Matrizen

Spaltenanzahl (Spalte chunt später)

A $m \times n$ Matrix (immer Grossbuchstaben)

Zeilenanzahl (Zeile chunt zerst)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

a_{ij} → Spalte, Zeile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to 2 \times 3$$

↳ Dimension

$a_{21} = 4$ → Element

Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- ● = 0
- Quadratisch
- $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Einheitsmatrix: I E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E \cdot A = A = A \cdot E$

↳ beliebige Md

Dreiecksmatrix:

obere DM

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

untere DM

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

symetrisch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- $a_{ij} = a_{ji}$

transponiert

- Zeilen werden zu Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

- Addition & Subtraktion
  - Gleiche Dimension $A: 3 \times 2$ $B: 3 \times 2$ Übereinstimmen
  - Elementweise

Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$'' - '' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

- Skalare Multiplikation
  - Elementweise

Bsp.: $3 \cdot \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&6\\9&12\\15&18\end{pmatrix}$

- Matrizen multiplikation

$A \cdot B = C$

  - Dimension
    - $A: m \times n$
    - $B: n \times p$
    - $C: m \times p$
    - übereinstimmend

$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}$ $B_{2\times 2} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $A \cdot B = ?$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4\\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 4\\ \dots & \dots\end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix}7&10\\15&22\\ \vdots & \vdots\end{pmatrix}}_{C}$$

$C_{3\times 2}$

Rang

$\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&8\\0&0&1\end{pmatrix} \Big\} 3$ Rang = "Anzahl "nicht-0-Zeilen""

$\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix} \Big\} 2$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Big\} 1$

Inverse

$\left(3x = 8 \mid \cdot\tfrac{1}{3}\right)$ ↗ inverse $\qquad A \cdot B = C \rightarrow B = ?$

$\cdot\ A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$

$A \cdot B = C \quad | A^{-1}$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot B = A^{-1} \cdot C$

$\underbrace{E \cdot B}_{B} = A^{-1} \cdot C$

$B = A^{-1} \cdot C$

$A \cdot B \neq B \cdot A$!

$A \cdot A^{-1} = E$

2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot d - c \cdot b}_{\text{Determinante}}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Matrizen höherer Ordnung
  ↳ nach LGS

Determinante

- Zuordnung Zahl zu Matrix
- det $\neq 0$ → invertierbar $\qquad$ Inverse: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det\left((A^T B)^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A^T \cdot B)}$$

inversierbar? ⇒ det $\neq 0$

$\det(M^7) \neq 0 \qquad \det(A^k) = (\det(A))^k$

- det $= 0$: → 0-Zeile oder 0-Spalte existiert
  → 2 Zeilen oder 2-Spalten gleich sind
  → 2 Zeilen oder 2 Spalten zueinander proportional
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten ändert Vorzeichen
- Determinante verändert sich nicht beim addieren einer Zeile oder Spalte zu einer anderen (auch vielfaches)
- Zeile oder Spalte mit Skalar multiplizieren
  ↳ Determinante mit dem Skalar multiplizieren
- det von △-Matrix oder Diagonalmatrix = Produkt der Hauptdiagonalelemente

2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \det(A) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i$$

n-Matrizen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

- Spalte/Zeile mit möglichst vielen Nullen (hier 4)
- hilfsmatrix $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \text{ weil } = \text{Null}$$

Regel von Sarrus

$$= -2(-12 + 8 + 12 \ldots) + 2(\cdots) - 1(\cdots) + 0$$

$$= 123$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ 1x + 2y + 1z &= 2 \\ 1x + 1y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$\vec{b}$ → Lösungsvektor

$$\underbrace{\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \overset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}}_{\text{Matrizenmultiplikation}} = \overset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad = A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad A \mid \vec{b}$$

Gauss-Jordan Verfahren

Zeilenstufenform (ZSF)

ZSF

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array}\right)$$

führende Einsen

Nullen

reduzierte ZSF

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & g \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{aligned} x &= g \\ y &= h \\ z &= i \end{aligned}$$

→ Einheitsmatrix

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + a \cdot y + b \cdot z &= d \\ 1 \cdot y + c \cdot z &= e \qquad y = e - c \cdot z \\ z &= f \end{aligned}$$

Rechenregeln: 3 "Werkzeuge" die die Lösungsmenge nicht verändern

1. Zeilen vertauschen
2. Multiplikation einer Zeile mit Skalar $\neq 0$
3. Addition einer Zeile oder Vielfaches (2) zu einer anderen.

