General

Zahlentheorie

$\mathbb{N}$ = 0, 1, 2, 3, 4… ∞

$\mathbb{Z}$ = $-\infty$…, -2, -1, 0, 1, 2,… ∞

$\mathbb{Q}$ = $-\infty, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}$, .., 2…, 1.., 0.., 1…∞

$\mathbb{R}$ = $\mathbb{Q}$ + $\sqrt{2}, \pi$, etc.

Teilmenge: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

π = 3.14159

e = 2.71828

|x| = Betrag von x

|-4| = 4

$\lfloor x \rfloor$ = Gaussklammer/Abrundungsfunktion von x
(grösste Ganzzahl, die nicht grösser x ist)

$\lfloor -2.9 \rfloor = -2$

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow (a \neq 0)$

Wurzelgesetze

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Logarithmengesetze

$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$

$\log_{10} 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$

$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$

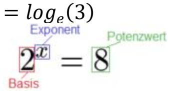
$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

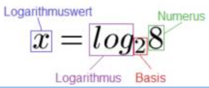
$\log_b(u^r) = r \cdot \log_b u$

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

$ln(e) = log_e(e)$

$ln(3) = log_e(3)$





Trigonometriegesetze

$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Komposition : g ∘ f = g(f(x))

$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x}$

(g ∘ f) = Funktion **f** in **g** für **x** einfügen = $\frac{1}{x^2+1}$

$(f \circ g)(u) = \frac{1}{u^2} + 1$

$(g \circ f)(2) => \frac{1}{x^2+1}$, $x = 2 => \frac{1}{5}$

Formeln

Mitternachtsformel (0 Punkte bestimmen)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Scheitelpunk

$$ax^2 + bx + c = a(x-u)^2 + v$$

$$S\left(-\frac{b}{2a} \;\middle|\; c - \frac{b^2}{4a}\right) = (u, v)$$

Polynomdivision

y = $\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}$ hat die **Nullstelle** $\boldsymbol{x_0}$ **= 1.**

Bestimmen Sie das Polynom q(x), sodass gilt: **y = (x – 1) · q(x)**

$\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 9x - 4 : (x - 1) = x^2 - 5x + 4}$
$-(\boldsymbol{x^3 - 1x^2})$
$-5x^2 + 9x$
$-(-5x^2 + 5x)$
4x - 4
-(4x - 4)
$\underline{\underline{= 0}}$

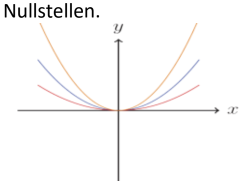
Also ist:
$q(x) = x^2 - 5x + 4$

Reihen

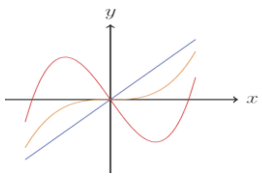
Reelle Funktionen

Polynom Grade

Eine Polynomfunktion vom Grad **n** hat höchstens **n** reelle Nullstellen.



Gerade Funktion z.B: x^2



Ungerade Funktion z.B: x^3

Mengen

Intervalle -> Für Definitionsbereiche

Abgeschlossene Intervalle

[1, 3] = 1,….,3

[a, b] = {x ∈ R | a ≤ x ≤ b}

Offene Intervalle

(a, b) =]a, b[= {x ∈ R | a < x < b}

Halboffene Intervalle

[a, b) = {x ∈ R | a ≤ x < b}

Unendliche Intervalle

[a, ∞) = {x ∈ R | a ≤ x}

(=]

) = [

Grenzwerte

Es kann nur einen Grenzwert geben

Begriffe

Konvergent = Grenzwert existiert

Divergent = Kein Grenzwert oder Unendlich

Monotonie

Streng monoton steigende Funktionen sind Umkehrbar

Streng monoton steigend

Jede Folgeglied ist > dem vorigen z.B.:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Monoton steigend

Jede Folgeglied ist >= dem vorigen z.B.:
1, 2, **3, 3, 3**, 4, 5

Streng monoton fallend

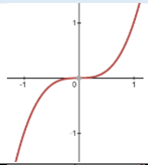
Jede Folgeglied ist < dem vorigen z.B.:
2, 1, 0, -1, -2

Monoton fallend

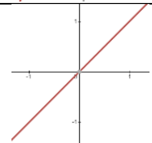
Jede Folgeglied ist <= dem vorigen z.B.:
2, 1, 0, 0, 0, -1

Monotonie Bsp.

