Grundlagen

$$f=\frac{1}{T}$$

$f(t) = F \sin(\omega t)$

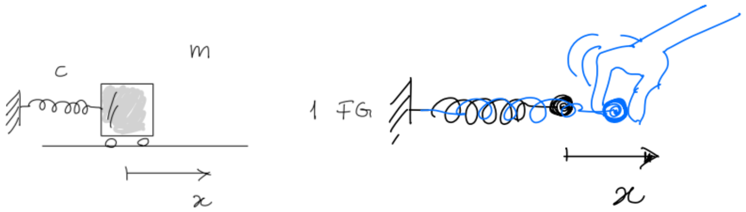
Amplitude — Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

oder:

$x(t) = A e^{i\omega t}$ $\quad i=\sqrt{-1}$

$= A\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$

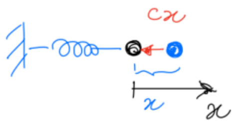


$m\ddot{x} = \sum$ aller Kräfte

$m\ddot{x} = \sum$ aller Kräfte $= -cx$

$m\ddot{x} = -cx$

$\boxed{m\ddot{x} + cx = \emptyset}$



Ansatz:

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
? ? ? ?

Anfangsbedingungen

$$x(\emptyset) = x_\emptyset$$

$$\dot{x}(\emptyset) = V_\emptyset$$

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
? ? ? ?

Ableiten:

$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$

$m\ddot{x} + cx = \emptyset$

Eigenfrequenz

$$\boxed{\omega = \pm\sqrt{\frac{c}{m}}}$$

Eigenschaft vom System
→ Eigenfrequenz

Einsetzen der Anfangsbedingungen zur Evaluation von A und B

A, B ?

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$

$x(\emptyset) = x_\emptyset$

$\dot{x}(\emptyset) = V_\emptyset$

$x(\emptyset) = A \overset{\downarrow}{=} x_\emptyset$

$\underbrace{\dot{x}(\emptyset) = +B\sqrt{\frac{c}{m}}}_{\dot{x}(\emptyset)} \overset{\downarrow}{=} V_\emptyset$

$B = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{c}{m}}}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$A = x_0$ und $B = \frac{v_0}{\omega}$

x0 = 0; v0 = 0

Schwingungen

Freie, ungedämpfte Schwingung	$m\ddot{x} + cx = 0$
	$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$
Freie, gedämpfte Schwingung	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$
schwache Dämpfung ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t))$
aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)	$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-\delta t}$
starke Dämpfung ($\delta > \omega_0$)	$x(t) = C_1 \cdot e^{-k_1 t} + C_2 \cdot e^{-k_2 t}$
Erzwungene Schwingung	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \cdot \sin(\omega t)$
schwache Dämpfung ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)) + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Dabei gilt: $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $\delta = b/2m$, $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $k_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, ω: Erregerfrequenz

Harmonische Schwingung

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \qquad \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

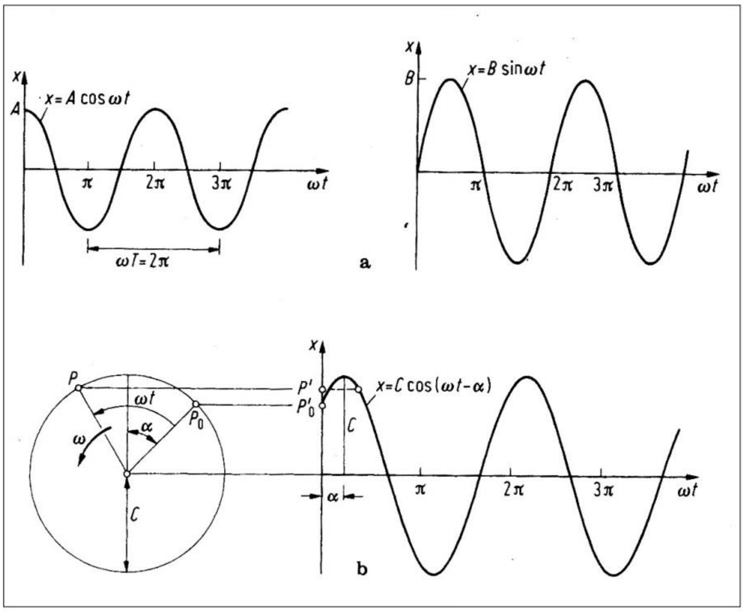


Abb. 1.2: Harmonische Schwingungen

$x(t) = A\cos\omega t$ zum Zeitpunkt $t = 0: x(0) = A;\ \dot{x}(0) = 0$

Sinusschwingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = B\omega$

Beliebige Anfangsbedingung:

$$x(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$$

C = Amplitude; α = Phasenverschiebung

$x(t) = C\cos(\omega t - \alpha) = C\cos\omega t\cos\alpha + C\sin\omega t\sin\alpha$ $\quad A = C\cos\alpha,\quad B = C\sin\alpha$

$$\boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2},\qquad \alpha = \arctan\frac{B}{A}} \qquad x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Durch Anfangsbedingungen

$A = x_0$ und $B = \frac{v_0}{\omega}$

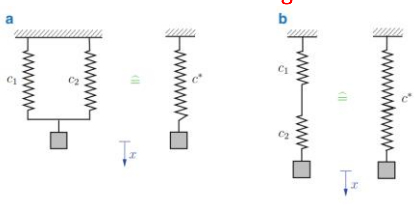
$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \qquad \alpha = \arctan\frac{v_0}{\omega x_0}$

Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{c/m}$$

Parallel- und Reihenschaltung der Feder

$$c^* = \sum c_j$$



Parallel- und Reihenschaltung

$$\frac{1}{c^*} = \sum \frac{1}{c_j}$$

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_B} \rightarrow c^* = \frac{c\,c_B}{c + c_B}$$

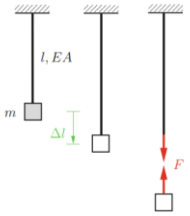
Federnachgiebigkeit

$h = 1/c$ die *Federnachgiebigkeit*

$$h^* = \sum h_j$$

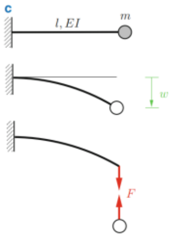
Federzahlen elastischer Systeme

$$c = \frac{F}{\Delta l}$$



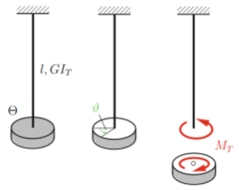
$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \qquad c = \frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$$

;



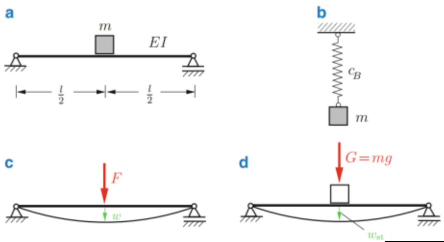
$$w = \frac{Fl^3}{3\,EI} \qquad c = \frac{F}{w} = \frac{3\,EI}{l^3}$$

;



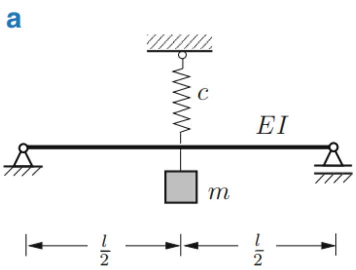
$$\vartheta = \frac{M_T\, l}{GI_T} \qquad c_T = \frac{M_T}{\vartheta} = \frac{GI_T}{l}$$

;



$$w = \frac{Fl^3}{48\,EI}$$

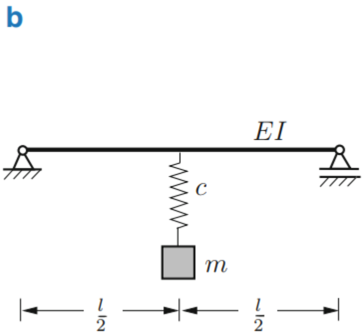
$$c_B = \frac{F}{w} = \frac{48\,EI}{l^3}$$



