Vektorraum R^N

Bemerkung

Wir bezeichnen mit B die $n\times m$-Matrix, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ nebeneinander schreiben. Dann gilt für jede Linearkombination $\lambda_1\cdot\vec{b}_1+\lambda_2\cdot\vec{b}_2+\ldots+\lambda_m\cdot\vec{b}_m$:

$$\lambda_1\cdot\vec{b}_1+\lambda_2\cdot\vec{b}_2+\ldots+\lambda_m\cdot\vec{b}_m = B\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}$$

Satz

Wir betrachten die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ sowie die $n\times n$-Matrix B, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(2) $\operatorname{rg}(B)=n$

(3) $\det(B)\neq 0$

(4) B ist invertierbar.

(5) Das LGS $B\cdot\vec{x}=\vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Umrechnung zwischen Komponentendarstellungen bezüglich verschiedener Basen

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ in ihrer Komponentendarstellung bzgl. $\mathcal{S}$ einsetzen in $\vec{a}=\alpha_1\cdot\vec{b}_1+\alpha_2\cdot\vec{b}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\vec{b}_n$

Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{S}$	Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{B}$
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$	$\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

LGS $B\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$ nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auflösen.

Dabei ist B die Matrix, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.

Eine Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ und jeden Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:

Der Vektor $f(\vec{x})\in\mathbb{R}^m$, der herauskommt, wenn man f auf einen Vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ anwendet, heisst *Bild* von $\vec{x}$.

(1) $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

(2) $f(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot f(\vec{x})$

Bestimmung der Linearität (beide Bedingungen müssen erfüllt sein

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x_2\\ 2x_1\\ x_2-x_1\end{pmatrix}$$

Bsp. lineare Abbildung

5. (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}},\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie für $\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$ die Komponentendarstellung bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimmen Sie für $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ die Komponentendarstellung bezüglich $\mathcal{S}$.

(b) Für $\vec{a}$ müssen wir das LGS $\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}$ lösen:

(c) $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}+3\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$

Lineare Abbildung

Satz

Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, versehen mit den jeweiligen Standardbasen.
Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ durch eine $m\times n$-Matrix A darstellen:

$$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n)\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_2\end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ f(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

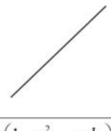
Satz

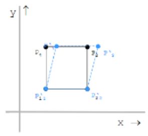
Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1;\vec{b}_2;\ldots;\vec{b}_n\}$ und $\mathbb{R}^m$ mit der Basis $\mathcal{C}=\{\vec{c}_1;\vec{c}_2;\ldots;\vec{c}_m\}$.
Dann gilt:
Jede lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lässt sich durch eine $m\times n$-Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ darstellen:

$$\left(f(\vec{x})\right)_{\mathcal{C}}={}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}\cdot\vec{x}_{\mathcal{B}}$$

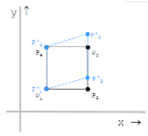
Die Spalten der Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sind die Bilder der Elemente von $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$:

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}={}_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix}| & | & & |\\ \left(f(\vec{b}_1)\right)_{\mathcal{C}} & \left(f(\vec{b}_2)\right)_{\mathcal{C}} & \cdots & \left(f(\vec{b}_n)\right)_{\mathcal{C}}\\ | & | & & |\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Streckung um λ_1 in x und λ_2 in y	**orthogonale Projektion** auf die Gerade $g: ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	**Spiegelung** an der Geraden $g: ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	**Rotation** um den Ursprung um Winkel φ	**Scherung** in x-Richtung mit Faktor m in Y Richtung mit k
				
$\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1-a^2&-ab\\-ab&1-b^2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1-2a^2&-2ab\\-2ab&1-2b^2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi)&\cos(\varphi)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&m\\ \cancel{0}&1\end{pmatrix}$ k



Scherung parallel zur x-Achse



Scherung parallel zur y-Achse

m = tan δ
k = tan δ

Zentrische Streckung mit dem Faktor λ

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

Streckfaktor: $\lambda=\dfrac{\text{neuer Betrag}}{\text{alter Betrag}}$

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	**Spiegelung** an der x/y-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die x-Achse	**Spiegelung** an der x-Achse
1 0 0 0 1 0 0 0 0	1 0 0 0 1 0 0 0 -1	1 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 -1 0 0 0 -1
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
1 0 0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 -1 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 0 0 0	-1 0 0 0 1 0 0 0 -1
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
0 0 0 0 1 0 0 0 1	-1 0 0 0 1 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 1	-1 0 0 0 -1 0 0 0 1