$$\begin{array}{ccc|c} p & q & r & s \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

reduzierte ZSF

Multiplikation (1)
Addition (0)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

- von oben nach unten
  1. ZSF
  2. reduzierte ZSF
  3. oben → oben, links → rechts

Eins

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\cdot \tfrac{1}{2}) \\ \text{Null} \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \urcorner \\ \lrcorner \; \oplus \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (\cdot \tfrac{1}{3}) \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \oplus \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \oplus \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ZSF

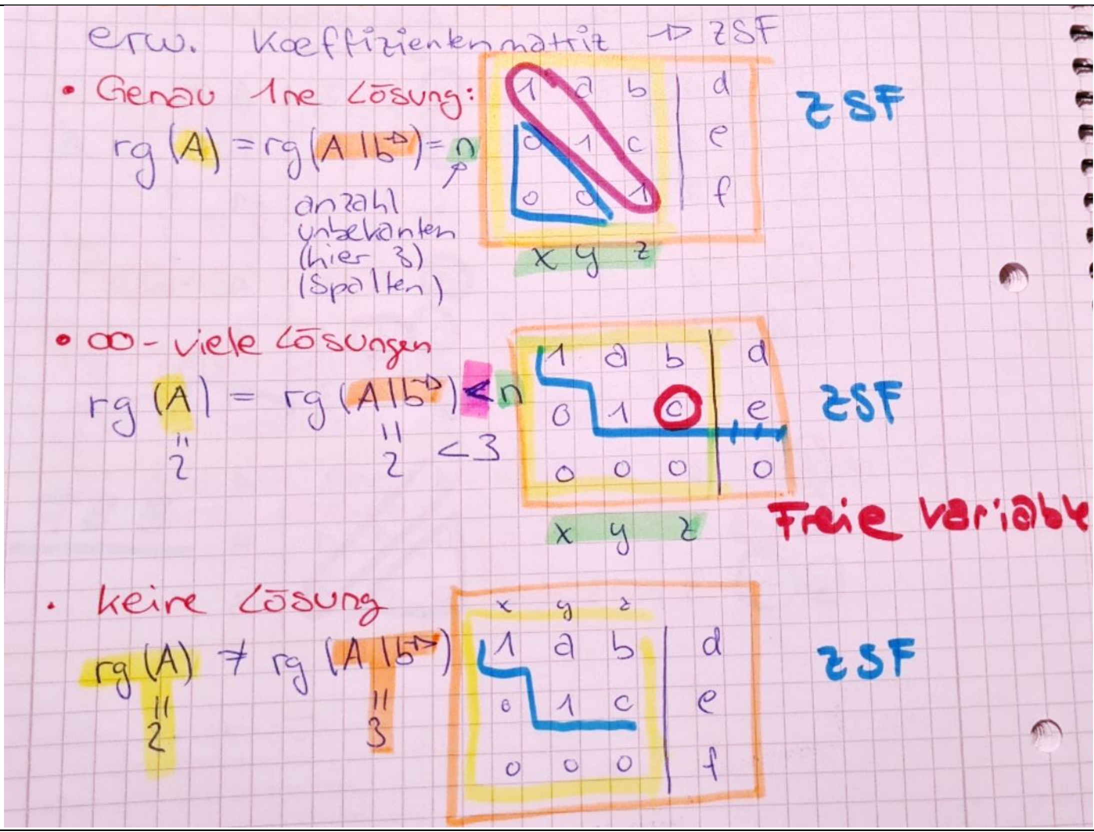
nullen für reduzierte ZSF

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \oplus \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \oplus \\ \cdot(-1) \end{array}$$

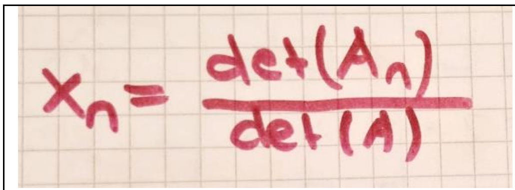
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \text{reduzierte ZSF}$$

