1. Elementare Logik

Aussage
Sprachliches Gebilde, kann mir "wahr" oder "falsch" beantwortet werden.
Bsp.: A := "Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen" (true)

Prädikat
Eine Aussage mit freien Variablen.
Bsp.: A(x) := "(x ist eine Primzahl)"

Junktoren
Verknüpfung von Aussagen.

Negation ¬

A	B	Bsp:
0	0	A := "Hans studiert an der ZHAW."
0	1	¬A := "Hans studiert nicht an der ZHAW."

Konjunktion ∧ (und)

A	B	A∧B	Bsp:
0	0	0	A := "2 ist gerade." (wahr)
0	1	0	B := "3 ist gerade." (falsch)
1	0	0	A∧B :="A und B" (falsch)
1	1	1	

Konjunktion ∨ (oder)

A	B	A∨B	Bsp:
0	0	1	A := "2 ist gerade." (wahr)
0	1	1	B := "3 ist gerade." (falsch)
1	0	0	A∨B :="A oder B" (wahr)
1	1	1	

Implikation → (wenn a, dann b)

A	B	A→B	Bsp:
0	0	1	A := "Es regnet."
0	1	1	B := "Die Strasse ist nass."
1	0	0	A→B :="Wenn A wahr, muss auch B wahr"
1	1	1	"Wenn A falsch, kann B wahr oder falsch."

Äquivalent ⇔ (gleich)

A	B	A⇔B	Bsp:
0	0	1	A := "Es regnet."
0	1	0	A(x):= "x^2 = 4"
1	0	0	B(x) := "x = 2"
1	1	1	A(2) ⇔ B(2)

Junktoren Regeln

Formel	Logisch äquivalent	Bezeichnung
A ∧ B	B ∧ A	Kommutativ
A ∨ B	B ∨ A	Kommutativ
¬¬A	A	Doppelt Negation
A ∧ (B ∧ C)	(A ∧ B) ∧ C	Assoziativgesetz
A ∨ (B ∨ C)	(A ∨ B) ∨ C	Assoziativgesetz
A ∧ (B ∨ C)	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)	Distributivgesetz
A ∨ (B ∧ C)	(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)	Distributivgesetz
¬ (A ∧ B)	¬A ∨ ¬B	De Morgan Regel
¬ (A ∨ B)	¬A ∧ ¬B	De Morgan Regel
A → B	¬A ∨ B	Disjunktive Implik.

Aussagenlogik

Gültig, Wa+hr	→ unter **einer** Belegung B(A) = true
Allgemeingültig	→ unter **jeder** Belegung gültig
Erfüllbar	→ mind unter **einer** Belegung gültig
Unerfüllbar	→ unter **keiner** Belegung gültig
Widerlegbar	→ **mind 1** Belegung, unter der ungültig

Quantoren

Allquantor ∀x (für alle gilt)
∀x ∈ ℕ A(x)

Existenzquantor ∃x (es existiert mind 1)
∃x ∈ ℕ A(x)

Existenzquantor ∃!x (es existiert **genau** 1)
∃!x ∈ ℕ A(x)

! Quantoren binden stärker als Junktoren!
! ∀x A(x) ⇔ ¬∃x ¬A(x) !
! ∀x ∈ M (∀y ∈ M A(x, y)) ⇔ ∀x,y ∈ M A(x, y) !

Negation von Quantoren

¬∀x P(x)	== ∃x ¬P(x)
∀x ¬P(x)	== ¬∃x P(x)
∀x P(x)	== ¬∃x ¬P(x)
¬∀x ¬P(x)	== ∃x P(x)
∀x∀y	== ¬∃x¬∃y

2. Syntax & Semantik

Normalformen

NNF
! Keine Implikation & Negation in Literalen !