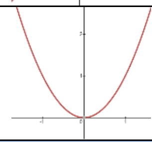
Monoton steigend



Streng monoton steigend



NICHT monoton



Symmetrie von Funktionen

Gerade oder Ungerade

Gerade = f(-x) = f(x)

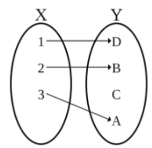
Ungerade = f(-x) = -f(x)

$x^4 + x^3$.. keine Symmetrie -> x^2 = Gerade & x^3 = Ungerade

Bei +- nur symmetrisch wenn alle Exponenten gerade/unger.

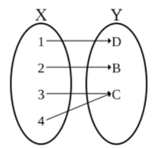
Injektiv, Surjektiv ,Bijektiv

Injektiv



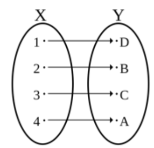
jedes X zeigt auf **höchstens** ein Y

Surjektiv



auf jedes Y zeigt **mindestens** ein X

Bijektiv



injektiv und surjektiv

Umkehrfunktionen

! Funktion ist nur umkehrbar, wenn Streng monoton steigend/fallend !

! 1 x darf nur auf 1 y zeigen !

Bsp. 1

$f(x) = \frac{2x}{1+x} \qquad == \qquad y = \frac{2x}{1+x}$

x auf eine Seite bringen:

$y = \frac{2x}{1+x} \qquad | \cdot (1+x)$

$y(1+x) = 2x$

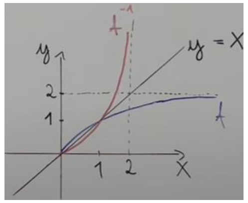
$y + yx = 2x \qquad$ | -yx

$y = 2x - yx$

$y = x(2-y) \qquad |: (2-y)$

X = $\frac{y}{2-y}$

= $\bar{f}(x) = f^{-1}(x) = \qquad x = \frac{y}{2-y}$



Grenzwerte

Limes

Grenzwert bei bestimmter Position

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} * (x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} x + 1 = 2$

Aufgaben

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x - 5}{7x + 3}$$

Folgen und Reihen

Polynom Grade

a_1 = Startwert

d = Differenz zu 2 Folgeglieder

Arithmetische Reihe

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n + d \quad \rightarrow \quad d = a_{n+1} - a_n$

Explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Teilsummen: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + \frac{n-1}{2} \cdot d)$

Geometrische Reihe

Rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \rightarrow \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$

Teilsummen: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$

Summenformel für eine unendliche Reihe, wenn $|q| < 1$:

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Summen berechnen

Berechnen Sie:

$$\sum_{k=1}^{30} 0.8^k$$

Wichtigste Summen

Summe der ersten n natürliche Zahlen (1+2+3+...+n)

$$\sum_{k}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der ersten n ungeraden Zahlen (1 + 3 + 5+ ... n)

$$\sum_{k}^{n} 2(k-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summer der ersten n Quadratzahlen

$$\sum_{k}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ableiten

Differentialquotient -> Definition

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ableitung von Konstanten

für jedes $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\boldsymbol{f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0}$$

Potenzregel

für jedes $n \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\boldsymbol{f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Exponentialfunktionen

für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\boldsymbol{f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$$

Logarithmusfunktionen

für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\boldsymbol{f(x) = \log_a x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x^2) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x}$$

Produktregel

$$\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$f(x) = 2x \cdot e^{-4x^3}$

$u(x) = 2x \qquad v(x) = e^{-4x^3}$

$u'(x) = 2 \qquad v'(x) - 12x^2e^{-4x^3}$

$f'(x) = 2e^{-4x^3} - 24x^3e^{-4x^3}$

Quotientregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel

$$f(x) = (u \circ v)(x) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiele

$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = 3x$	$f'(x) = 3$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$	$f'(x) = -5x^{-6}$
$f(x) = \sqrt{x^5} = (x^5)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$	$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = x^{-\frac{5}{2}}$	$f'(x) = -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{3x}$	$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$
$f(x) = e^{3x^2}$	$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$
$f(x) = log2(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(2) \cdot x}$
$f(x) = \ln(5x+3)$	$f'(x) = \frac{5 \cdot 1}{5x+3}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = -\sin(x)$	$f'(x) = -\cos(x)$
$f(x) = -\cos(x)$	$f'(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(2x)$	$f'(x) = \cos(2x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) =$

Tangentenverfahren von Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Logarithmische Ableitung

Gesucht: Ableitung von $y = u(x)^{v(x)}$

Logarithmieren: $\ln(y) = v(x) \cdot \ln(u(x))$

Ableiten mit Ketten- & Produktregel:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Auflösen nach y':

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Monotomie/Kurvendiskusion

Monotomie

Wenn $f(x)$ differenzierbar ist mit $x_0 \in \mathbb{D}$ so gilt:

$f'(x_0) > 0$	Kurve wächst streng monoton in der Umgebung von Punkt $P(x_0, f(x_0))$
$f'(x_0) < 0$	Kurve fällt streng monoton in der Umgebung von Punkt $P(x_0, f(x_0))$
$f'(x_0) = 0$	Kurve hat bei Punkt $P(x_0, f(x_0))$ eine horizontale Tangente

Krümmung

Wenn $f(x)$ differenzierbar ist mit $x_0 \in \mathbb{D}$ so gilt:

$f''(x_0) > 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt $P(x_0, f(x_0))$ nach links gekrümmt, konvex
$f''(x_0) < 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt $P(x_0, f(x_0))$ nach rechts gekrümmt, konkav
$f''(x_0) = 0$	Kurve ist in Umgebung Punkt $P(x_0, f(x_0))$ nicht eindeutig gekrümmt

Relative Extrema

$f(x)$ hat bei x_0 einen Extremwert, wenn gilt:

$$f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0$$

für die Extremwerte gilt:

$f''(x_0) > 0$ relatives Minimum

$f''(x_0) < 0$ relatives Maximum

Wendepunkt

$f(x)$ hat bei x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0$$

falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$, ist x_0 ein Sattelpunkt oder Terassenpunkt

Integral

Grundgesetze

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Unbestimmtes Integral

Menge aller Stammfunktionen: +C zwingend nötig

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (C \in R) \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \log_a(x)dx = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$$

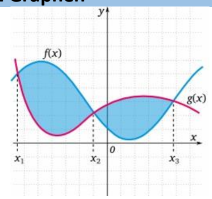
$$\int \tan(x)\,dx = -ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + C$$

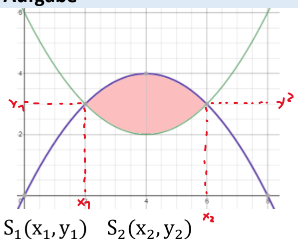
Fläche zwischen 2 Graphen



$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind Schnittpunkte $f(x) = g(x)$

$A = \left\lvert\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right\rvert + \cdots + \left\lvert\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))dx\right\rvert$
$A = \left\lvert\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right\rvert + \left\lvert\int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x))dx\right\rvert$

Aufgabe



$$f(x) = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 6$$

$$g(x) = -\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 4 = -\frac{x^2}{4} + 2x$$

$S_1(x_1, y_1) \quad S_2(x_2, y_2)$

$S_1(2, 3) \quad S_2(6, 3)$

$$A = \int_2^6 \left(\frac{-x^2}{4} + 2x\right)dx - \int_2^6 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 6\right)dx$$

$$= \int_2^6 \left(\frac{-2x^2}{4} + 4x - 6\right)dx$$

Stammfunktion von Integral

$$A = \left[\frac{-2x^3}{12} + 2x^2 - 6x\right]_2^6$$

$$A = \left(\frac{-2 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6\right) - \left(\frac{-2 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2\right) = \frac{16}{3}$$

Aufgaben Aus Serien

Reelle Funktion Serie 1

Grösstmögliche Definitionsbereiche bestimmen

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ D = ℝ > -1

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ D = ℝ \ {1, -1}

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ D = ℝ

d) $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2+1}$ D = [-2, 2] \ {1}

Schnittpunkt & Schnittpunkte mit x-Achse

y = $4x^2 + 2x + 5$

Nullpunkt: Mitternachtformel -> **Nicht vorhanden**

Scheitelpunkt Formel:

Prüfung 2019

Aufgabe 1

Gegeben ist das Polynom:

$$p(x) = a \cdot x^2 \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{b})$$

Es gilt **p(-1) = 4**, und der Graph hat an der Stelle x = 2 eine **horizontale Tangente***.

* = 1. Ableitung = 0

Finden Sie a und b

Gleichung 1:

$p(-1) = a \cdot (-1)^2 \cdot (-1 - \mathrm{b}) = 4$

$4 = -a - ab$ |·(-1)

$-4 = a + ab$

$-4 = a(1 + b)$ | : a

$\frac{-4}{a} = 1 + b$ | -1

$\boldsymbol{b = \frac{-4}{a} - 1}$

Gleichung 2:

$p(x) = a \cdot x^2 \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{b})$

$p'(\mathrm{x}) = 3ax^2 - 2\mathrm{abx}$

$p'(2) = 12\mathrm{a} - 4\mathrm{ab} = 0$

$= \boldsymbol{4a(3 - b)}$

b einsetzen in 2. Gleichung

$p'(\mathrm{x}) = 3ax^2 - 2\mathrm{abx} = 0$

$p'(2) = 12a - 4\mathrm{ab} = 0$

$4a(3 - b) = 0$