c) $p = -4$
$q = 1$
$r = 3$

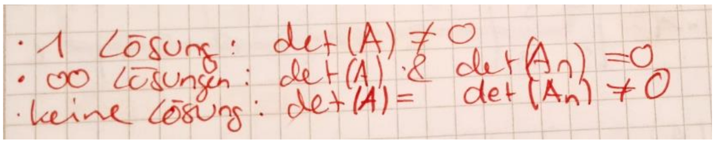
Lösbarkeit eines LGS

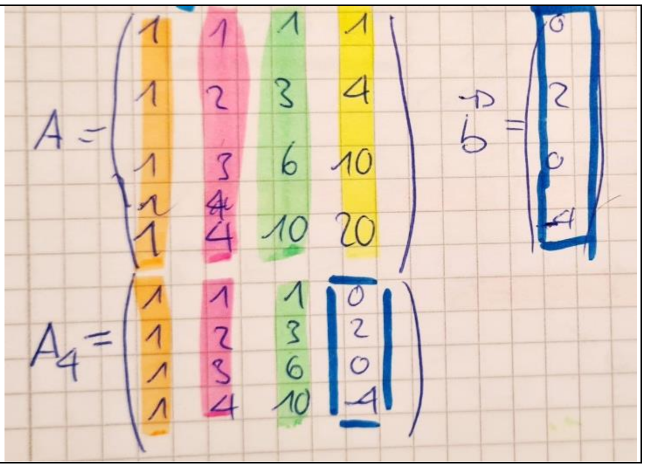


Cramsche Regel



Lösbarkeit

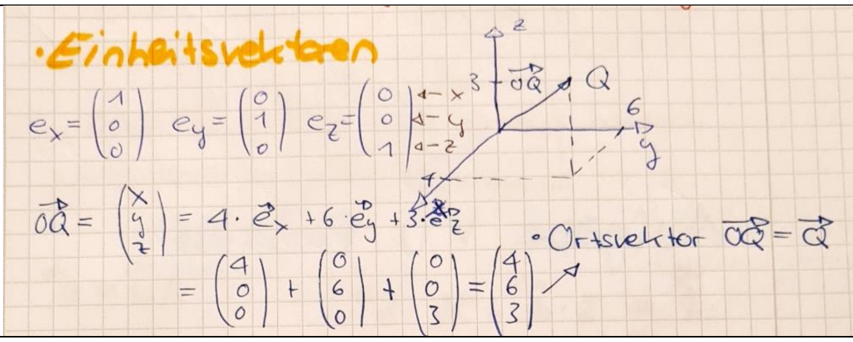


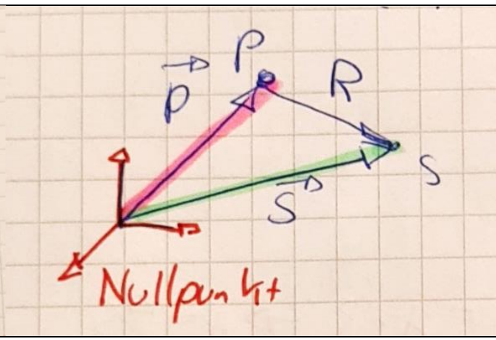


Vektorgeometrie

Vektor hat Betrag, Länge und Richtung

Einheitsvektor & Nullpunkt





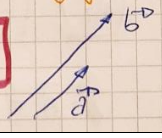
Betrag

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Kolinearität

= linear Abhängig. (Liegen Parallel zueinander)

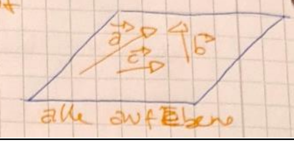
$$\boxed{\lambda\cdot\vec{a}=\vec{b}}$$



Komplanar

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ → Spannen Ebene auf

$$\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}=\vec{c}$$



Linearkombination

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\quad \vec{c}=\underbrace{\alpha}\cdot\vec{a}+\underbrace{\beta}\cdot\vec{b}$ — Skalare

...nation: $x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}=\vec{d}$

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\0\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1\\ x + 0 + z &= 2\\ 0 + y + z &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b}\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \cdot(-1) \oplus \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \cdot(-1) \quad \begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$x+y+z=1 \qquad x = 1-y-z$

$1\cdot y=-1$

$1\cdot z = 4$

$x = 1+1-4=-2$

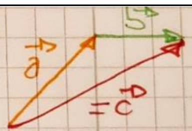
$x=-2$, $y=-1$, $z=4$

Kontrolle = Lösung

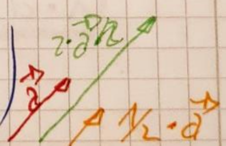
$$-2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$ = Linearkombinati...