DNF — Oder ∨
(A ∧ B) ∨ **C** ∨ **(A** ∧ **B** ∧ ¬C)
Auch bei nur 1 Argument
A ∧ (C ∧ B) Auch DNF da nur 1 Argument = (A ∧ C ∧ B)

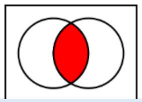
KNF — Und ∧
(A ∨ B) ∧ **C** ∧ **(A** ∨ **B** ∨ ¬C)

3. Mengen, Relation & Funktionen

Menge

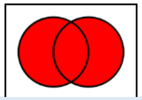
Schnittmenge «Durchschnitt» ∩
Konjunktion **«und»**

A = {1, **2**, **3**}
B = {**2**, **3**, 4}
A ∩ B = {2, 3}

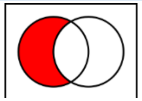


Vereinigung ∪
Disjunktion ***«oder»***

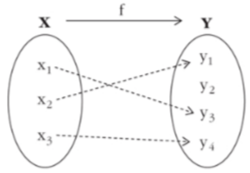
A = {1, 2, 3}
B = {2, 3, 4}
A ∪ B = {1, 2, 3, 4}



Differenz \
A = {1, 2, 3}
B = {2, 3, 4}
A \ B = {1}



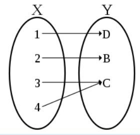
Funktion
Definition: Sei $f \subseteq A \times B$ eine Relation
Funktion von A nach B: $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B ((x, y) \in f)$



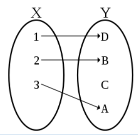
Jedes x hat nur genau **ein** y.

Relationen

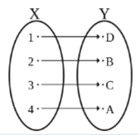
Surjektiv



Injektiv



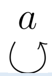
Bijektiv



Binäre Relation
Relation zwischen zwei Elementen einer Menge

Äquivalenzrelationen

Reflexiv
Definition: x Steht in Relation zu sich selber
$x \in X \quad xRx$



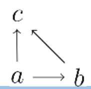
Symmetrisch
Definition: Wenn xRy dann steht y auch in Relation zu x
$x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$

$$a \longleftrightarrow b$$

Antisymmetrisch
Definition: Wenn xRy dann steht y auch in Relation zu x
$x, y \in X \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
Es gibt eine Relation von a nach b aber nicht von b zu a.

$$a \longrightarrow b$$

Transitiv
Definition:
$x, y, z \in X$
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$



Ordnungsrelationen
Sei R eine binäre Relation auf der Menge M:
R ist eine Präordnung

Präordnung
R ist eine Präordnung auf M wenn R reflexiv & transitiv ist

Halbordnung
R ist eine Halbordnung auf M, wenn R **reflexiv**, **antisymmetrisch** & **transitiv** ist.

Totale Ordnung
R ist eine Totalordnung auf M, wenn R eine **Halbordnung** ist & keine R-unvergleichbaren Elemente existieren.

Paarweise vergleichbar
Es gibt eine Relation zueinander.
a **ist** Anfang von b, b von c
1, 10, 100…

Paarweise unvergleichbar
Es gibt keine Relation zueinander.
a **ist nicht** Anfang von b, b **nich**t von c
1, 01, 001…

Potenzmenge -> P()
$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$P(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$P(P(a)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

Partition -> Anzahl Äquivalenzrelationen M x M
Die Menge $\{1, 2, 3\}$ hat genau 5 Partitionen:

- $\{\{1, 2, 3\}\}$
- $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
- $\{\{2\}, \{3, 1\}\}$
- $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Voraussetzungen:
1. Die Vereinigungen(U) aller Partitionsmengen = Menge
2. {} darf nicht leer sein und {{1},{1, 2, 3}} dürfen nicht mehrmals vorkommen -> paarweise disjunkt

Kartesisches Produkt -> Kreuzprodukt = A x B
$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
A = {1, 2}
B = {2, 3}
C = {5}
A x B = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)}
A x B x C = {(1, 2, 5), (1, 3, 5), (2, 2, 5), (2, 3, 5)}

Fakultät
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

4. Rekursive Strukturen und die natürlichen Zahlen

Vollständige Induktion

Bsp.:
A(n) := "Die Summe aller natürlichen Zahlen bis n, ist halb so gross wie n(n+1)."