Durchbiegung (Balken) und Auslenkung (Feder) sind gleich gross → Parallelschaltung

$$c^* = c + c_B = c + \frac{48\,EI}{l^3}$$

$$\underline{\omega} = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{c\,l^3 + 48\,EI}{m l^3}}}}$$



Durchbiegung (Balken) und Auslenkung (Feder) sind gekoppelt → Reihenschaltung

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_B} \quad \rightarrow \quad c^* = \frac{c\,c_B}{c + c_B}$$

$$\underline{\omega} = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{48\,c\,EI}{(c\,l^3 + 48\,EI)\,m}}}}$$

$$\underline{f = \frac{\omega}{2\,\pi}}$$

Freiheitsgrad Rotation:

Annahme: $|\varphi|$ "klein"

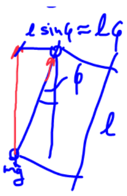
φ (rad) $\approx \sin(\varphi) \approx \tan(\varphi)$

$\Theta\ddot\varphi = \Sigma$ aller Momente $= \Sigma M$

$\Theta = ml^2$

Vorgehen:

1. Vereinfachte Skizze mit Schwerpunkt, Anbindungspunkten und Laufvariable (x oder phi)
2. Auslenkung abbilden, Federkraft als Reaktionen der Auslenkung (drückt zum Systemursprung)
3. Hebelarm einzeichnen



$\Theta\ddot\varphi = -(mg\,l\sin\varphi l)$

$\Theta\ddot\varphi + mg\,l\sin(\varphi) = 0$

$\Theta\ddot\varphi + mg\,l\varphi = 0$

$ml^2\ddot\varphi + mgl\varphi = 0$

Trägheit Steifigkeit

$\omega = \sqrt{\frac{\text{Steifigkeit}}{\text{Trägheit}}} = \sqrt{\frac{mg\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,m/s^2}{1\,m}} = \boxed{\sqrt{9{,}81}\ \frac{\text{Rad}}{s}}$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

$l = 1\,m$

$\Theta\ddot\varphi = \Sigma M$

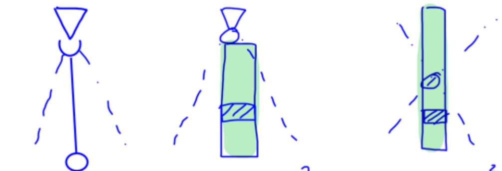
$\Theta\ddot\varphi = -mgl\sin(\varphi) - c_\varphi \cdot \varphi$

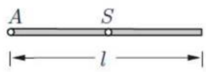
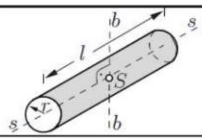
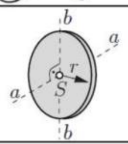
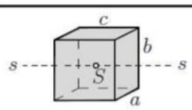
$ml\ddot\varphi + mgl\varphi + c_\varphi\varphi = 0$

$\underbrace{ml}_{\text{Trägheit}}\ddot\varphi + \underbrace{(mgl + c_\varphi)}_{\text{Steifigkeit}}\varphi = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{mgl + c_\varphi}{ml}}$

Massenträgheitsmoment vom Stab und Balken



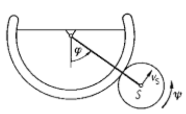
Dünner Stab		$\Theta_s = \frac{ml^2}{12},\quad \Theta_A = \frac{ml^2}{3}$
Zylinder		$\Theta_s = \frac{mr^2}{2},\quad \Theta_b = \frac{m}{12}(3r^2 + l^2)$
Dünne Scheibe		$\Theta_a = \frac{mr^2}{2},\quad \Theta_b = \frac{mr^2}{4}$
Kugel		$\Theta_s = \frac{2}{5}\,mr^2$
Quader		$\Theta_s = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Kinematik / Kinematischerelation

$$\dot x = r\,\dot\varphi\,.$$

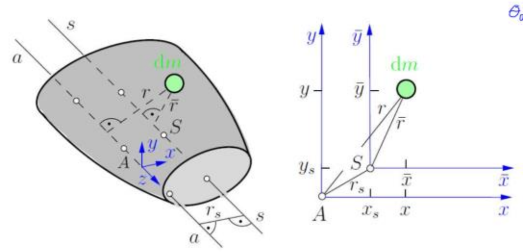
Kinematik:

$$v_S = l\,\dot\varphi\,, \qquad v_S = r\,\dot\psi \qquad \rightarrow \qquad l\,\dot\varphi = r\,\dot\psi\,.$$



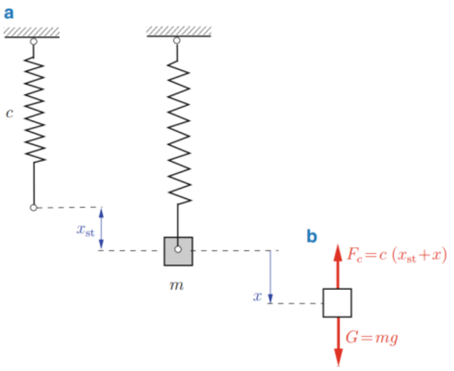
Satz von Steiner

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_a &= \theta_s + r_s^2 m \\ i_a^2 &= i_s^2 + r_s^2\end{aligned}}$$



Satz von Steiner
i = Flächenträgheitsmoment

LASTFALL	$\sigma_{max} = \frac{M_{bmax}}{W}$	f_{max}
K; l, E, I, W	$\frac{Kl}{W}$	$\frac{l^3}{3} \cdot \frac{K}{EI}$
M; l, E, I, W	$\frac{M}{W}$	$\frac{l^2}{2} \cdot \frac{M}{EI}$
q_0	$\frac{q_0 l^2}{2W}$	$\frac{l^4}{8} \cdot \frac{q_0}{EI}$
d; K; l, E, I, W	$\frac{K \cdot d}{W}$	$\left[\frac{d^3}{3} + \frac{d^2}{2}(l-d)\right]\frac{K}{EI}$
d; M; l, E, I, W	$\frac{M}{W}$	$\left[\frac{d^2}{2} + d(l-d)\right]\frac{M}{EI}$
d_1; K_1; K_2; d_2; l, E, I, W	$\frac{K_1 d_1 + K_2 \cdot d_2}{W}$	s. Seite 21/22
q_1; l, E, I, W	$\frac{q_1 \cdot l^2}{6W}$	$\frac{l^4}{30} \cdot \frac{q_1}{EI}$
l/2; K; l/2; l, E, I, W	$\frac{Kl}{2W}$	$\frac{l^3}{48} \cdot \frac{K}{EI}$
q_0; l, E, I, W	s. Seite 23	s. Seite 23



$$\omega^2 = g/x_{st}$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{3} m l^2 \ddot\varphi}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{c l^2 \varphi}_{\text{Stiff}} = \underbrace{-mg\tfrac{l}{2}}_{\text{konst. Kraft}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3cl^2}{ml^2}}$$

Kleine Winkel

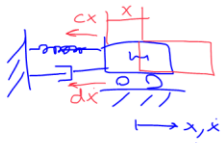
$\cos\varphi \Rightarrow$ kleine $\varphi \Rightarrow \cos\varphi \approx 1$

$\sin\varphi \Rightarrow$ kleine $\varphi \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$

$\varphi^2 \Rightarrow$ kleine $\varphi = \varphi^2 \approx 0$

Gedämpfte freie Schwingung – als Reibung

Dämpfung



$$m\ddot x = \sum F$$

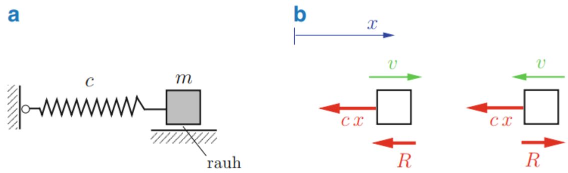
$$m\ddot x = -cx - d\dot x$$

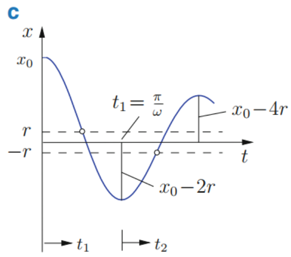
$$\boxed{m\ddot x + d\dot x + cx = 0}$$

Ansatz

$$x(t) = C_1 e^{st}$$

(nicht relevant)