Rechenregeln

- Addition: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{pmatrix}$

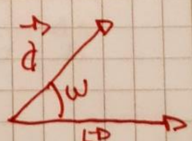


- Skalar Multiplikation: $\lambda\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_x\\\lambda\cdot a_y\\\lambda\cdot a_z\end{pmatrix}$



- Skalarprodukt:

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\omega)$$

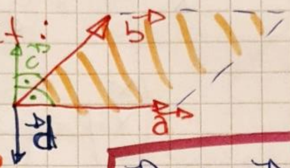


$$\vec{a}\circ\vec{b}=0 \rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

Berechnung:

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

• Vektorprodukt:



$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{d}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{matrix}}$$

Rechtehandregel!

- Daumen $= \vec{a}$
- Zeigefin $= \vec{b}$
- Mittelfin $= \vec{c}$

Länge von $\vec{c}$ = Fläche des Aufgespannten Parallelogramms $= |\vec{c}|$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}$

• $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Rechnen Vektorprodukt

• Spatprodukt

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \det |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|$

↳ Volumen des Körpers der 3-Vektoren

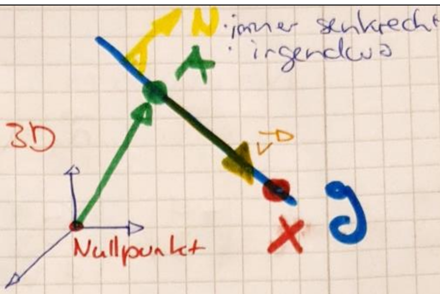
Geraden

Parameterdarstellung 2D und 3D

- Geraden
- Parameterdarstellung 2D 3D

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

λ → Skalierung von $\vec{v}$ (grösse/länge) kann jeder einzelne Punkt auf Gerade darstellen



$$\underline{\vec{OX}} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{v}$$

irgend ein Punkt auf Geraden

Normalenform 2D

$$g: \underbrace{\begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix}-v_y\\v_x\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-v_y\\v_x\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow = v_x(-v_y) + v_y \cdot v_x = 0$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}v_y\\-v_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}v_y\\-v_x\end{pmatrix}$$

Koordinatenform 2D

$$ax + by + c = 0$$

$$= n_x \cdot x + n_y \cdot y + c = 0$$

c: Punkt einsetzen von Gerade

$$c = -\vec{n} \cdot \vec{OA}$$

Bsp. Parameterdarstellung $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{A} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ → Normalform? → Koordinatenf

Normalform → Koordinatenform → Parameterform

Normalform

$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x - \underbrace{1}_{}\\ y - \underbrace{2}_{A}\end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$n_x \cdot x + n_y \cdot y + c = 0$

$-4 \cdot x + 3 \cdot y + c = 0$

$-4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -2$

$\Rightarrow -4x + 3y + c = 0$

Koord: $1x + 2y - 3 = 0 \quad \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

N? $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x - a_x\\ y - a_y\end{pmatrix} = 0 \qquad 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x - 1\\ y - 1\end{pmatrix} = 0$

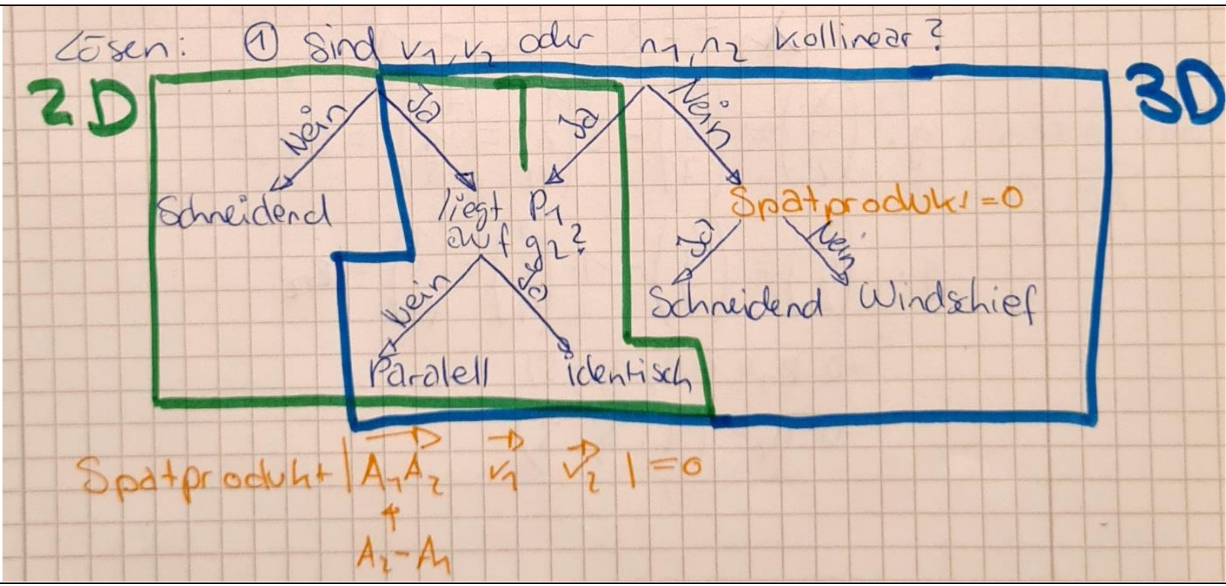
Param. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} \circ \vec{n} = 0$ weil $\perp$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-n_y\\n_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}n_y\\-n_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Lage von Geraden

