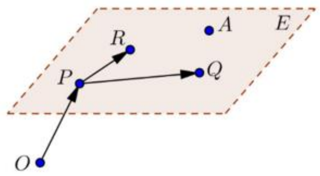


Der Punkte P heisst *Aufpunkt*, der *Richtungs-Vektor* $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ von g.

Eine **Ebene** kann durch drei Punkte festgelegt werden

- Die Vektoren $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ gilt, sie sind *komplanar*
- $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$$



Abstand Punkt-**Gerade**

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a}$
3. $Lenght = |\overrightarrow{BA}|$

$$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Abstand Punkt-**Ebene**

$$A = (x_A; y_A; z_A)$$

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

Parameterdarstellung der Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$E: \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen $(1; 0; z), (0; 1; z), (0; 0; z)$

$$E: 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (0; 0; 1/4)$$

$$E: 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (1; 0; 3/4)$$

$$E: 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (0; 1; 2)$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

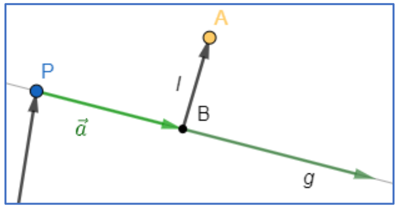
$$E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d = 8$

Abstand Punkt-**Gerade**

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A = (3; -1)$$

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r}\begin{pmatrix} 1 + 3\lambda \\ 13 + 5\lambda \end{pmatrix}$
2. $0 = \begin{pmatrix} 3 - 1 - 3\lambda \\ -1 - 13 - 5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$
3. $Lenght = \left| \begin{pmatrix} 2 - 3 \cdot x \\ -14 - 5 \cdot x \end{pmatrix} \right|$



Lage von Geraden im Raum

1. Sind die Richtungsvektoren kollinear?
2. Gibt es einen gemeinsamen Punkt?

Gemeinsame Punkte

	Ja	Nein
Kollinear / Parallel	Identisch	Echt parallel
Nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Pascal Isliker

3 – Quadratische Matrizen

Inverse einer Quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Inverse einer 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$!

Inverse einer Quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrizen umformen

Bestimmen Sie die Matrix X

$$A \cdot X + B = 2X$$

1. $A \cdot X = 2 \cdot X - B$
2. $A \cdot X - 2 \cdot X = -B$
3. $(A - 2E) \cdot X = -B$
4. $(A - 2E) \cdot (A - 2E)^{-1} \cdot X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$
5. $X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$

Linear unabhängig

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ sind *linear unabhängig*, wenn gilt:

- $0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_k}$ ist die einzige Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt
- $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k} \neq \vec{0}\ (\lambda > 0 \land \lambda \in \mathbb{R})$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind *linear unabhängig*
- Zeilen von A sind *linear unabhängig*
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Determinante

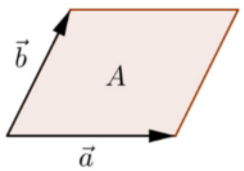
- $\det(A) \quad = \det(A^T)$
- $\det(AB) \quad = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) \quad = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(E) \quad = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$
- $\det(\lambda \cdot A) \quad = \lambda^n \cdot \det(A)$

Geometrische Interpretation der Determinante

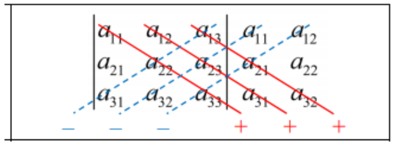
Der Betrag einer Determinante entspricht … beschrieben wird.

- dem *Flächeninhalt*, der durch eine 2x2-Matrix
- dem *Volumen*, das durch eine 3x3-Matrix

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$



Determinante einer 2×2 − Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$



$$\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Determinante einer 3×3 − Matrix $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 + y_1 \cdot z_2 \cdot x_3 + z_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - z_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot z_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_2 \cdot z_3$$

Determinante $n \times n$ − Matrix

Um die Determinante einer $n \times n$-Matrix zu berechnen, wählen wir i = Zeilen, j = Spalten

Entwicklung nach der i −ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Tipp: Entwickeln nach Spalte / Zeile mit vielen Nullen!

Entwickeln nach Zeile / Spalte

$$\begin{pmatrix} 1^+ & 5 & 9 & 13 \\ 2^- & 6 & 10 & 14 \\ 3^+ & 7 & 11 & 15 \\ 4^- & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +6 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = 6 \cdot -4 - 7 \cdot -8 + 8 \cdot -4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \cdots$$

4 - Vektorräume

Reeller Vektorraum

Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V $(\neq \emptyset)$ mit zwei Verknüpfungen:

- $+: V \times V \to V: (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$ Addition
- $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V: (\lambda; \vec{b}) \mapsto \lambda \cdot \vec{b}$ Skalare Multiplikation
- Der Nullpunkt muss zwingend enthalten sein!

Linearer Spann

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ in einem reellen Vektorraum V.

$$span(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}) = \{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \lambda_n \cdot \overrightarrow{b_n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

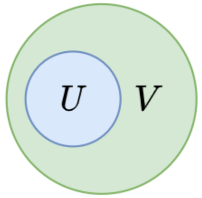
Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ – Matrix B.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ sind ***linear unabhängig***
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \vec{0}$
3. Es gilt $rg(B) = n$

Eine Teilmenge U eine Vektorraums V heisst ***Unterraum*** von V, wenn U selbst auch ein *Vektorraum* ist.

