Numerik – 4. Semester Rebecca Nauli

MATLAB EINFÜHRUNG

**lookfor** prime sucht nach Matlab Funktionen mit Primzahlen

**help** prime kurze Beschreibung zur Funktion ‘prime’

**doc** prime Dokumentation von ‘prime’ Funktion

Beispiel:

Graphical user interface, text, application

Description automatically generated

**+** Addition

**-** Subtraktion

**\*** Multiplikation

**/** Division

Darstellungsformat

**format short** Ausgabeformat kurz

**format long** Ausgabeformat lang

**format short e** Gleitkommazahl (Exponentialform)

**format long e** mehr Dezimalstellen (Exponentialform)

format rat Resultat als Bruch

help elfun Liste von elementaren mathematischen Funktionen

Exponential & Logarithmusfunktionen

**exp()** Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl

Inverse der Exponential Funktion 🡪 natürliche Log

**log(10)** natürliche Logarithmus

log10(10) dekadische Logarithmus

Potenzen & Wurzeln

**^** / **power** Potenzen

**nthroot()** Wurzel ziehen

**sqrt()** Quadratwurzel

Trigonometrische & Weitere Funktionen

**sin()** / **asin()** Sinusfunktion

**cos()** / **acos()** Kosinusfunktion

**tan()** / **atan()** Tangensfunktion

**abs()** Betrag (absolute value)

sign() Vorzeichen

ceil, fix, floor, round Rundungsfunktionen

Konstanten

pi Kreiszahl π

eps Fliesskomma-Genauigkeit

inf unendlich ∞

NaN Not-a-Number

ans Standard-Ausgabevariabel

i, j Imaginäre Einheit

realmin kleinste Gleitkommazahl

realmax grösste Gleitkommazahl

Logische Verknüpfungen

A&B und

A|B oder

\A nicht

xor(A,B) exklusiv oder

logical Datentyp vom Resultat bei VO, logisch, class

double “normal”, class

Vergleichsoperatoren (elementweise)

A **<** B kleiner

A>B grosser

A **<=** B kleiner gleich

A **>=** B grösser gleich

A **==** B gleich

A ~= B ungleich

1. wahr
2. falsch

Grafische Funktionen

help graph2d Liste aller 2-D Grafikfunktionen

help graph3d Liste aller 3-D Grafikfunktionen

figure(nummer) Erzeugt Fenster oder existierendes Fenster an

figure(1)

close nummer schliesst jeweilige Figur

close all schliesst alle Figures

set(gcf,’Color’,[1 1 1]); setzt Hintergrundfarbe der aktiven Figur auf Weiss

hold on behält Funktion im gleichen Fenster

plot(x,y,s) plottiert eine Funktion, Kurzbefehl

plot(t, v) x-Achse: t, y-Achse: v

help plot Beschreibung der Funktion plot

‘LineWidth’ 0.5 (Default), 1, 1.5

‘Color’ [0, 0.5, 0.5] (RGB Triplet)

‘LineStyle’ ‘-‘, ‘-.’, ‘:’, ‘-.o’

plot(t3,y3,'-.o','Color', [0, 0.39, 0.65],'LineWidth', 1.5);

**Beispiel**

Graphical user interface, text

Description automatically generated

Beschriften von Plots

title(‘…’) Titel

title(‘Diagramm 1’, ‘FontSize’, 14);

axis(x-Limite y-Limite) Achsenbeschriftung

axis([0 15 13 25]); Achsenbeschriftung Limits

xlabel(‘…’)

xlabel(‘Zeit’, ‘FontSize’, 12);

ylabel(‘…’)

legend(‘..’)

