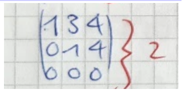
Lineare Algebra 2 — Ursula Mayer

Repetition

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix = Zeilen ohne Nullen in ZSF



Determinanten

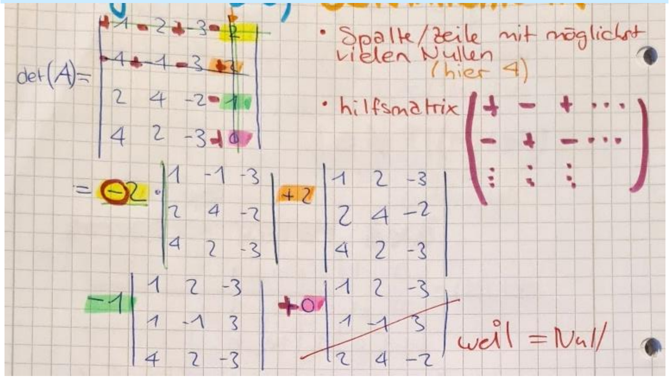
Determinante = Null

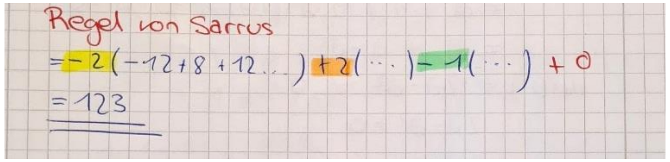
det = 0: → *0-Zeile oder 0-Spalte existiert*
→ *2 Zeilen oder 2 Spalten gleich sind*
→ *2 Zeilen oder 2 Spalten zueinander proportional sind*

Determinanten Regeln

- **Vertauschen** von Zeilen oder Spalten ändert Vorzeichen
- Determinante ändert sich nicht beim **Addieren** einer Zeile oder Spalte zu einer anderen (auch addieren Vielfacher)
- Zeilen oder Spalten mit **Skalar multipliziert** werden wird auch die Determinante mit dem Skalar multipliziert
- Determinanten von **Dreiecksmatrizen oder Diagonalmatrizen** = Produkt der Hauptdiagonalelemente

Determinante n-Matrizen



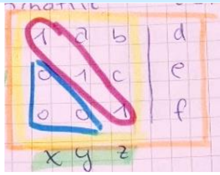


Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit eines Linearen Gleichungssystems

Genau eine Lösung (linear abhängig):

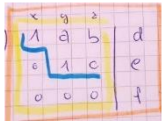
$Rang\ (A) = Rang\ (A|\vec{b}) = n$



Unendlich viele Lösungen:

$Rang\ (A) = Rang\ (A|\vec{b}) < n$

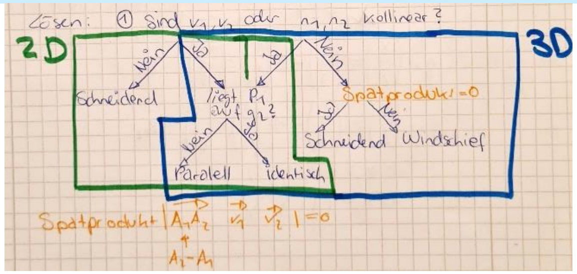
Freie Variable (c)



Keine Lösung: $Rang(A) \neq Rang(A|\vec{b})$

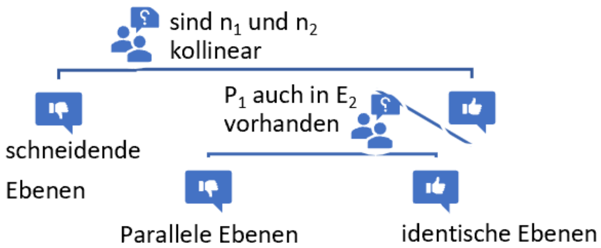
Geraden

Lage zweier Geraden



Ebene

Lage zweier Ebenen E_1 mit P_1, n_1 und E_2 mit P_2, n_2



Schnittgerade Berechnen

[1] Beide Ebenen in Koordinatenform
[2] Lineares Gleichungssystem aufstellen
[3] Zeilenstufenform
[4] Freie Variable benennen
[5] Lösungsmenge aufschreiben