Reibungsdämpfung:

Fall: T(n*π/ω) → n*(-2r) <= r → Haftkraft zu gross

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \qquad r = \frac{R}{c} \qquad \ddot x + \omega^2 x = \begin{cases} -\omega^2 r & \text{für } \dot x > 0, \\ +\omega^2 r & \text{für } \dot x < 0. \end{cases}$$

Fall v < 0:

$$\ddot x + \omega^2 x = \omega^2 r\,.$$

$$x(t_1) = A_1 \cos\omega t_1 + B_1 \sin\omega t_1 + r\,.$$

Die beiden Konstanten A_1 und B_1 folgen aus den Anfangsbedingungen:

$$x(t_1 = 0) = A_1 + r = x_0 \quad \rightarrow \quad A_1 = x_0 - r,$$
$$\dot x(t_1 = 0) = \omega B_1 = 0 \quad \rightarrow \quad B_1 = 0\,.$$

Somit wird die Bewegung nach links im ersten Bewegungsabschnitt durch

$$x(t_1) = (x_0 - r)\cos\omega t_1 + r\,,$$
$$\dot x(t_1) = -(x_0 - r)\omega \sin\omega t_1$$

Fall v > 0

$$\ddot x + \omega^2 x = -\omega^2 r$$

$$x(t_2) = A_2 \cos\omega t_2 + B_2 \sin\omega t_2 - r\,.$$

Übergangsbedingungen

$$x(t_2 = 0) = x\left(t_1 = \frac{\pi}{\omega}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = -x_0 + 3r\,,$$
$$\dot x(t_2 = 0) = \dot x\left(t_1 = \frac{\pi}{\omega}\right) \quad \rightarrow \quad B_2 = 0\,.$$

$$x(t_2) = -(x_0 - 3r)\cos\omega t_2 - r\,.$$

Gedämpfte freie Schwingung

Dämpfer - Abklingkoeffizient

$$2\,\delta = \frac{d}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \qquad x = A\,e^{\lambda t}$$

Dämpfungskonstante

$$d = 2\sqrt{mc}$$

$$\ddot{x} + 2\,\delta\dot{x} + \omega^2\,x = 0$$

charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \boxed{\lambda^2 + 2D\omega\,\lambda + \omega^2 = \emptyset}$$

Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega} \qquad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

$$\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \underline{\omega\sqrt{D^2-1}}$$

fall $D<1 \rightarrow$ komplex

1. *Starke Dämpfung: $D > 1$* *Kriechbewegung*

λ_1 und λ_2 reell: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mu$ mit $\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$

Allg. LSG:

$$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}(A_1\,e^{\mu t} + A_2\,e^{-\mu t})$$

A aus x(0) & v(0) bestimmen

2. *Grenzfall: $D = 1$* *aperiodischer Grenzfall*

Dieser Fall bewirkt die schnellste zeitliche Dämpfung!

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta.$ für deinen Fall gilt für d $\rightarrow$ $d = 2\sqrt{mc}.$

Allg. LSG:

$$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,t\,e^{\lambda_1 t} = (A_1 + A_2\,t)\,e^{-\delta t}$$

3. *Schwache Dämpfung: $D < 1$*

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega\sqrt{1 - D^2} = -\delta \pm i\omega_d, \quad (i = \sqrt{-1})$$

wenn leicht: $\omega_d = \omega\sqrt{1 - D^2}$

Allg. LSG:

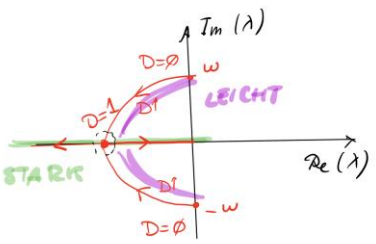
$$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}(A_1\,e^{i\omega_d t} + A_2\,e^{-i\omega_d t})$$

Konkrete LSG

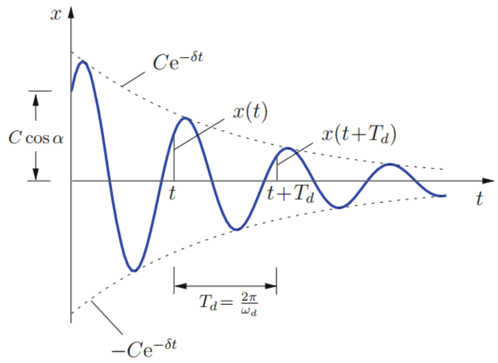
$$x(t) = e^{-\delta t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d\,t + i(A_1 - A_2)\sin\omega_d\,t]$$
$$= e^{-\delta t}(A\cos\omega_d\,t + B\sin\omega_d\,t),$$

$$x(t) = C\,e^{-\delta t}\cos(\omega_d\,t - \alpha)$$

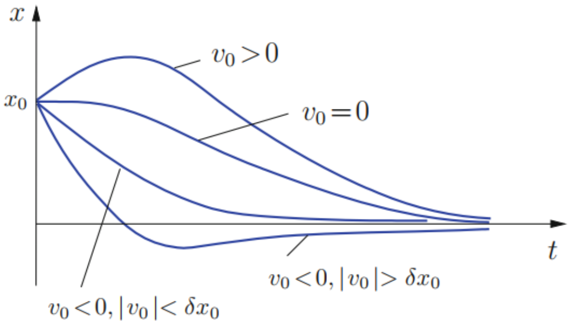
$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = e^{\delta T_d}$$



schwache Dämpfung



starke Dämpfung



logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \delta T_d = \frac{2\,\pi\,\delta}{\omega_d} = 2\,\pi\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

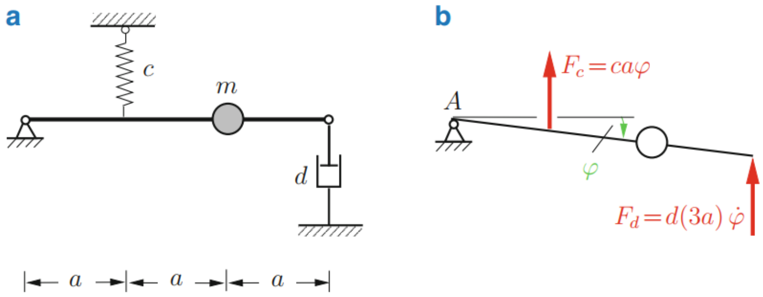
$$D \approx \frac{\Lambda}{2\pi}$$

Kritische Dämpfung d_quer

$$\bar{d} = 2\sqrt{c \cdot m} \qquad D = \frac{d}{\bar{d}}$$

$$D = \frac{\textit{Dämpferwert}}{\textit{Kritische Dämpfung } \bar{d}} \qquad \bar{d} = 2 * \sqrt{\textit{Steiffigkeit} * \textit{Trägheit}}$$

Bsp.