Orthogonale Projektion auf die Ebene $E: ax+by+cz=0$ mit $a^2+b^2+c^2=1$	**Spiegelung** an der Ebene $E: ax+by+cz=0$ mit $a^2+b^2+c^2=1$
$P=\begin{pmatrix}1-a^2&-ab&-ac\\-ab&1-b^2&-bc\\-ac&-bc&1-c^2\end{pmatrix}=E-\vec{n}\cdot\vec{n}^T$	$S=\begin{pmatrix}1-2a^2&-2ab&-2ac\\-2ab&1-2b^2&-2bc\\-2ac&-2bc&1-2c^2\end{pmatrix}=E-2\vec{n}\cdot\vec{n}^T$

Rotation um den Winkel φ um die x-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die y-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die z-Achse
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\varphi)&-\sin(\varphi)\\0&\sin(\varphi)&\cos(\varphi)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&0&\sin(\varphi)\\0&1&0\\-\sin(\varphi)&0&\cos(\varphi)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\sin(\varphi)&0\\ \sin(\varphi)&\cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)+a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi))-a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi))+a_2\sin(\varphi)\\ a_1a_2(1-\cos(\varphi))+a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))-a_1\sin(\varphi)\\ a_1a_3(1-\cos(\varphi))-a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))+a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_3^2(1-\cos(\varphi))\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{g \circ f \; *x}{\curvearrowright} & & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

$P \cdot P - P^2 = P$ $\quad S \cdot S = S^2 = E$ $\quad B \cdot A = E$

Projekzionsmatrix bei 2-maligem anwenden

Spiegelungsmatrix bei 2-maligem anwenden

$B = A^{-1}$

lineare Abbildung f

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \xrightarrow{{}_S A_S} & f(\vec{x}) \\ {}_B T_S \downarrow & \begin{array}{c} {}_B T_S = {}_S T_B^{-1} \\ {}_C A_C = {}_C T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_C = {}_C T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_C T_B^{-1} \end{array} & \uparrow {}_S T_B \\ \vec{x} & \xrightarrow[{}_B A_B]{} & f(\vec{x}) \end{array}$$

$${}_S T_B = \left(\left(\vec{b}_1\right)_S \; \left(\vec{b}_2\right)_S \right) = {}_S\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_B$$

Einheitsvektoren B bez. der Standardbasis

a) $\boxed{f\left(\binom{1}{1}\right)} = \boxed{\binom{0}{0}}$ $\boxed{f\left(\binom{-1}{1}\right)} = \boxed{\binom{1}{0}}$ Lösung

Wir bilden aus den beiden angegebenen Vektoren die Basis $\boxed{\mathcal{B} = \{\binom{1}{1}, \binom{-1}{1}\}.}$

Dann gilt $\boxed{{}_S A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\quad A = {}_S A_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{B}} T_S}_{=B^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel

1. Rotation um den Winkel γ um die z-Achse
2. Rotation um den Winkel β um die mitrotierte y'-Achse

$\left.\right\} R_{y'}(\beta) \cdot R_z(\gamma)$

Nun gilt aber: $\boxed{R_{y'}(\beta) \cdot R_z(\gamma) = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta)}$

Entsprechendes gilt bei mehreren verketteten Rotationen um mitrotierte Achsen: Die Rotationsmatrizen werden in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben, d.h. die Matrix für die letzte Rotation steht ganz rechts; dafür ‚vergisst' man, dass die Rotationsachse mitrotiert worden ist.

6.9 Homogene Koordinaten

Wir erweitern jeden **Vektor** um eine Komponente:

- Ortsvektoren (am Ursprung angeheftet): die zusätzliche Komponente wird 1 gesetzt.
- Freie Vektoren (parallel verschiebbar): die zusätzliche Komponente wird 0 gesetzt.

Rotation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um φ um den Ursprung	**Translation** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	**Rotation** und **Translation** in einem
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wie in den Kursunterlagen beschrieben, können wir den Ortsvektor des TCP in homogenen Koordinaten folgendermassen bestimmen:

$${}_0T_1 \cdot {}_1T_2 \cdot {}_2T_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_3 \quad \text{mit} \quad {}_kT_{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(q_{k+1}) & -\sin(q_{k+1}) & l_k \\ \sin(q_{k+1}) & \cos(q_{k+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!!!Matrizen von rechts nach links auflösen!!!

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Vorgehen bei einem Parametertest

1. **Nullhypothese H_0 aufstellen**

   Um welchen Parameter geht es? Welchen Wert hat er angeblich? Oder werden zwei Parameter verglichen?