Schnittpunkt Berechnen

[1] Parameterdarstellung
[2] Gleichsetzen
[3] Lineares Gleichungssystem

Vektorräume

Definition

besteht aus einer nichtleeren Menge V von Elementen

Bedingungen

- Addition:

$$\textbf{Für alle Vektoren } \vec{a} \textbf{ und } \vec{b} \textbf{ in } V \textbf{ ist } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \textbf{ in } V.$$

- Skalare Multiplikation:

$$\textbf{Für beliebige Vektoren } \vec{a} \in V \textbf{ und } \lambda \in \mathbb{R} \textbf{ ist } \lambda\vec{a} = \vec{c} \textbf{ in } V.$$

Rechengesetze

1. Kommutativität für Addition:
   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *für alle* $\vec{a}, \vec{b} \in V$
2. Assoziativität für Addition:
   $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ *für alle* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$
3. Existent Neutralelement der $\vec{0}$ Addition:
   $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ *für alle* $\vec{a} \in V$
4. Existenz entgegengesetztes Element:
   $\vec{a} \in V$ *gibt genau ein* $-\vec{a} \in V$
5. Distributivität:
   $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$
6. Distributivität:
   $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{a} \in V$
7. Assoziativität:
   $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und* $a \in V$

8. Die reelle Zahl 1 (Neutralelement skalare Multiplikation):
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}\ für\ alle\ \vec{a} \in V$

Beispiele für reelle Vektorräume

Spaltenvektor

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^n$$

→ Mit der Addition und skalaren Multiplikation V = reeller Vektorraum.

Matrizen

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n \right\}$$

→ Menge der mxn Matrizen mit Matrixaddition und skalare Multiplikation = reeller Vektorraum

Polynome

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Wobei x = Variable und $a_i, i = 0{,}1{,}2 = reelle\ Zahlen$

Hier Max. 2. Grades

Addition:

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$

Skalare Multiplikation:

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2$$

→ Die Menge $\mathbb{P}^2$ ist mit dieser Addition und skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum.

Nullpolynom = Nullvektor (Neutralelement):

$$o(x) = 0 + 0x + 0x^2$$

Gilt für jedes Polynom! Da: $p(x) + o(x) = p(x)$

Gegenvektor:

$$-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2$$

Distributivität:

$$\lambda\big(p(x) + q(x)\big) = \lambda p(x) + \lambda q(x)$$
$$(\lambda + \mu)p(x) = \lambda p(x) + \mu p(x)$$

Die Menge aller reellen Polynome

$$\mathbb{R}[x] = p(x) | p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$mit\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0{,}1{,}2{,}3, \dots$$

Stetige Funktionen

→ Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen mit Definitionsbereich [a, b]:

$$V = C[a,b] = \{f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Addition:

$f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Skalare Mulitplikation:

$\lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

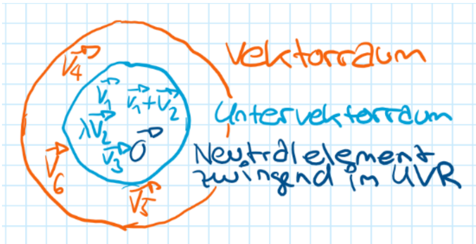
Neutralelement:

$o : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto o(x) = 0$

Unterräume

Definition

Es sei V ein *Vektorraum* und U eine *nichtleere Teilmenge* von V. Ist U ein *Vektorraum* bezüglich der *Addition* und der *skalaren Multiplikation* in V, so ist U *ein Unterraum (oder Untervektorraum)* von V.



Durchschnitt zweier Unterräume ergibt Unterraum!