legend('y3 Signal','Location','SouthWest');

grid on/off

Subplots

hold

hold on behält Funktion im gleichen Fenster

hold off

subplot() (Zeilen, Spalten, Nummer subplot)

subplot(2, 1, 1) 2 Zeilen/Graphen, 1 Spalte, (Graph)Nummer 1

**Beispiel**

**Text, letter

Description automatically generated Text

Description automatically generated**

Vektoren & Matrizen

v =[2 3 5 8]; Zeilenvektor

v = [2;3;5;8]; Spaltenvektor

**length(v)** Anzahl Komponente eines Vektors

**transpose()** / **.’** transponieren von Vektoren

A = [2 3 4;5 6 7;0 1 9;2 4 7] Matrix

Table

Description automatically generated

**size(A)** Dimension Matrix

**A(i,j)** ij-ten Eintrag in einer Matrix

**A.’** transponierte Matrix A

**eye()** Einheitsmatrix

**zeros()** Matrize mit nur Nullen

**zeros(1,4)** 1 Zeile, 4 Kolumnen

[A B] [A, B] [A B; B A]

Chart

Description automatically generatedChart, scatter chart

Description automatically generatedChart, scatter chart, box and whisker chart

Description automatically generated

**rand()** random Matrix

**inv()** inverse Matrix

**diag()** diagonale Matrix

Beispiel

A picture containing chart

Description automatically generatedA picture containing graphical user interface

Description automatically generated

fliplr flips Matrix left - right

flipud flips Matrix upside-down

spy(A)

**Addition**

**Skalar Multiplikation**



**.\*** komponentenweise Multiplikation

**Matrizenmultiplikation**

Text

Description automatically generated with medium confidence



**A = C/B** Rechtsdivision

**A = C\B** Linksdivision

**length(vec)** Länge eines Vektors/Matrix

**:** Kolon-Operator

Vektorfunktionen

Text

Description automatically generated Diagram, schematic

Description automatically generated

Matrixfunktionen

Graphical user interface, text, application

Description automatically generated

Text

Description automatically generated

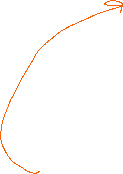
**sparse()** streicht alle möglichen Null-Elemente einer Matrix von full

**full()** konvertiert sparse Matrix 🡪 vollen Matrix

Lineare Gleichungssysteme

Graphical user interface, text

Description automatically generated with medium confidence



A picture containing text

Description automatically generated

Bedingte Anweisungen

**if** bis **end** bedingte Anweisung

**else** Anweisung ausgeführt wenn die vorangehende if-Bedingung nicht erfüllt

**elseif** für mehrere Verzweigungen

A picture containing table

Description automatically generated Text

Description automatically generated

For-Schleife

**for** eine Gruppe von Anweisungen mit einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen

Fakultät berechnen

Text

Description automatically generated with medium confidence

**break** unterbricht die Ausführung von for-Schleifen

Chart

Description automatically generated

While-Schleife

**while** eine Gruppe von Anweisungen wird wiederholt Solange sie wahr ist

A picture containing text

Description automatically generated

**Ctrl+C** bricht while Schleife ab

Matlab Funktionen

Rückgabe eines Wertes (Standardfunktion)

Text

Description automatically generated

Rückgabe mehrerer Werte

Text

Description automatically generated

**type** \*functionname\* Quellecode der Funktion herausgeben

Unterfunktionen

Mehrere Funktionen können in einem Funktionsfile definiert werden. Allerdings sind alle Definitionen nach der ersten nur lokal sichtbar.

Text

Description automatically generated

🡪Die Unterfunktion “meinMittelwert” wird nicht ausgegeben und kann nicht im Commandfenster aufgerufen werden

**mean()** Mittelwert

**std()** Standardabweichung

Anonyme Funktion

Falls keine neue Files erstellt werden wollen (siehe Problem Unterfunktionen) können anonyme Funktionen verwendet werden.