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Induktionsverankerung

Beweis, dass Gleichung für kleinstes n gilt.
n = 0

$$\mathbf{0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0}$$

2. Zu zeigen in Schritt

$$\sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

3. Induktions Annahme

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Beweis vom Schritt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2}$$

$$\mathbf{\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}}$$

Rekursion

5. Zahlentheorie

Zahlenbereiche

$\mathbb{N}$ = 0, 1, 2, 3, 4… ∞	**abzählbar**
$\mathbb{Z}$ = −∞…, -2, -1, 0, 1, 2,… ∞	**abzählbar**
$\mathbb{Q}$ = −∞, $-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}$, .., 2…, 1.., 0.., 1…∞	**abzählbar**
$\mathbb{R}$ = $\mathbb{Q}$ + $\sqrt{2}$, π, etc.	**überabzählbar**

Teilmenge: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Peano Axiome - Natürliche Zahlen

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
3. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$
4. $\forall n, m(n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$
5. $\forall X(0 \in X \land \forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X\, n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)$

Axiome ausgeschrieben

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält **X** die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von **X**.

ggT(a, b) Euklidischer Algorithmus

ggT(156, 66)	a	b	rest
156 = 2 · 66 + 24	156	66	24
66 = 2 · 24 + 18	66	24	18
24 = 1 · 18 + 6	24	18	6
18 = 3 · **6**	18	**6**	0

ggT(a, b) = ggT(a, b-a) = ggT(a-b, b)

kgV(a, b) Primfaktorzerlegung

kgV(a, b) = $\frac{a \cdot b}{ggT(a,b)}$

Primzahlen

Lemma von Bézout

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\, \exists s, t \in \mathbb{Z}: \quad ggT(a,b) = s \cdot a + t \cdot b$$

$$a \cdot 3215 + b \cdot 123 = ggT(3215, 123) = 1$$

1 Sukzessives Teilen

3215 = 26 · 123 + 17
123 = 7 · 17 + 4
17 = 4 · 4 + 1
1 = ggT

2 Rückwärts einsetzen

1 = 17 – 4 · 4
= (3215 – 26 · 123) – 4 · (123 – 7 · 17)
= (3215 – 26 · 123) – 4 · (123 – 7 · (3215 – 26 · 123))
= **29** · 3215 **– 758** · 123

Also gilt **a = 29 & b = -758**

Multiplikative Inverse

$[100]_{12321}$ in $\mathbb{Z}/12321$
= $\mathbf{100^{-1}\ mod\ 12321}$ **= 2341**

Multiplikative Inversen finden - ergänzen

Welche Elemente von $\mathbb{Z}/12$ besitzen multiplikative Inverse?

Alle Zahlen 1 bis 12 mit ggt(n,12) = 1
1,5,7,11

Lemma von Euklid

Teilt p nm so teilt p n und p teilt m
$\forall n, m \in \mathbb{N}(p|nm \Rightarrow p|n \lor p|m)$ p ∈ $\mathbb{P}$ (Primzahl)

Simultane Kongruenz

Modulare Arithmetik

Modulo

$x \equiv 3\ mod\ 8$
Rechnung:
Der Rest von 3 geteilt durch 8 = 2
3:6 R 2

Chinesischer Restsatz

$x \equiv 3\ mod\ 5$
$x \equiv 5\ mod\ 7$
$x \equiv 7\ mod\ 9$
! Alle mod sind Teilerfremd !
ggT(5,7) = ggT(5,9) = ggT(7,9) = 1