2. **Alternativhypothese H_A aufstellen**

   Kommt es darauf an, in welche Richtung die Abweichung geht? Ist dies der Fall, so beschreibt H_A nur die relevante Alternative.

3. **Die richtige Zeile in der Tabelle 9.4.2 finden** 10

   Welcher Verteilung folgt die Grundgesamtheit? Um welche Nullhypothese geht es? Welcher Fall liegt vor?

4. **Kritische Grenze(n) bestimmen**

   Dabei müssen wir Folgendes berücksichtigen: 10
   - Verteilung der Testvariablen gemäss Tabelle 9.4.2 (letzte Kolonne)
   - Signifikanzniveau α
   - Ist H_A einseitig oder zweiseitig? Wenn einseitig, auf welcher Seite befindet sich der kritische Bereich?

5. **Testwert berechnen**

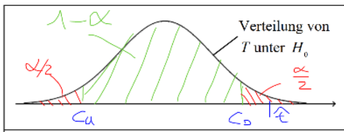
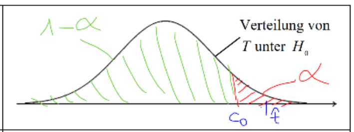
   gemäss Tabelle 9.4.2 (vorletzte Kolonne).

6. **Testentscheidung fällen**

   Liegt der Testwert im Annahmebereich oder im kritischen Bereich?

Abbildung 1Hypothesen Test !!! bei 4. Soll eine Zeichnung gemacht werden!!!

nur auf einer Seite. Annahmebereich

	
2-seitige Alternativhypothese ($H_A : \mu \neq \mu_0$)	1-seitige Alternativhypothese ($H_A : \mu > \mu_0$)
$c_u = -2.064$ $\quad c_o = 2{,}064$	$c_o = 1{,}711$

1. Nullhypothese: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = 0$
2. Alternativhypothese: $H_A: \mu < 0$
3. Welche Zeile der Tabelle 17.3 passt zu unserem Problem? 4
4. Die Testvariable folgt $f = 5 - 1 = 4$

   Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

   H_A: eenseitig, links kritisches bereich $-2{,}132$

   Kritische Grenze: $p = 0{,}95$
5. Testwert berechnen:

$-2{,}132$

$\bar{z} = \frac{1}{5}(-1-9-5+1-6) = \frac{-20}{5} = -4\text{km}$

$s^2 = \frac{1}{4}\left(3^2 + (-5)^2 + (+1)^2 + 5^2 + (-2)^2\right) = 16\text{km}^2$

$s = 4\text{km}$

$\hat{t} = \frac{\bar{z}}{s/\sqrt{n}} = \frac{-4}{4/\sqrt{5}} = -2{,}236$

6. Testentscheidung: H_0 wird abgelehnt, neuer Treibstoff scheint besser zu sein.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_A : \mu_1 < \mu_2$

Beispiel H0 & H1

	(1) Verteilung der Grundgesamtheit	(2) Param.	(3) Schätzfunktionen	(4) zugehörige standardisierte Zufallsvariable	(5) Verteilung und benötigte Quantile	(6) Zufallsvariablen für Intervallgrenzen
1	Normalverteilung (Varianz σ^2 bekannt)	μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$	**Standardnormalverteilung** (Tabelle 2) $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2	Normalverteilung (Varianz σ^2 unbekannt und $n \le 30$; sonst Fall 1 mit s als Schätzwert für σ)	μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$	***t*-Verteilung** (Tabelle 4) mit $f = n-1$ $c = t_{(p;f)}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
3	Normalverteilung	σ^2	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$Z = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$	**Chi-Quadrat-Verteilung** (Tabelle 3) mit $f = n-1$ $c_1 = z_{(p_1;f)}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$ $c_2 = z_{(p_2;f)}$ mit $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_2}$ $\Theta_o = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_1}$
4	Bernoulli-Verteilung Anteilsschätzung (mit $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$)	$\hat{p} = \bar{x} = \frac{def}{tot} \overset{z.B.}{=} \frac{27}{500}$ p	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ X_i 0/1-wertig mit $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$	**Standardnormalverteilung** (näherungsweise), Tabelle 2 $c = u_q$ mit $q = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{X} - c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$ $\Theta_o = \bar{X} + c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$
5	beliebig mit $n > 30$	μ, σ^2	wie im Fall 1 (gegebenenfalls mit s als Schätzwert für σ) bzw. im Fall 3			