$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad \Theta_A\,\ddot{\varphi} = -a\,F_c - 3\,a\,F_d \quad \rightarrow \quad 4\,m\ddot{\varphi} + 9\,d\,\dot{\varphi} + c\,\varphi = 0\,.$$

$$\Theta_A = (2\,a)^2 m,$$

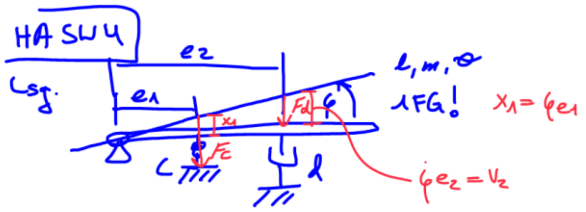
Mit den Abkürzungen $2\,\delta = 9\,d/(4m)$, $\omega^2 = c/(4m)$ folgt daraus die zu (5.32) analoge Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\,\delta\,\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0\,.$$

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{9\,d}{8\,m}2\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{9\,d}{4\sqrt{mc}} < 1\,. \quad \underline{\underline{d < \frac{4}{9}\sqrt{mc}\,.}}$$

Die beiden Konstanten folgen aus den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ zu $\alpha = \pi/2$ und $C = \dot{\varphi}_0/\omega_d$. Damit wird

$$\underline{\varphi(t)} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_d}\,e^{-\delta t}\cos\left(\omega_d\,t - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_d}\,e^{-\delta t}\sin\omega_d\,t\,.}}$$



$$\Theta\ddot{\varphi} = \sum M$$

$$\Theta\ddot{\varphi} = -c\,\underbrace{\varphi e_1}_{F}\cdot\underbrace{e_1}_{Hebel} - d\,\underbrace{\dot{\varphi} e_2}_{F}\cdot\underbrace{e_2}_{Hebel}$$

$$\underbrace{\Theta\ddot{\varphi}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{d e_2^2\dot{\varphi}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{c e_1^2\varphi}_{\text{Steifigkeit}} = 0$$

Kritische Dämpfung

$$d = 2\sqrt{\text{Trägheit}\cdot\text{Steifigkeit}} = 2\sqrt{\Theta\cdot c e_1^2}$$

Dämpfungsgrad: D

$$D = \frac{\text{Dämpfung}}{\text{krit. Dämpfung}} = \frac{d e_2^2}{2\sqrt{\Theta\cdot c e_1^2}}$$

Freiheitsgrad bestimmen:
Fall fest eingespannt immer Linearer Freiheitsgrad
Fall: Gelenkig gelagert; Freiheitsgrad: phi (rotation)

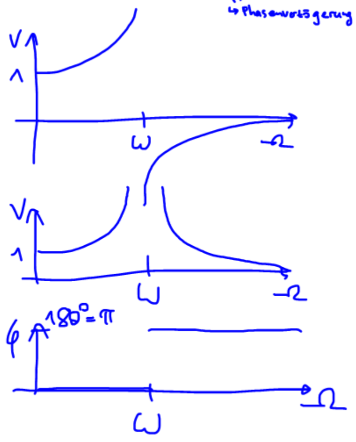
Krit. Dämpfung [Ns/m]

$$x(t) = X\cos(\Omega t)$$

>0, fall $\Omega < \omega$
<0, fall $\Omega > \omega$

$$= |X|\cos(\Omega t - \varphi)$$

↳ Phasenverschiebung



Erzwungene Schwingung - Ungedämpft

Erregerkraft

$$F = F_0\cos\Omega t$$

$$\downarrow:\quad m\ddot{x} = -c\,x + F_0\cos\Omega t \quad\rightarrow\quad m\ddot{x} + c\,x = F_0\cos\Omega t\,.$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m},\qquad x_0 = \frac{F_0}{c}$$

Eigenfrequenz — statische Verlängerung

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2}x = \frac{F_0}{m}\frac{c}{c}\cos(\Omega t)$$

ω^2 X_0 (statische Verschiebung)

Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0\cos\Omega t$$

X bestimmen

$$x = x_h + x_p$$

Homogene Lösung

$$x_h = C\cos(\omega t - \alpha)$$

Partikuläre Lösung

$$x_p = x_0 V\cos\Omega t\,.$$

Xp, (und dessen Ableitungen) in Gleichung einsetzen

$$-x_0 V\Omega^2\cos\Omega t + \omega^2 x_0 V\cos\Omega t = \omega^2 x_0\cos\Omega t \quad\rightarrow\quad V = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}\,.$$

$$\boxed{V = \frac{X}{X_0} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

Vergrösserungsfaktor

Frequenzverhältnis (= Abstimmung)

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \qquad\rightarrow\qquad V = \frac{1}{1-\eta^2}$$

Allgemeine Lösung

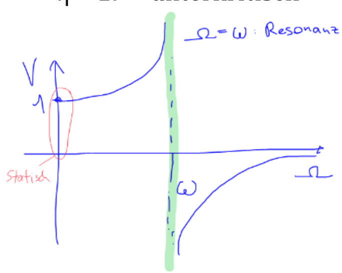
$$x(t) = x_h + x_p = C\cos(\omega t - \alpha) + x_0 V\cos\Omega t$$

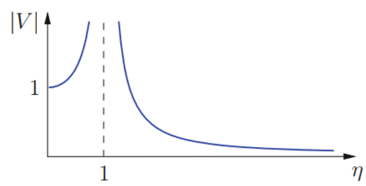
Nach hinreichend grosser Zeit

$$x(t) = x_p = x_0 V\cos\Omega t$$

$\eta \to 1$: $V \to \infty$ $\quad$ $\eta \to 0$: $V \to 1$ $\quad$ $\eta \to \infty$: $V \to 0$

$\eta < 1$: unterkritisch $\quad$ $\eta < 1$: überkritisch





Fall: $\Omega = \omega$: Resonanz

$$x_p = x_0\bar{V}\,t\sin\Omega t = x_0\bar{V}\,t\sin\omega t$$

$$\dot{x}_p = x_0\bar{V}\sin\omega t + x_0\bar{V}\omega t\cos\omega t,$$

$$\ddot{x}_p = 2\,x_0\bar{V}\omega\cos\omega t - x_0\bar{V}\omega^2 t\sin\omega t$$

$$2\,x_0\bar{V}\omega\cos\omega t - x_0\bar{V}\omega^2 t\sin\omega t + \omega^2 x_0\bar{V}\,t\sin\omega t = \omega^2 x_0\cos\omega t$$

$$\rightarrow\quad \bar{V} = \frac{\omega}{2}\,.$$

$$x_p = \frac{1}{2}\,x_0\,\omega t\sin\omega t$$

Erzwungene Schwingung ohne Dämpfung
Fall 1 (Durch Harmonische Kraft)

Bsp.

$f = F\cos(\Omega t)$

$m\ddot{x} + cx = F\cos(\Omega t)$

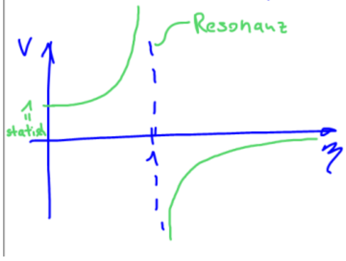
$x(t) = X\cos(\Omega t)$

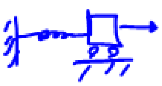
$X_0 = \frac{F}{c} \Rightarrow$ statische Verschiebung

$V = \frac{X}{X_0}$

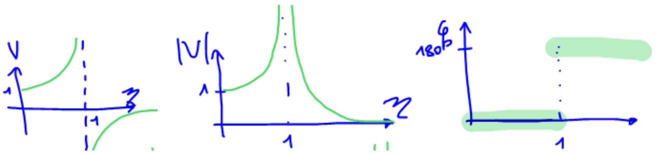
Anregerfrequenz

$V = \frac{1}{1-\eta^2}$; $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$; $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$





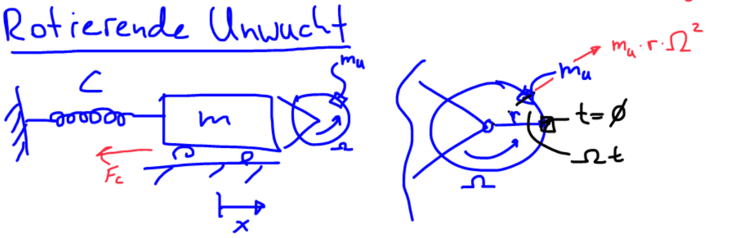
$f = F\cos(\Omega t)$ $\quad V = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{1-\eta^2}$; $X_0 = \frac{F}{c}$



Fall 2 (rotierende Unwucht)

Zentrifugalkraft

Rotierende Unwucht



$m\ddot{x} = -cx + m_u r\Omega^2\cos(\Omega t)$

$m\ddot{x} + cx = m_u r\Omega^2\cos(\Omega t)$; $/m$

$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega^2}x = \underbrace{\frac{m_u}{m}r}_{X_0}\Omega^2\cos(\Omega t)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = X_0\Omega^2\cos(\Omega t)$