1. 3 Sektionen erstellen

	mod 5	mod 7	mod 9
x =	7 · 9	+ 5 · 9	+ 5 · 7
x =	63	+ 45	+ 35
x =	63	+ 0	+ 0 (mod 5)
x = 3 mod 5			
x =	0	+ 45	+ 0 (mod 7)
x = 3 mod 7			
x =	0	+ 0	+ 35 (mod 9)
x = 8 mod 9			

Muliplikator finden damit

x ≡ 3 mod 5
x ≡ 5 mod 7
x ≡ 7 mod 9

63 ≡ 3 mod 5

45 ≡ 3 mod 7 (gesucht 5 mod 7)
3 · i ≡ 1 mod 7
3 · 5 = 15 ≡ 1 mod 7
3 · **5** · **5** = 75 ≡ **5 mod 7**
Die nötigen Multiplikationen hoch nehmen zu den Sektionen

35 ≡ 8 mod 9 (gesucht 7 mod 9)
8 · i ≡ 1 mod 9
8 · 8 = 64 ≡ 1 mod 9
8 · **8** · **7** = 448 ≡ **7 mod 9**
Die nötigen Multiplikationen hoch nehmen zu den Sektionen

x = 63 + 45 · 5 · 5 + 35 · 8 · 7
x = 63 + 1125 + 1960
x = 3148

x verkleinern (optional)

x kann beliebig mit dem Resultat von **5** · **7** · **9 = 315** vergrössert/verkleinert werden
3148 - 315 · 9 = **313**

$313 \equiv 3\ mod\ 5$
$313 \equiv 5\ mod\ 7$
$313 \equiv 7\ mod\ 9$

Fehlende Themen

Hasse-Diagramm (Beispielaufgabe) -> r-minimal & R-maximal

Beweise:
Abzählbarkeit
Äquivalezrelationen

Aufgaben

Elementare Logik

Mengen

Relationen

Induktion

Induktion Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlcihen Zahlen n gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

Verankerung

Beweis, dass Gleichung für kleinstes n gilt.
n = 1

$$\mathbf{2-1=1^2=1}$$

Zu zeigen in Schritt

Induktive Annahme

Induktion Aufgabe 2

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlcihen Zahlen n gilt

$$\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$$

Rekursion

Elementare Zahlentheorie

Prüfungsaufgaben 2016

1 Multiple-choice

$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\,(n = k + 10)$ . . . . ☐ wahr ☒ falsch $n < 10$

$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\,(n < k + 3)$ . . . . ☒ wahr ☐ falsch

Die aussagenlogische Formel $\neg p \to (p \to q)$ ist allgemeingültig. . . . . ☒ wahr ☐ falsch

Die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ ist abzählbar. . . . . ☒ wahr ☐ falsch

Jede binäre Relation auf einer Menge mit nur einem einzigen Element ist reflexiv. . . . . ☐ wahr ☒ falsch $\{a\}$

$\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$

Logik

Wir arbeiten im Kontext der natürlichen Zahlen.

E(n) := n hat die nicht näher spezifizierte Eigenschaft E.
Mul(x, y) := x ist ein Vielfaches von y.

Die Zahl x ist kein gemeinsamer Teiler der Zahlen k und n

$$\neg(\boldsymbol{mul}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{mul}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}))$$

Alle Vielfachen einer natürlichen Zahl mit der Eigenschaft E haben selbst die Eigenschaft E.

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{mul}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}))$$

Logik 2

Die aussagenlogische Formel

$$\boldsymbol{F} = \neg \boldsymbol{p} \to (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$$

Wahrheitstabelle

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \to (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Ist die Formel F erfüllbar?
Ja da 3 von 4 true sind.

Ist die Formel F allgemeingültig?
Nein, da 1 false ist.

Bringen Sie die Formel F in KNF:

$$\neg \boldsymbol{p} \to (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$$
$$\equiv \neg(\neg \boldsymbol{p}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$$
$$\equiv (\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \text{ KNF}$$
$$\equiv \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q} \text{ KNF}$$

Mengen

Es seien **A = {a, b, x, y}** und **B = {x, y}** gegeben. Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender Schreibweise auf, so dass im Resultat nur die
Zeichen ∅, {, }, a, b, x, y, (,), 3, , vorkommen.