Unterraumkriterien



1. Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in U$
2. Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\lambda \cdot \vec{a} \in \mathbb{R}$

Erzeugendensystem

Eine Menge $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ von Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ im Vektorraum V heisst *Erzeugendensystem* von V, wenn gilt:

$$V = span(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n})$$

Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ – Matrix B.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ bilden ein ***Erzeugendensystem*** $\mathbb{R}^m$
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
3. Es gilt $rg(B) = m$

Dimensionen

Für jeden reellen Vektorraum V gilt: Jede Basis von V hat gleich viele Elemente.

Die *Anzahl Vektoren*, die eine Basis von V bilden, heisst *Dimension* von $V = \dim(V)$.

- Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente $\to \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basis

Eine Menge $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ von Vektoren $\vec{b}_k$ im Vektorraum V heisst *Basis* von V, wenn

1. $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V
2. Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ sind linear unabhängig

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ bilden eine ***Basis*** von $\mathbb{R}^n$
2. $rg(B) = n$
3. $\det(B) \neq 0$
4. B ist invertierbar
5. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Beliebige Basis B → Standard-Basis S

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b_1} + a_2 \cdot \vec{b_2} + \cdots + a_n \cdot \vec{b_n}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

Standard-Basis S → Beliebige Basis B

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix}$$

5 – Lineare Abbildungen

Gegeben sind zwei Vektorräume V und W. Eine Abbildung $f: V \to W$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\vec{x} \cdot \vec{y}) \;= f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})$

Erlaubte Operationen

- $\lambda \cdot x_i$
- $x_i + x_j$

Verbotene Operationen

- $x_i + c$
- $x_i \cdot x_j$
- $(x_i)^n$
- $\cos(x_i)$

Das ***Bild*** $im(A)$ einer $m \times n$ -Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ der Matrix aufgespannt wird:

$$im(A) = span(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}) = \{\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} \,|\lambda_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$im(A) = \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mu, v \in \mathbb{R}\right)$$

Für jede $m \times n$ – Matrix A gilt:

$$\dim\big(im(A)\big) = rg(A) \;\; und \;\; \dim(\ker(A)) + \dim\big(im(A)\big) = n$$

Überprüfung der **Linearität**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
- $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \to OK$
- $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \quad = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + 2 \cdot (\lambda \cdot x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + 2x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \to OK$

Die Abbildung ist *linear.*

Der ***Kern*** einer $m \times n$ -Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Der *Kern* $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V | A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f: U \to V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g: V \to W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\overbrace{\begin{array}{ccccc} U & \overset{f}{\to} & V & \overset{g}{\to} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g\big(f(\vec{x})\big) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}}^{g \circ f}$$

Die Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Abbildungsmatrix

Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede *lineare Abbildung* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ – Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \dots & f(\vec{e_n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} & \dots & f\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u>

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\3x_2\\-4x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x_1 - 1x_2\\0x_1 + 3x_2\\-4x_1 + 0x_2\end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\\-4 & 0\end{pmatrix}$$

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \{\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_n}\},\ \ W \text{ mit Basis } C = \{\vec{c_1}; \vec{c_2}; \dots; \vec{c_n}\}$$

Jede *lineare Abbildung* $f: V \to W$ durch eine $m \times n$ – Matrix ${}_CA_B$ darstellen

$$\left(f(\vec{x})\right)_C = {}_CA_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_CA_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C:

$${}_CA_B = {}_C\begin{pmatrix} \left(f(\vec{b_1})\right)_C & \left(f(\vec{b_2})\right)_C & \dots & \left(f(\vec{b_n})\right)_C \end{pmatrix}_B$$

<u>Beispiel</u> (Kann mittels Inverser oder Gauss berechnet werden)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-x_2\\2x_1\\x_2 - x_1\end{pmatrix},$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S\right\}, \qquad C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}_S\right\}$$

$${}_CA_B = {}_C\begin{pmatrix} \left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C & \left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C \end{pmatrix}_B$$

$$\left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -5\\0 & 2 & -4 & 4\\1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -11\\0 & 1 & 0 & 14\\0 & 0 & 1 & 6\end{array}\right)$$

$$\left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -3\\0 & 2 & -4 & -2\\1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -11\\0 & 1 & 0 & 15\\0 & 0 & 1 & 8\end{array}\right)$$

$${}_CA_B = {}_C\begin{pmatrix}-11 & -11\\14 & 15\\6 & 8\end{pmatrix}_B$$

Die Abbildungsmatrix ${}_BT_S$ für den **Basiswechsel** von S nach B

- Die Matrix ${}_BT_S$ ist die Inverse von ${}_ST_B$: ${}_BT_S = \left({}_ST_B\right)^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\text{lineare Abbildung } f"] & & \mathbb{R}^2 \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_SA_S"] \arrow[d, "{}_BT_S"'] & & f(\vec{x}) \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_BA_B"'] & & f(\vec{x}) \arrow[u, "{}_ST_B"']
\end{tikzcd}$$

Streckung

- x-Richtung λ_1
- y-Richtung λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- x-Richtung 3
- y-Richtung -1

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

- Gerade $g: ax + by = 0$
- Mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g: 2x - y = 0$
- Normiert $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spiegelung

- Geraden $g: ax + by = 0$
- Mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

- Geraden $g: x + 7y = 0$
- Normiert $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Rotation

- Um den Ursprung
- Um den Winkel φ

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Scherung

- In x-Richtung
- Mit Faktor m

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In x-Richtung
- Mit Faktor 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung

- Faktor λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- $E: ax + by + cz = 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

Spiegelung an der Ebene

- $E: ax + by + cz = 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

Rotation um den Winkel φ

$$x - Achse: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$y - Achse: \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$z - Achse: \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist.

$$x - Achse: \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1 - \cos(\varphi)) & a_1a_2(1 - \cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1 - \cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1 - \cos(\varphi)) & a_2a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$