Ansatz: $x(t) = X\cos(\Omega t)$

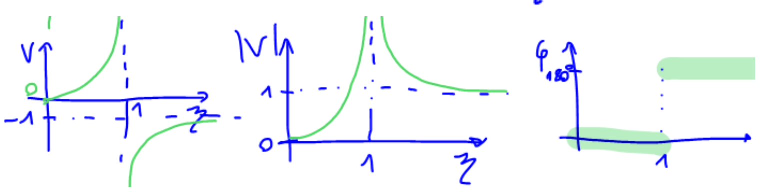
$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X\cos(\Omega t)$

$(-\Omega^2+\omega^2)X\cancel{\cos(\Omega t)} = X_0\Omega^2\cancel{\cos(\Omega t)}$

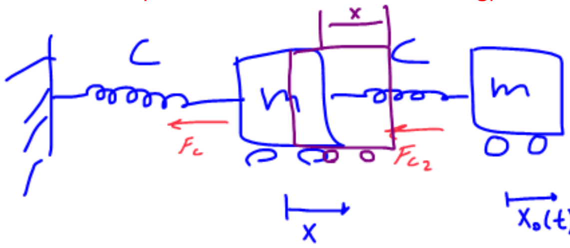
$\frac{X}{X_0} = \frac{\Omega^2}{-\Omega^2+\omega^2}$; $/\frac{\omega^2}{\omega^2}$

$V = \frac{X}{X_0} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + \cancel{\frac{\omega^2}{\omega^2}}} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$

$V = \frac{X}{X_0} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$; $X_0 = \frac{m_u}{m}r$



Fall 3 (durch harmonische Auslenkung) ähnlich Fall 1!



$X_0(t) = X_0\cos(\Omega t)$

$m\ddot{x} = \Sigma F$

$m\ddot{x} = -cx - c(x - x_0)$

$m\ddot{x} + cx + cx = cx_0$

$m\ddot{x} + 2cx = \underbrace{cX_0\cos(\Omega t)}_{\text{Erregung}}$; $/m$

$\ddot{x} + 2\frac{c}{m}x = \frac{c}{m}X_0\cos(\Omega t)$

Wegen 2 Federn

$\ddot{x} + 2\omega^2 x = \omega^2 X_0\cos(\Omega t)$

Ansatz: $x(t) = X\cos(\Omega t)$

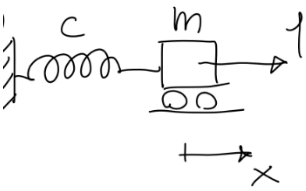
$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X\cos(\Omega t)$

$(-\Omega^2+2\omega^2)X\cancel{\cos(\Omega t)} = \omega^2 X_0\cancel{\cos(\Omega t)}$

$\frac{X}{X_0} = \frac{\omega^2}{-\Omega^2+2\omega^2}$; $/\frac{\omega^2}{\omega^2}$

$V = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{2-\eta^2}$

Erzwungene Schwingung mit mehreren Erzwingungskräften



$f(t) = F\cos(\Omega t) + F\cos(2\Omega t)$

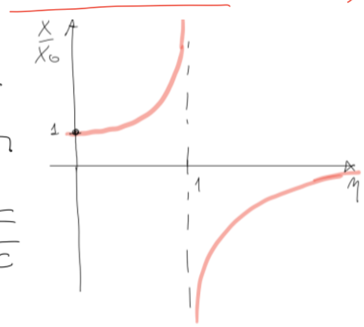
$m\ddot{x} + cx = F\cos(\Omega t) + F\cos(2\Omega t)$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx = F\cos(\Omega t) & (*) \\ m\ddot{x} + cx = F\cos(2\Omega t) & (**) \end{cases}$$

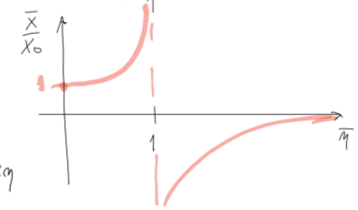
(*) $\frac{X}{X_0} = \frac{1}{1-\eta^2}$; $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$

$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$X_0 = \frac{F}{c}$



$\frac{\bar{X}}{X_0} = \frac{1}{1-\bar{\eta}^2}$

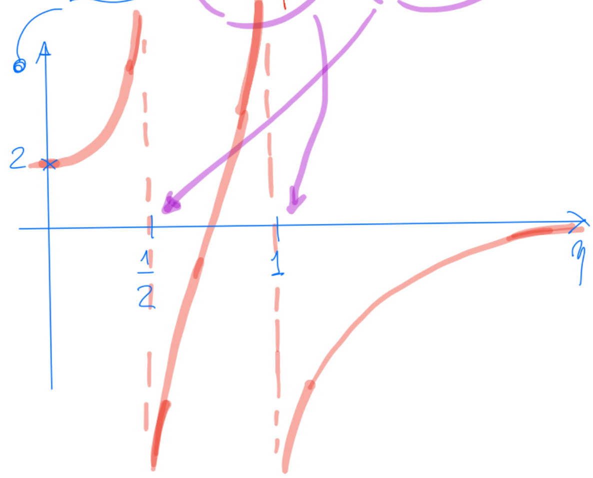


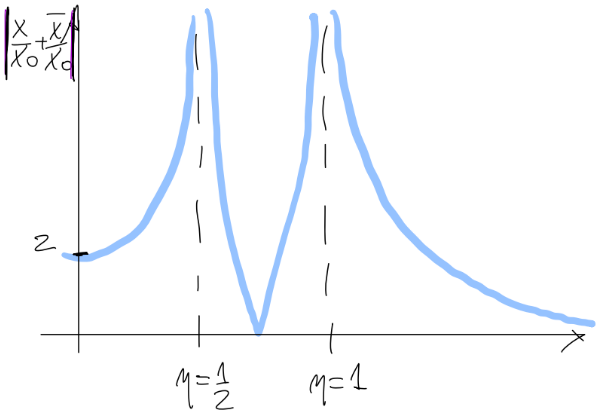
(**) $m\ddot{x} + cx = F\cos(2\Omega t)$

Ansatz: $x(t) = \bar{X}\cos(2\Omega t)$

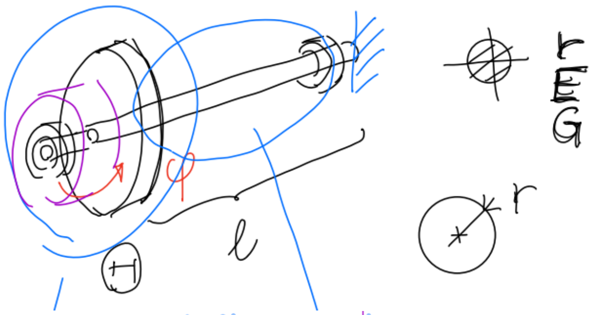
$X_0 = \frac{F}{c}$ $\quad \bar{\Omega} = 2\Omega$ $\quad \bar{\eta} = \frac{\bar{\Omega}}{\omega} = \frac{2\Omega}{\omega} = 2\eta$

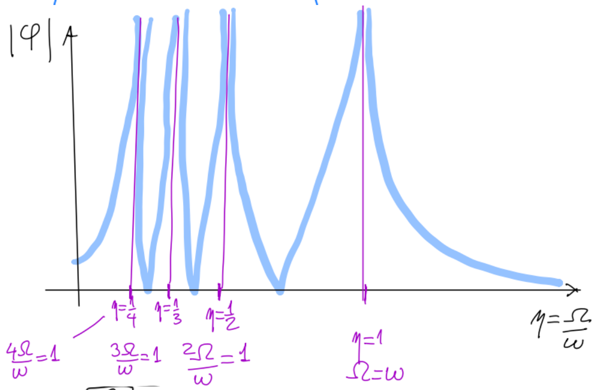
$$\underbrace{\frac{X}{X_0} + \frac{\bar{X}}{X_0}}_{} = \frac{1}{1-\eta^2} + \frac{1}{1-(2\eta)^2}$$