Bedingungen

- Nicht leere Menge
- $\vec{a}\ und\ \vec{b}\ in\ U \to \vec{a} + \vec{b}\ in\ U$
- $\lambda \in \mathbb{R}\ und\ \vec{a} \in U \to \lambda\vec{a}\ in\ U$
- $\vec{0} \in U\ (zwingend!)$

Beispiel für Unterraum

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

Addition:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$ somit:

$$2a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \text{ und } 2b_1 + 3b_2 + b_3 = 0.$$
$$2(a_1 + b_1) + 3(a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = 2a_1 + 3a_2 + a_3 + 2b_1 + 3b_2 + b_3$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Skalare Multiplikation:

$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

$$2(\lambda a_1) + 3(\lambda a_2) + \lambda a_3 = \lambda(2a_1 + 3a_2 + a_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Mit der Gleichung $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ wird eine Ebene im Raum R^3 beschrieben, welche den Ursprung enthält.

Diese Ebene ist dann ein Unterraum des R^3

Nullvektorraum

Definition

Teilmenge $\{\vec{0}\}$: Nullvektorraum ist ein Untervektorraum von V.

Unterräume von Nullvektorraum verschiedene Vektorräume (triviale Lösungen):

- Ganzer Raum V
- Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$

Zusammenfassung Unterräume

- Eine Ebene ist genau dann ein Unterraum von R^3, wenn sie den Ursprung enthält.
- Eine durch Ursprung verlaufende Gerade im Vektorraum R^2 (bzw. R^3) ein Unterraum des R^2 (bzw. R^3). Verläuft Gerade nicht durch Ursprung → kein Unterraum von R^2 (bzw. R^3).
- Der Nullvektor muss zu jedem Unterraum gehören.

Lösungsraum

Homogenes LGS:

$$A\vec{x} = \vec{0}$$
$$mit\ A \in \mathbb{R}^{mxn}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

- Nie leer da Nullvektor immer dazu gehört!
- Lösungsraum U/ Nullraum A → Unterraum $\mathbb{R}^n$

Nullraum der Matrix A:

$$N(A) = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Beispiel das Lösungsraum ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$

Addition:

$\vec{x}_1$ *und* $\vec{x}_2$ → zwei beliebige Lösungen des Gleichungssystems $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ *und* $A\vec{x}_2 = \vec{0}$

Distributivgesetz:

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

→ somit $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U$ für alle $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$

Skalare Multiplikation:

$\vec{x}$ eine Lösung des Gleichungssystems und λ ein beliebiger reeller Skalar.

Assoziativität:

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

→ somit $\lambda\vec{x} \in U$ für alle $\vec{x} \in U$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel homogenes LGS:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_2 Freie Variable → $x_2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, somit $x_1 = -2\lambda$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{U = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Inhomogenes LGS:

$$W = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{c}\ mit\ \vec{c} \neq \vec{0}\}$$

KEIN Unterraum von $\mathbb{R}^n$, den Nullvektor kein Element von W, $A\vec{0} = \vec{0} \neq \vec{c}$

Durchschnitt von Unterräumen

Definition

$U_1, \ldots, U_n = UVR$ *eines Vektorraums* V, *dann*:

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \ wieder\ ein\ UVR.$$

Beispiel Durchschnitt von Unterräumen

$$U_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y + z = 0 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 0 \right\}$$

Ebene im R^3

Durchschnitt 2 schneidender Ebenen = Schnittgerade.

Vorgehen:

[1] Koeffizientenmatrix der beiden Gleichungen bilden

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

[2] Nach Gauss Verfahren auflösen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

[3] Falls freie Variable = λ setzen, $z = \lambda$

[4] Lösungsmenge nach λ auflösen und Lösungsvektor erstellen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lösungsmenge:

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lineare Hülle / Erzeugendensystem

V = Vektorraum, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$

Menge aller Linearkombinationen von $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$:

$$Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}) = \{\vec{x} \in V | \vec{x} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}\ mit\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{R}\}$$

Menge $\boldsymbol{Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})}$ ist ein Unterraum von V.

- Für Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^3$ min. 3 Vektoren
- Da Lineare Hülle = UVR, muss durch Ursprung verlaufen!!

Beispiel Lineare Hülle

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ erzeugen:

$$\mathrm{Lin}(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorielle Parameterdarstellung einer Ebene, die durch den Ursprung und parallel zu den Richtungsvektoren a und b verläuft.

Lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit

Linear abhängig:

wenn nicht alle $\lambda = 0$, so dass

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

Linear unabhängig:

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \iff \boldsymbol{\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0}$$

Die Vektoren v linear abhängig, wenn sich einer als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Beispiele Lineare Abhängigkeit:

Vorgehen:

Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1] Koeffizientenmatrix aufstellen

[2] Gauss-Verfahren auflösen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[3] Falls x,y,z = 0 dann linear unabhängig

Vorgehen bei Polynomen:

$p_1(x) = 5 + x^2$, $p_2(x) = 1 - 4x$ und $p_3(x) = 3 + 8x$

[1] Linearkombinationsgleichung aufstellen

[2] Polynome einfügen, lambda ausmultiplizieren

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0$$

$$5\lambda_1 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 - 4\lambda_2 x + 3\lambda_3 + 8\lambda_3 x = 0$$

$$5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + (-4\lambda_2 + 8\lambda_3)x + \lambda_1 x^2 = 0.$$

[3] LGS aufstellen & auflösen (Gauss-Verfahren)

$$\begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

[4] Falls $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ dann linear unabhängig

Vorgehen bei Matrizen:

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 & -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & -5\lambda_3 \\ -4\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zwei Matrizen sind genau dann gleich, wenn ihre Elemente gleich sind. Daraus folgt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Somit sind die Matrizen A, B und C linear abhängig.

Basis

Bedingungen

Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$ bilden eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ (Runde Klammern, Reihenfolge festlegen), wenn:

- Vektoren sind linear unabhängig $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$
- $Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) = V\ (Vektorraum)$ d.h. jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ darstellen.

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{v}$$

Basisvektoren: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$

Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Es gibt verschiedene Basen in einem Vektorraum!

Kartesische Basis

Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y\ und\ \vec{e}_z$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis im Raum $\mathbb{R}^3$.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ dann gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z.$$

$\rightarrow \vec{v}$ Linearkombination von $\vec{e}_x, \vec{e}_y\ und\ \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}$ die kartesische Basis

Beispiele, um Basis zu finden:

Kapitel1_teil2

Vektor:	Matrix:	Polynome:
Folie 6	Folie 8	Folie 12

E eine Ebene, die durch den Ursprung verläuft:

$E: \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Richtungsvektoren v und w bilden Basis der Ebene.

g eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft:

Der Richtungsvektor v ist eine Basis der Geraden

Merke: Basis im $\mathbb{R}^3$: $genau\ 3\ Vektoren$

Beispiele, Vektor zu mehreren Basen:

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y), \mathcal{B}_a = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)\ und\ \mathcal{B}_b = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ausgedrückt in den Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}_a\ und\ \mathcal{B}_b$:

$$\mathcal{B}: \vec{x} = -1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y$$

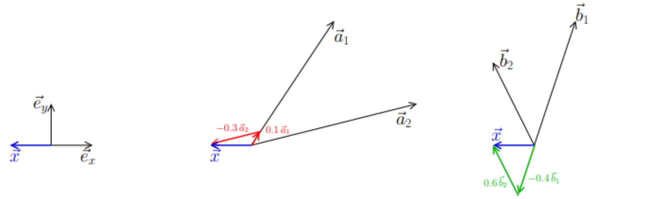
$$\mathcal{B}_a: \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\mathcal{B}_b: \vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$$

Gaus-Jordan-Verfahren für λ_1 und λ_2.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y = 0,1\,\vec{a}_1 - 0,3\,\vec{a}_2 = -0,4\,\vec{b}_1 + 0,6\,\vec{b}_2.$$

Basis $\mathcal{B}$ | Basis $\mathcal{B}_a$ | Basis $\mathcal{B}_b$



Definition

Jedes Erzeugendensystem (Lineare Hülle) $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ von U enthält eine Basis von U.

Dimension

Bedingungen

- Sei $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ eine Basis von U. Dann sind jeweils r + 1 Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{r+1}$ von U **linear abhängig**.
- Je zwei Basen von einem Vektorraum V haben gleich viele Elemente.