**f =@(arglist)expression** anonyme Funktion Syntax

Quadrat einer Zahl berechnen:

A picture containing text

Description automatically generated

Endliche Arithmetik

Gleitkommazahl

Diagram, letter

Description automatically generated with medium confidence

m Mantisse

e Exponent (ganze Zahl)

B Biaswert

s Vorzeichen

Table

Description automatically generated with low confidence

A picture containing text, music

Description automatically generated

Maschinengenauigkeit, relativer Abstand zwischen normalisierter Gleitkommazahl x und der nächstgrösseren Gleitkommazahl y



eps Abstand einer Gleitkommzahl x zur benachbarten

Fehlerquellen

* Rundungsfehler
* Auslöschung (cancellation)
* Absorption
* Überlauf/Unterlauf (overflow/underflow)

Approximation von Funktionen

Grundidee: zu komplizierte Funktion 🡪 Lös.: Funktion approximieren an Taylorpolynom

****

Taylorpolynom:

* entsteht jedoch Fehler

Konstante

Linearisierung

Bedingung:

Exponentialfunktion

Bedingung:

**Definition Taylorpolynom**

n-mal differenzierbare Funktion:

**Definition Taylorreihe**

undendlich mal differenzierbare Funktion:

**Rezept Taylorpolynom**

1. n-te Ableitung der Funktion
2. Entwicklungspunkt einsetzen und berechnen
3. Werte der Ableitung einsetzen
4. vereinfachen/zusammenfassen

**taylortool Matlab Taylor Tool**

**Definition Konvergenzradius**

konvergent:

divergent:

Konvergenzintervall (-bereich):

**Definition Restfunktion (Fehler)**

Nichtlineare Gleichungssysteme (NLGS)

Chart, line chart

Description automatically generatedBisektion

Verfahren um nichtlineares Gleichungssystem zu lösen

Idee: Intervallhalbierungsverfahren um die Nullstelle : fortschreitende Halbierung des ursprünglichen Intervalls (a,b) 🡪 immer enger eingrenzen

* aus und folgt, dass das Intervalleine Nullstelle von enthalten muss.
* muss stetig sein 🡪 sonst keine Nullstellen

Vorteil: immer eine Lösung

Nachteil: geht eine gewisse Zeit

Konvergenzordnung

Text

Description automatically generated

Text

Description automatically generated

Newton-Verfahren

iteratives Verfahren

**Rezept Newton-Verfahren**

1. linearisieren: gleich = 0 setzen
2. 🡪 ist die Tangente
3. : einzige NS
4. oder

Bedingungen:

* erste Ableitung bekannt
* falls NaN dann Division durch 0

Pittfalls:

* Divergenz (nach )
* Oszillation (immer zwischen 1 & 0 z.B.)
* andere NS
* Ableitung = 0
* ungünstiger Startwert

**Residuum**

**Fehlerschranke/ Abbruchkriterium**

max. Anzahl von Iterationen

Newton-Verfahren (mehrere Dimsensionen

1D (n=1)

lokales Minima oder Maxima 🡪

Unterschiedliche Startpunkte

Chart, line chart

Description automatically generated

Mehre-Dimensionen (n>1)



Text, letter

Description automatically generated

Jacobi Matrix ( aka J)

Text

Description automatically generated with medium confidence



Beispiel:

Text

Description automatically generated

Daraus folgt Jacobi-Matrix:

A picture containing text, watch, clock, gauge

Description automatically generated

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Numerische Methoden

* gegeben

**Drei Fälle von Lösbarkeit eines LGS**

Text, letter

Description automatically generatedChart, line chart

Description automatically generated

Gauss Algorithmus

* A picture containing text, clock, watch, gauge

  Description automatically generatedlineares Gleichungssystem
* Die Spalten von A sind linear unabhängig.
* Die Matrix A ist invertierbar.
* Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.
* **\** in Matlab,

Gaussische Eliminationsverfahren

1. **Vorwärtselimination**: Verwendung von elementaren Zeilenumformungen, um das lineare Gleichungssystem auf Zeilenstufenform zu bringen
2. **Rückwärtseinsetzen**: Ausrechnen der Variablen, beginnend bei der letzten Zeile, und Einsetzen in die darüberliegenden Zeilen.