P(A\B)

A\B = {a, b}
P({a, b}) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}

(B x (A\B)) x {3}

B = {x, y}
A\B = {a, b}
({x, y} x (a, b)) x {3} =
{(x, a, 3), (x, b, 3), (y, a, 3), (y, b, 3)}

Mengen 2

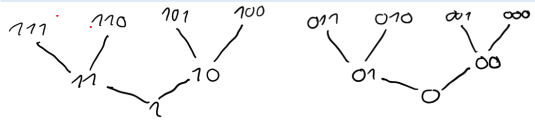
*Es sei X \ Y abzählbar und X überabzählbar. Können Sie etwas über die Abzählbarkeit/Überabzählbarkeit von **Y** aussagen?*

Y muss ebenfalls überabzählbar sein, da eine überabzählbare Menge überabzählbar bleibt, wenn man ihr eine abzählbare abzieht.

Relationen

Wir betrachten folgende Halbordnung auf der Menge der endlichen Binärsequenzen: s ≤ r :⇔ s ist ein **Anfangsabschnitt** von r.
Bsp: 11 ≤ 11011, 1 ≤ 10, 11 ≤ 11, 000 ≤ 00000, . . .

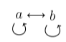
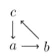
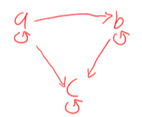
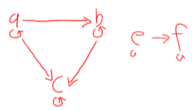
Skizzieren Sie das Hasse-Diagramm dieser Relation auf der Menge der Binärsequenzen der Länge kleiner oder gleich 3



Geben Sie eine unendliche Menge s0, s1, s2, . . . von Binärsequenzen an, die bezüglich der Relation ≤ paarweise unvergleichbar sind.

n ∈ ℕ	0	1	2	3	...
Sn	1	01	001	0001	...

Relationen 2

Gerichteter Graph	Symmetrisch	Halbordnung	Totale Ordnung
	Ja	Nein	Nein
	X	X	X
	Nein	Ja	Ja
$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d$	X	X	X
	Nein	Ja	Nein

Induktion & Rekursion

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Verankerung

n = 1

$$\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Zu zeigen in Schritt

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

Beweis im Schritt

$$\frac{n+1}{n+1+1}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$
$$\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{(\mathbf{n}+\mathbf{1})}{(\mathbf{n}+\mathbf{2})}=\frac{(\mathbf{n}+\mathbf{1})}{(\mathbf{n}+\mathbf{2})}$$

Rekursion

Die Funktion F : N ⟶ N sei durch folgende Rekursionsgleichungen gegeben:

$$F(0)=1$$
$$F(n+1)=\sum_{i=0}^{n}F(i)$$

Berechnen Sie F(4)

F(n)	1	1			
n	0	1	2	3	4

Chinesischer Restsatz teilerfremde Module

Finden Sie x

$x \equiv 2\ mod\ 3$
$x \equiv 3\ mod\ 4$
$x \equiv 2\ mod\ 5$

1. Produkt teilerfremden Modulen bilden

A = 3 · 4 · 5 = 60

$A_i = \frac{A}{a_1}$

$A_1 = \frac{60}{3} = 20$

$A_2 = \frac{60}{4} = 15$

$A_3 = \frac{60}{5} = 12$

$\boldsymbol{r_i \cdot a_i + s_i \ \cdot A_i = 1}$

$7 \cdot 3 + (-1)\ \cdot 20 = 1$
$7 \cdot 4 + (-1)\ \cdot 15 = 1$
$7 \cdot 5 + (-2)\ \cdot 12 = 1$

$\boldsymbol{e_i = s_i \cdot A_i}$

$e_1 = (-1) \cdot 20 = \ -20$
$e_2 = (-1) \cdot 15 = \ -15$
$e_1 = (-2) \cdot 12 = \ -24$