Aufgabe mit Freiheitsgrad Rotation (Erzwungen und nicht gedämpft)





$$\omega = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$$

	st. Lösung	Lösung	Ansatz
1	$\phi_0^1 = \frac{M_1}{c}$	$\frac{\phi^1}{\phi_0^1} = \frac{1}{1-\eta^2}$	$\varphi = \phi \cos(\Omega t)$
2	$\phi_0^2 = \frac{M_2}{c}$	$\frac{\phi^2}{\phi_0^2} = \frac{1}{1-(2\eta)^2}$	$\varphi = \phi \cos(2\Omega t)$
3	$\phi_0^3 = \frac{M_3}{c}$	$\frac{\phi^3}{\phi_0^3} = \frac{1}{1-(3\eta)^2}$	$\varphi = \phi \cos(3\Omega t)$
4	$\phi_0^4 = \frac{M_4}{c}$	$\frac{\phi^4}{\phi_0^4} = \frac{1}{1-(4\eta)^2}$	$\varphi = \phi \cos(4\Omega t)$

$$\left.\begin{aligned}
\phi_1 &= \phi_0^1 \cdot \frac{1}{1-\eta^2} \\
\phi_2 &= \phi_0^2 \, \frac{1}{1-(2\eta)^2} \\
\phi_3 &= \phi_0^3 \, \frac{1}{1-(3\eta)^2} \\
\phi_4 &= \phi_0^4 \, \frac{1}{1-(4\eta)^2}
\end{aligned}\right\} \underbrace{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4}_{\text{ges. "Antwort"}}$$

Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

1. Fall: *Krafterregung* oder *Erregung über eine Feder*

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

↑: $m\ddot{x} = -cx - d\dot{x} + F_0 \cos\Omega t \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F_0 \cos \Omega t$

Definitionen

$$2\,\delta = \frac{d}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad x_0 = \frac{F_0}{c}$$

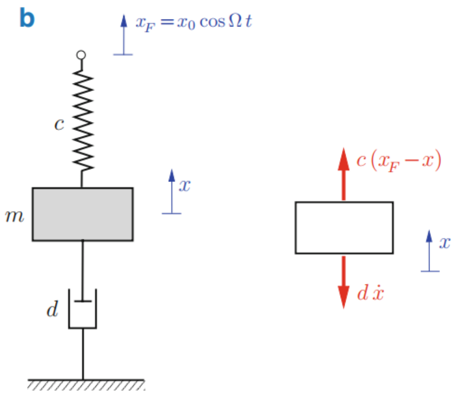
Gegebene Auslenkung des Federends

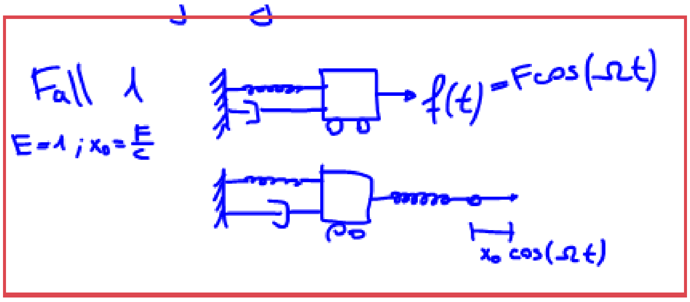
$$x_F = x_0 \cos \Omega t. \qquad x_F - x$$

↑: $m\ddot{x} = c(x_F - x) - d\,\dot{x} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = c\,x_0 \cos \Omega t$

Grundgleichung

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2\,x = \omega^2\,x_0 \cos \Omega t$$





2. Fall: *Erregung über einen Dämpfer*

Gegebene Auslenkung / Auslenkgeschwindigkeit beim Dämpferende

$$x_D = x_0 \sin \Omega t \qquad \dot{x}_D - \dot{x}$$

↑: $m\ddot{x} = -c\,x + d(\dot{x}_D - \dot{x}) \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = d\,\Omega x_0 \cos \Omega t$

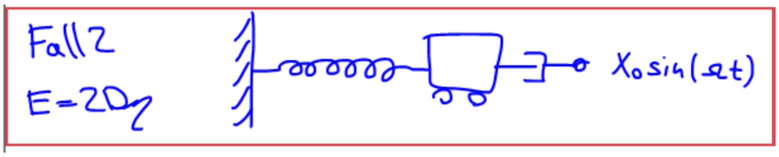
Definitionen

$$2\,\delta = \frac{d}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

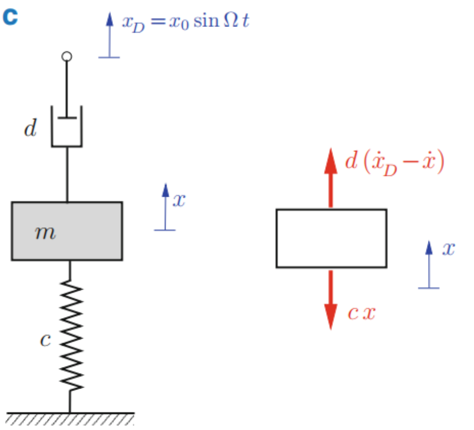
Grundgleichung

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2\,x = 2\,\delta\Omega\,x_0 \cos \Omega t$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2\,x = 2D\eta\omega^2 x_0 \cos \Omega t$$



Egal ob die Feder und Dämpfer alle links / rechts angebracht sind oder je links oder rechts, die Bewegungsgleichung ist immer gleich!



3. Fall: *Erregung durch eine rotierende Unwucht*

$$x_u = x + r\cos\Omega t \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_u = \ddot{x} - r\,\Omega^2 \cos \Omega t$$

Bewegungsgleichungen

↑: $m_u \ddot{x}_u = -S \cos \Omega t,$

↑: $m_0 \ddot{x} = -c\,x - d\,\dot{x} + S\cos\Omega t$

Daraus erhält man durch Eliminieren von S und Einsetzen von $\ddot{x}_u$:

$$(m_0 + m_u)\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = m_u r\,\Omega^2 \cos \Omega t\,.$$

$(m_u r \underline{\Omega^2}) \cos(\Omega t)$

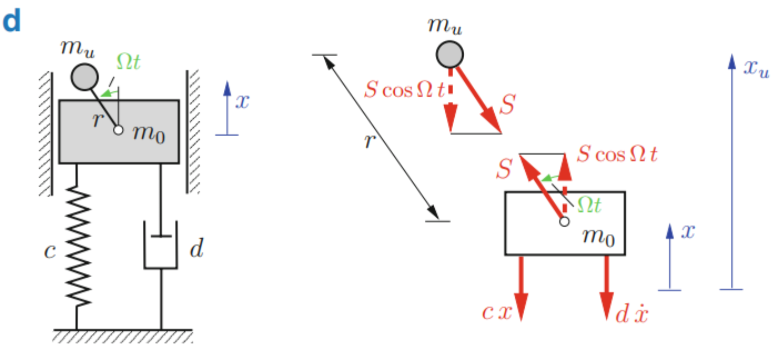
rotierende Unwucht

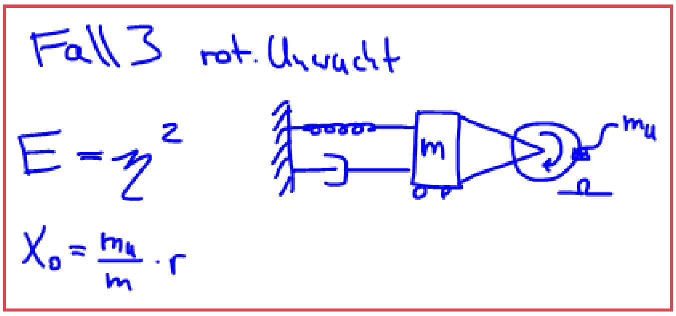
Definitionen

$$m = m_0 + m_u, \quad x_0 = \frac{m_u}{m} r$$

Bewegungsgleichung für Masse m0

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2\,x = \omega^2\,\eta^2 x_0 \cos \Omega t$$