Koordinatenvekrot

[1] Linearkombinationsgleichung aufstellen

$$p(x) = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

[2] Ausmuliplizieren

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) \\ &= \lambda_0 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x)^2 + \lambda_3(1+x)^3 \\ &= \lambda_0 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+2x+x^2) + \lambda_3(1+3x+3x^2+x^3) \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3. \end{aligned}$$

[3] Gleichsetzen und sotieren

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} 2 - x + 2x^2 + x^3 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)x \\ + (\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = & 2 & & & \Rightarrow \lambda_0 = 2+2+1-1 = 4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = & -1 & & \Rightarrow \lambda_1 & = -1+2-3 = -2 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = & 2 & \Rightarrow \lambda_2 = & 2 - 3\lambda_1 & = 2-3 = -1 \\ \lambda_3 = & 1 & & & \end{cases}$$

Somit lautet der Koordinatenvektor von $p(x)$:

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lineare Abbildung

Bijektivität

Satz

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der $n \times n$ Darstellungsmatrix A.

- *Die folgenden Äquivalenzen gelten:*

$$\begin{aligned} f \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \quad Ker(f) = \{\vec{0}_V\} \text{ und } Im(f) = W \\ &\Leftrightarrow \quad rang(A) = n \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

- *Ist die lineare Abbildung f bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear und bijektiv. Die Darstellungsmatrix von f^{-1} ist A^{-1}, die Inverse zu A.*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix von A: $A = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig. Der Rang der Matrix ist also 2.

Ferner ist die Dimension des Definitionsbereichs und des Wertebereichs jeweils gleich 2. Aus dem Satz folgt, dass f bijektiv ist und die Matrix A invertierbar ist.

Komplexe Zahlen

Darstellung

Umrechnungstabelle

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + b\,i$	$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i)$	$z = r\,e^{i\,\varphi}$
$a = r\,\cos(\varphi)$ $b = r\,\sin(\varphi)$	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$ $\text{mit } \Delta = \begin{cases} 0°, & z \text{ in 1. Quadrant} \\ 180°, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \\ 360°, & z \text{ in 4. Quadrant} \end{cases}$ π 2π	

Rechenoperatoren

Wurzeln

Kapitel 3.7

Bei ausschliesslich reellen Koeffizienten a_i, $i = 0, \ldots, n$, treten komplexe Wurzeln immer paarweise auf, als Paare zueinander konjugiert komplexer Zahlen. Mit z_1 ist daher $\overline{z}_1$ auch eine Wurzel der Gleichung.

Beispielsweise: $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die Art der Wurzeln hängt dabei vom Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Wurzeln: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D = 0$: eine doppelte reelle Wurzel: $z_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- $D < 0$: zwei konjugiert komplexe Wurzeln:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\lvert D\rvert}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\lvert D\rvert}\,i}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{\lvert D\rvert}\,i$$

Somit: $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{\lvert D\rvert}\,i$ und $z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{\lvert D\rvert}\,i = \overline{z}_1$

Eigenwert und -vektoren

Berechnen

Wir berechnen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Die Eigenwerte sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Die Lösungen von $p(\lambda) = 0$ sind: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$. Die Eigenwerte lauten demnach: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$.

Die Berechnung der Eigenvektoren geschieht mit der Gleichung:

$$(A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 2 \\ 3 & 1-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2.$$

- Setzen wir $\lambda_1 = 4$ ein, dann erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

  $$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Das Gauss-Verfahren liefert:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Die Variable y ist frei, d.h.: $y=\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Es folgt: $x=y=\alpha$. Somit hat das System unendlich viele Lösungen.

Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ lautet:

$$V_{\lambda_1}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{x}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Dieser Unterraum beschreibt eine Gerade, deren Richtungsvektor $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Dieser Richtungsvektor $\vec{v}_1$ bildet eine Basis von V_{λ_1}, d.h.: $V_{\lambda_1}=\mathrm{Lin}(\vec{v}_1)$ und $\dim(V_{\lambda_1})=1$.

Der Richtungsvektor $\vec{v}_1$ und alle von Null verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_1$, d.h. $\alpha\vec{v}_1$ sind Eigenvektoren zum λ_1.

Beispiel 4.3.1 (Eigenraum einsetzen von Eigenwerten)