Weiterhin gilt:

$e_1 \cdot \ x_1 = \ -20 \cdot 2 = \ \mathbf{-40}$
$e_2 \cdot \ x_2 = \ -15 \cdot 3 = \ \mathbf{-45}$
$e_3 \cdot \ x_3 = \ -24 \cdot 2 = \ \mathbf{-48}$

$\boldsymbol{x} = \ \mathbf{-40} + (\mathbf{-45}) + (\mathbf{-48}) = \ \mathbf{-133}$

Chinesischer Restsatz

Voraussetzung: alle modulos sind teilerfremd (ggt=1)

Gesucht: x & Lösungsmenge

$x \equiv 3\ mod\ 5$
$x \equiv 5\ mod\ 7$
$x \equiv 7\ mod\ 9$

ggT(5,7) = ggT(5,9) = ggT(7,9) = 1

1) Teilsystem lösen

$x \equiv 3\ mod\ 5$ $\quad x \equiv a\ mod\ m$
$x \equiv 5\ mod\ 7$ $\quad x \equiv b\ mod\ n$

1.1) Sukzessives Teilen mit Rest

$7 = 1 \cdot 5 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$

1.2) Umstellen zu $1 = c \cdot m + d \cdot n$

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = \ 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5)$
$1 = 5 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7$

1.3) $x = \ b \cdot cm + a \cdot dn$

$x = 5 \cdot (3 \cdot 5) + 3 \cdot (-2 \cdot 7) = 33$

1.4) Lösungsmenge $[x]_{m \cdot n}$

$5 \cdot 7 = 35\ \rightarrow\ [33]_{35} \rightarrow x \equiv 33\ mod\ 35$

2) Zweites Teilsystem lösen

$x \equiv 33\ mod\ 35$
$x \equiv 7\ mod\ 9$

2.1)

$35 = \ 3 \cdot 9 + 8$
$9 = \ 1 \cdot 8 + 1$

2.2)

$1 = 9 - 1 \cdot 8 = 9 - (35 - 3 \cdot 9) = 4 \cdot 9 + (-1) \cdot 35$

2.3)

$x = 33 \cdot 4 \cdot 9 + 7 \cdot (-1) \cdot 35 = 943$

2.4)

$9 \cdot 35 = 315 \rightarrow\ [943]_{315} = [313]_{315}$

Induktion Aufgaben

Vollständige Induktion

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Induktionsverankerung

Beweis, dass Gleichung für kleinstes n gilt.

n = 0

$$\mathbf{0} = \frac{\mathbf{0(0+1)}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$$

2. Zu zeigen in Schritt

$$\sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

3. Induktions Annahme

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Beweis vom Schritt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+n+2}{2}$$

$$\frac{\boldsymbol{n^2+3n+2}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{n^2+3n+2}}{\mathbf{2}}$$

Induktion Aufgabe 3

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1. Induktionsverankerung

Beweis, dass Gleichung für kleinstes n gilt.

n = 0

$$\mathbf{0(0+1)} = \frac{\mathbf{0(0+1)(0+2)}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0}$$

2. Zu zeigen in Schritt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\left(\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3}\right)$$

3. Induktions Annahme

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4. Beweis vom Schritt

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+1+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3}$$

$$\frac{(n^3+3n^2+2n)+(3n^2+9n+6)}{3} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$$

$$\frac{\boldsymbol{n^3+6n^2+11n+6}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{n^3+6n^2+11n+6}}{\mathbf{3}}$$

Induktion Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlcihen Zahlen n gilt

$$\sum_{k}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktion Aufgabe 5

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlcihen Zahlen n gilt

$$\sum_{k}^{n} 2(k-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktion Aufgabe 6

Beweisen Sie mit Induktion: Für alle natürlcihen Zahlen n gilt

$$\sum_{k}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$