Vertrauensintervalle

10.4.3 Übersicht über verschiedene Parametertests

	Verteilung Grundges.	Null-hypothese	Fall	Schätzfunktion	Testvariable (standardisiert)	Verteilung der Test-variablen unter H_0
1	Normal-verteilung	$\mu = \mu_0$	Varianz σ^2 bekannt oder $n > 30$ *	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	Standardnormal-verteilung **T2**
2	Normal-verteilung	$\mu = \mu_0$	Varianz σ^2 unbekannt	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	*t*-Verteilung mit $f = n-1$ **T4**
3	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Abhängige Stichproben; Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 bekannt oder $n > 30$ *	$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$	$U = \frac{\bar{Z}}{\sigma / \sqrt{n}}$ mit $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$	Standardnormal-verteilung **T2**
4	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Abhängige Stichproben; Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt	$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i - \bar{Z})^2$	$T = \frac{\bar{Z}}{S / \sqrt{n}}$	*t*-Verteilung mit $f = n-1$ **T4**
5	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Unabhängige Stichproben; Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 bekannt oder $n > 30$ *	$Z = \bar{X} - \bar{Y}$	$U = \frac{Z}{\sigma}$ mit $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	Standardnormal-verteilung **T2**
6	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Unabhängige Stichproben; Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt, aber gleich	$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}}$		*t*-Verteilung mit $f = n_1 + n_2 - 2$ **T4**
7	Normal-verteilung	$\sigma^2 = \sigma_0^2$		$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$Z = (n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$	Chi-Quadrat-Vert. mit $f = n-1$ **T3**
8	Bernoulli-Verteilung	$p = p_0$		$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$	Standardnormalvert. (näherungsweise) **T2**

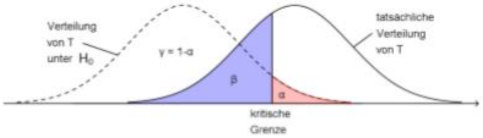
*) Falls n (bzw. n_1 und n_2) > 30 ist, so kann der entsprechende Fall für bekannte Varianzen angewendet werden; dabei dient s als Schätzwert für σ.

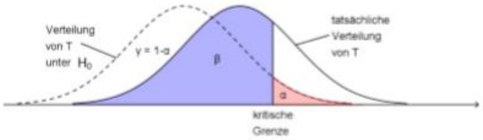
Hypothesentest

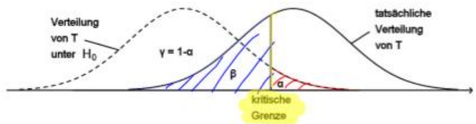
Es gibt zwei Arten von Fehlern:

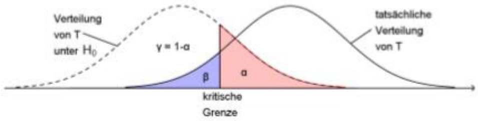
Realität \ Testentscheidung	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 ist wahr	✓	Fehler 1. Art [α]
H_0 ist falsch	Fehler 2. Art [β]	✓

***Fehler 2. Art*: H_0 ist falsch und wird trotzdem angenommen.**
„Der Alarm geht nicht los, obwohl es brennt."
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art wird mit β bezeichnet.
Die Grösse von β ist abhängig vom tatsächlichen (unbekannten) Wert des Parameters:



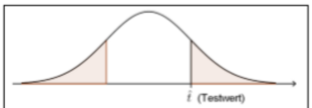






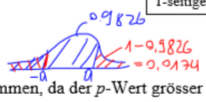
Eine *Verkleinerung* der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (α) bewirkt bei gleicher Stichprobengrösse stets eine *Vergrösserung* der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art (β) und umgekehrt.

(1) Der *p*-Wert
Statt einer Ja/Nein-Entscheidung auf Grund einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α kann man auch den sogenannten p-Wert angeben: die Wahrscheinlichkeit, einen mindestens so extremen Testwert zu erhalten, wenn H_0 wahr ist. Ist der p-Wert grösser oder gleich α, wird die Nullhypothese angenommen. Ist der der p-Wert kleiner als α, wird die Alternative angenommen.



Der p-Wert entspricht der eingefärbten Fläche. Beim 2-seitigen Hypothesentest wird die Fläche symmetrisch eingetragen (wie hier); beim 1-seitigen Hypothesentest nur auf einer Seite.

Beispiel (Serie 8, Aufgabe 1)
Testwert $\hat{u} = 2.11$ mit $\alpha = 0.01$



Die Nullhypothese wird angenommen, da der p-Wert grösser oder gleich $\alpha = 0.01$ ist.

p-Wert = $2(1-0.9826) = 2(0.0174) = 0.0348$