Fall generell:

Vorgabe

$$D = \delta/\omega \qquad 2\,\delta = \frac{d}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$\frac{1}{\omega^2}\,\ddot{x} + \frac{2\,D}{\omega}\,\dot{x} + x = x_0 E \cos \Omega t$$

Fall 1, 2, 3

Fall 1: $E = 1$ Fall 2: $E = 2\,D\,\eta$, Fall 3: $E = \eta^2$

Partikuläre Lösung

$$x_p = x_0\, V \cos(\Omega t - \varphi)$$

Ableitungen

$$x_p = x_0\, V(\cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi),$$
$$\dot{x}_p = x_0\, V \Omega(-\sin \Omega t \cos \varphi + \cos \Omega t \sin \varphi),$$
$$\ddot{x}_p = x_0\, V \Omega^2(-\cos \Omega t \cos \varphi - \sin \Omega t \sin \varphi)$$

Eingesetzt

$$x_0 V \frac{\Omega^2}{\omega^2}(-\cos \Omega t \cos \varphi - \sin \Omega t \sin \varphi)$$
$$+ 2\,D\, x_0 V \frac{\Omega}{\omega}(-\sin \Omega t \cos \varphi + \cos \Omega t \sin \varphi)$$
$$+ x_0 V(\cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi) = x_0 E \cos \Omega t$$

Mit $\eta = \Omega/\omega$

$$(-V\eta^2 \cos \varphi + 2\,DV\eta \sin \varphi + V \cos \varphi - E) \cos \Omega t$$
$$+ (-V\eta^2 \sin \varphi - 2\,DV\eta \cos \varphi + V \sin \varphi) \sin \Omega t = 0$$

Für alle t falls Klammerausdrücke verschwinden

$$V(-\eta^2 \cos \varphi + 2\,D\,\eta \sin \varphi + \cos \varphi) = E,$$
$$-\eta^2 \sin \varphi - 2\,D\,\eta \cos \varphi + \sin \varphi = 0\,.$$

Phasenverschiebung φ

(Phasen-Frequenzgang)

$$\tan \varphi = \frac{2\,D\,\eta}{1 - \eta^2}$$

Fall 1: $E = 1$,
Fall 2: $E = 2\,D\,\eta$,
Fall 3: $E = \eta^2$.

Gibt an wie viel der Ausschlag hinter Erregung nacheilt

Durch

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}, \qquad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

Vergrößerungsfunktion V

(Amplituden-Frequenzgang) Betrag der Amplitude

$$V = \frac{E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\,D^2 \eta^2}} \qquad V_{komplex} = \frac{E}{(1-\eta^2) + 2D\eta i}$$

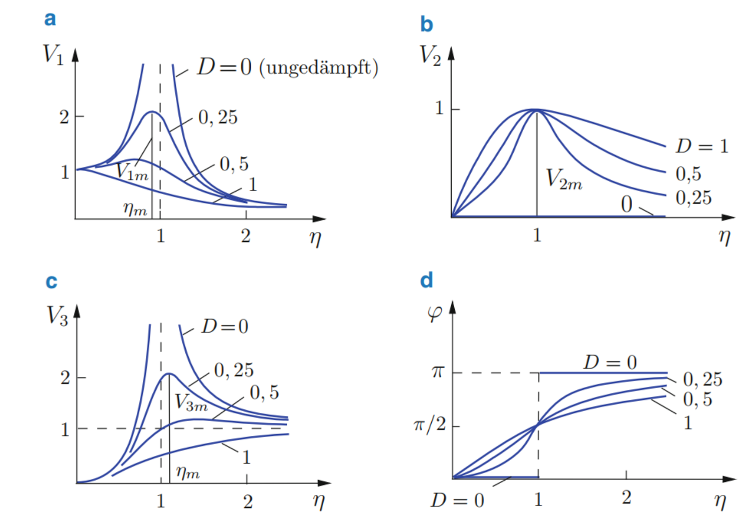


Abb. 5.23 Vergrößerungsfunktionen und Phasenverschiebung

a) Fall 1: E = 1

$$V_1(0) = 1, \quad V_1(1) = \frac{1}{2\,D}, \quad V_1(\eta \to \infty) \to 0$$

Für $D^2 \leqq 0{,}5$ nehmen die Kurven an den Stellen $\eta_m = \sqrt{1 - 2\,D^2}$ die Maximalwerte $V_{1m} = 1/(2\,D\sqrt{1 - D^2})$ an. Es sei darauf hingewiesen, dass der Maximalwert *nicht* an der Stelle der Eigenfrequenz des gedämpften Schwingers liegt. Für kleine Dämpfung ($D \ll 1$) werden $\eta_m \approx 1$ und $V_{1m} \approx 1/2D$ (Resonanz); im Grenzfall $D \to 0$ geht V_1 in die Vergrößerungsfunktion (5.49) über. Wenn $D^2 > 0{,}5$ ist, fallen die Kurven monoton gegen Null.

b) Fall 2: $E = 2\,D\eta$

$$V_2(0) = 0, \quad V_2(1) = 1, \quad V_2(\eta \to \infty) \to 0\,.$$

Der Maximalwert $V_{2m} = 1$ ist unabhängig von D und tritt immer bei $\eta_m = 1$ auf.

c) Fall 3: $E = \eta^2$

$$V_3(0) = 0, \quad V_3(1) = \frac{1}{2\,D}, \quad V_3(\eta \to \infty) \to 1\,.$$

Für $D^2 \leqq 0{,}5$ haben die Kurven ihre Maxima $V_{3m} = 1/(2\,D\,\sqrt{1 - D^2})$ an den Stellen $\eta_m = 1/\sqrt{1 - 2D^2}$, während sie für $D^2 > 0{,}5$ monoton gegen Eins wachsen. Bei kleiner Dämpfung folgt wie im Fall 1: $\eta_m \approx 1$, $V_{3m} \approx 1/2D$.

Die Phasenverschiebung φ hängt nach (5.61) nicht von E ab und ist daher für alle drei Fälle gleich. Sie gibt an, um wieviel der Ausschlag hinter der Erregung nacheilt. Abb. 5.23d zeigt φ als Funktion des Frequenzverhältnisses η. Insbesondere gilt:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \pi/2, \quad \varphi(\eta \to \infty) \to \pi\,.$$

Für kleine Erregerfrequenzen ($\eta \ll 1$) sind Erregung und Ausschlag in Phase ($\varphi \approx 0$), für große Erregerfrequenzen ($\eta \gg 1$) in Gegenphase ($\varphi \approx \pi$). Im Grenzfall $D \to 0$ findet bei $\eta = 1$ ein Sprung des Phasenwinkels φ von 0 nach π statt.

Bewegungsgleichung aufstellen

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = f(t)$$

Division durch „m“

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{1}{m}f(t),$$

Rechte Seite erweitern mit c/c

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}\frac{c}{c}f(t),$$

ω^2

Einsetzen von Eigenfrequenz ω und erweitern links um ω/ ω

$$\ddot{x} + \frac{2\delta}{\omega}\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2\frac{1}{c}f(t),$$

Einführen von Dämpfungsgrad D

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2\frac{1}{c}f(t),$$

Erregung durch Kraft oder Feder

$$f(t) = Fe^{i\Omega t},$$

Ansatz

$$x(t) = Xe^{i\Omega t},$$
$$\dot{x}(t) = i\Omega Xe^{i\Omega t},$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 Xe^{i\Omega t},$$

$$\boxed{(-\Omega^2 + i2D\omega\Omega + \omega^2)\,X = \omega^2\frac{F}{c},}$$

ω

Lsg Ungedämpft

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{-\eta^2 + i2D\eta + 1} = \frac{1}{(1 - \eta^2) + i2D\eta},$$

Erweitern

$$\frac{X}{X_0}=\frac{1}{(1-\eta^2)+i2D\eta}=\frac{1}{(1-\eta^2)+i2D\eta}\frac{(1-\eta^2)-i2D\eta}{(1-\eta^2)-i2D\eta}=\frac{(1-\eta^2)-i2D\eta}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2},$$