- Identisch: $\vec{n}$ oder $\vec{v}$ kollinear, A_1 liegt auch auf g_2
- Parallel: $\vec{n}$ oder $\vec{v}$ kollinear, aber keinen gemeinsamen Punkt
- Schneidend: → Schnittpunkt (Gleichsetzen) → Schnittwinkel
- nur 3D: Windschief



Ebene

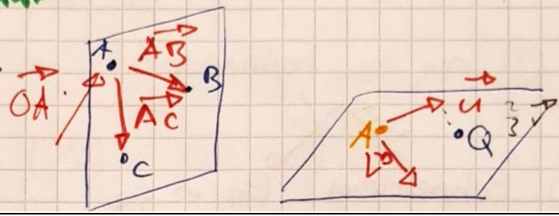
Parameterdarstellung

$$E:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + s \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

→ 2. Richtungsvektor

↳ 1. Richtungsvektor

$$\vec{OX} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$$



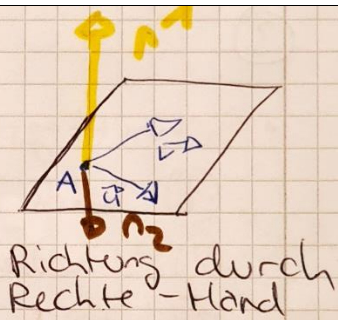
Normalform

Normalenform

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = n_1$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = n_2$$



Koordinatenform

$$E:\ a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$$

d: Punkt auf Ebene einsetzen

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{OA}$$

Lage der Ebene

- Lage
  - identisch: $\vec{n}$ sind kollinear, P_1 liegt auf E_2
  - parallel: $\vec{n}$ sind kollinear, P_1 liegt nicht auf E_2
  - schneidend: $\vec{n}$ sind nicht kollinear → Schnittgerade

① n_1, n_2 kollinear?

Nein → ② Schneidend

Ja → ② P_1 in E_2?

Nein → ③ Parallel

Ja → ③ identisch

Schnittgerade

- Schnittgerade Bsp. Lösen

① Beide Ebenen in Koordinatenform

② Lineares Gleichungssystem aufstellen

③ ZSF

④ Freie Variable λ nennen

⑤ Lösungsmenge aufschreiben

Beispiel:

$$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: 2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

①

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$E_1 = 1 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z + d = 0$$

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + d = 0 \qquad d = 0$$

$$E_1: x - y + z = 0$$

② $x - y + z = 0$

$2x + 3y + 4z - 1 = 0 \rightarrow 2x + 3y + 4z = 1$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} (-2) \\ \hookleftarrow + \end{array}$$

③
$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ (:5) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{array}$$

④ z freie Variable $= \lambda$

⑤ $y = 1/5 - 2/3\,\lambda$

$x = 0 + y - z = 1/5 - 2/5\,\lambda - \lambda = 1/5 - 7/5\,\lambda$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Gerader-Ebenen

• Schnittpunkt gerade-Ebenen

→ Parameterdarstellung → gleichsetzen → LGS

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} s & t & \lambda & \vec{5} \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} s = \ldots \\ t = \ldots \\ \boxed{\lambda = \ldots} \end{array}\right\} \text{Übung!}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{Schnittpunkt}$$