R: rechte obere Dreiecksmatrix

I: Einheitsmatrix

Beispiel

Text

Description automatically generated Diagram

Description automatically generated



**!!Wichtig: Bei der Vorwärtseliminition werden Reihen stehen gelassen!!**

LR-Zerlegung

Diagram, schematic

Description automatically generated

L: linken (unteren) Dreiecksmatrix

R: rechte (oberen) Dreiecksmatrix

**Rezept** LR-Zerlegung

Text

Description automatically generated

Diagram

Description automatically generated

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Falls zu vermeiden (Nulldivision) 🡪Zeilenvertauschung

: Pivotelement

!!jeweils das betragsgrösste Element wählen!! 🡪 führt zur Permutationsmatrix

A picture containing text, clock

Description automatically generated

* Matlab: [L,R,P]=lu(A) 🡪 für Permutationsmatrix

LGS mit LR-Zerlegung & Spaltenpivotsuche

Text, letter

Description automatically generatedGraphical user interface, text, application

Description automatically generated

Beurteilung einer Näherungslösung

Fehler 🡪unbekannt

Residuum: 🡪 Residuenvektor misst die Norm (Matlab: norm())

**Allgemeine Schreibweise** (Vektoren & Matrizen)

A picture containing text, watch, gauge

Description automatically generatedA picture containing diagram

Description automatically generated

**Indirekte Fehlerabschätzung aus dem** **Residuum** (unter Schranke)

A picture containing text, antenna, gauge

Description automatically generated

(Für eine obere Schranke benötigt man die weitergehende Information zur Inversen.)

**Relativer Fehler einer Näherungslösung**

mit

A picture containing text, object, clock, antenna

Description automatically generated

**Konditionszahl:** 🡪 schlecht konditioniert

Chart, scatter chart

Description automatically generatedRegression

A: Designmatrix A

m: Steigung

b: Achsenabschnitt

Lineare Ausgleichsrechnung

Grundidee: überbestimmtes Gleichungssystem 🡪 Annäherung

m: Anzahl Gleichungen

n: Anzahl Unbekannte

Funktionsgleichung:

Gesucht:

Beispiel

Methode der kleinsten Quadrate (QR-Zerlegung)

A picture containing text, meter, device

Description automatically generated

Minimierungsproblem:

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

**Normalengleichung**:

🡪

🡪**polyfit** für Matlab aber NUR POLYNOME!!

🡪 einmal ableiten & = 0 setzen

Verbesserte Berechnung von p

Chart

Description automatically generated

Interpolation

Polynominterpolation





Lagrange Basis

A picture containing clock

Description automatically generated

A close-up of a clock

Description automatically generated with low confidence

A picture containing chart

Description automatically generated

Beispiel:

Table

Description automatically generated

Spline Interpolation

Text, letter

Description automatically generated

Graphical user interface, text, application

Description automatically generated

Kubischer Spline

Word

Description automatically generated with medium confidence



Randbedingungen

Text

Description automatically generated

**yy=spline(x,y,xx)** mit kubischen not-a-knot spline interpolieren

**pchip** kubischer hermitschen spline

Integration

Quadraturformel

: Stützstellen

: Gewichte

mit Integrationsknoten:

Newton-Cotes mit äquidistanter Knoten

Mittelpunktregel (n=0):

Trapezregeln (n=1):

Diagram

Description automatically generated

Simpsonregel (n=2):

Text, letter

Description automatically generated

Polynominterpolation nach Lagrange

Text, letter

Description automatically generated

Text, letter

Description automatically generated

Zusammengesetzte Newton-Cotes Formeln

Text, letter

Description automatically generated

DGL

A screenshot of a computer

Description automatically generated with medium confidence

Zerfallgesetz und (Explizites) Euler-Verfahren

A screenshot of a computer

Description automatically generated with medium confidence

Chart, line chart

Description automatically generated

DGL-Systeme

Text, letter

Description automatically generated

Text, letter

Description automatically generated

Sonstiges

Liste Stammfunktionen

|  |  |
| --- | --- |
| ***f(x)*** | ***F(x)*** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Umformungen

Integrationstabelle