Realteil:

$$\frac{X}{X_0}=\frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2},$$

Fall ungedämpft $D=\emptyset$

$\frac{X}{X_0}=\frac{1}{1-\eta^2}$

Imaginärteil: Phasenfrequenzgang

$$\frac{X}{X_0}=-\frac{2D\eta}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2},$$

$\frac{X}{X_0}=\emptyset$

$$\left|\frac{X}{X_0}\right|=\left|\frac{(1-\eta^2)-i2D\eta}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}\right|=\frac{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}}$$

entspricht Gleichung 5.62 im Buch (mit $E=1$).

$$\boxed{\tan\psi=\frac{2D\eta}{1-\eta^2}}$$

$$f(t)=Fe^{i\Omega t}=F(\cos\psi+i\sin\psi)(\cos\Omega t+i\sin\Omega t)=$$
$$=F[(\cos\psi\cos\Omega t-\sin\psi\sin\Omega t)+i(\sin\psi\cos\Omega t+\cos\psi\sin\Omega t)]=$$
$$=F[\cos(\Omega t+\psi)+i\sin(\Omega t+\psi)]$$

$V=\frac{X}{X_0}=\frac{\text{Amplitude des Sys.}}{\text{rev. Amplitude}}$

$\varphi=$ Verzögerung

$0° < \varphi < 180°$; $0 < \varphi < \pi$

$$\varphi = atan \lim_{\eta\to 1}\frac{2D\eta}{1-\eta^2} = \text{atan}\,\frac{2D\eta}{0} = atan\,\infty = \pi = 90°$$

$\frac{\Psi}{\Psi_\emptyset}=V$

statische Antwort

$\Theta\ddot{\Psi}+\underline{da^2}\dot{\Psi}+\underline{ca^2}\Psi=2af(t)$

$\cancel{\Theta\ddot{\Psi}}+\cancel{da^2\dot{\Psi}}+ca^2\Psi=2aF\cancel{e^{i\Omega t}}$

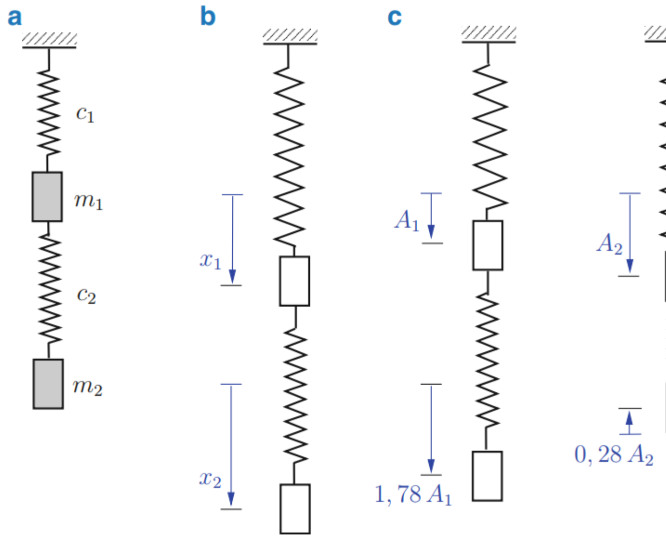
$ca^2\Psi_\emptyset=2aF$

$\Psi_0=\frac{2aF}{ca^2}=\frac{2F}{ca}$

Stationäre Antwort = für den Fall, dass es keine Variable Zeit gibt

$\ddot{x}$ *und* $\dot{x}$ verschwinden weil keine Zeit vorhanden ist.

System mit 2 Freiheitsgraden



$$m_1\,\ddot{x}_1 + c_1\,x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0,$$
$$m_2\,\ddot{x}_2 + c_2\,(x_2 - x_1) = 0$$

Lösungsansatz

$$x_1 = A\cos\omega t, \quad x_2 = C\cos\omega t$$

Eingesetzt (5.66)

$$(c_1 + c_2 - m_1\,\omega^2)A - c_2\,C = 0,$$
$$-c_2\,A + (c_2 - m_2\,\omega^2)\,C = 0$$

Gleichungssystem

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1\,\omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$(c_1 + c_2 - m_1\,\omega^2)(c_2 - m_2\,\omega^2) - c_2^2 = 0$$

oder

$$m_1\,m_2\,\omega^4 - (m_1\,c_2 + m_2\,c_1 + m_2\,c_2)\,\omega^2 + c_1\,c_2 = 0$$

Vietaschen Wurzelsatz oder Mitternachts Formel mit X = ω^2

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = \frac{c_1\,c_2}{m_1\,m_2} > 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{m_1\,c_2 + m_2\,c_1 + m_2\,c_2}{m_1\,m_2} > 0$$

Zwei Eigenfrequenzen so das gilt

$$\omega_2 > \omega_1$$

Einsetzen in 5.66

$$(c_1 + c_2 - m_1\,\omega_1^2)A_1 - c_2\,C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_1 = \frac{C_1}{A_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\,\omega_1^2}{c_2}.$$

$$\mu_2 = \frac{C_2}{A_2} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\,\omega_2^2}{c_2}$$

Oder

Falls $\mu_1 > 0$ Massen schwingen „gleichphasig“

Falls $\mu_2 < 0$ Massen schwingen „gegenphasig“

Lösungsansatz erweitern

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t, \quad x_2 = \mu_1 A_1\cos\omega_1 t$$

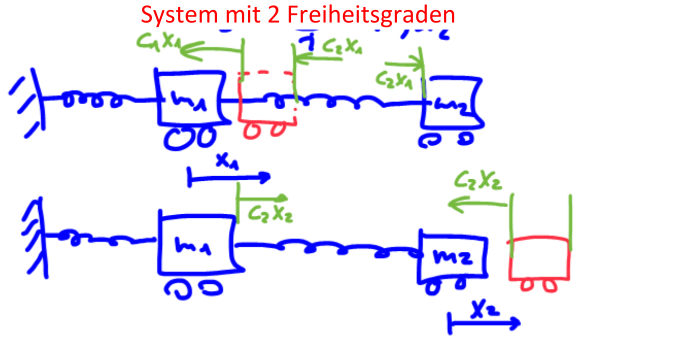
oder

$$x_1 = A_2\cos\omega_2 t, \quad x_2 = \mu_2 A_2\cos\omega_2 t$$

Sinus mit einbeziehen Allgemeine Lösung

$$x_1 = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t,$$
$$x_2 = \mu_1\,A_1\cos\omega_1 t + \mu_1\,B_1\sin\omega_1 t + \mu_2\,A_2\cos\omega_2 t + \mu_2\,B_2\sin\omega_2 t$$

System mit 2 Freiheitsgraden



1. Verschiebung und deren Kräfte je Masse
Kräftepaare nicht vergessen! Eigentlich auch an fester Seite (diese wird jedoch nicht benötigt im Verlauf der Aufgabe)
2. Bestimmen der Bewegungsgleichung je Masse / Freiheitsgrad

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 - c_2x_1 + c_2x_2$$
$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)x_1 - c_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 = +c_2x_1 - c_2x_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 - c_2x_2 = \emptyset$$

3. Trägheitsmatrix und Steifigkeitsmatrix definieren

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

FG: $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{Trägheitsmatrix}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad M\ddot{x} + Cx = \emptyset$$

Ansatz: $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}}^{\text{Amplitude}} \cos(\omega t)$

2. Ableitung des Ansatzes

$$\{\ddot{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2\{x(t)\}$$

3. Berechnen von:

$$(-M\omega^2 + C) \qquad [M]^{-1}\cdot[C]$$

oder

4. Berechnen der Eigenwerte

$$\det(-M\omega^2 + C) = \emptyset$$

Eigenwertsproblem

$$\det(-E\omega^2 + [M]^{-1}[C]) = \emptyset$$

5. Omega bestimmen

5. $\omega_{12} = \pm\sqrt{\lambda_1}$

$\omega_{34} = \pm\sqrt{\lambda_2}$

Eigenwertsproblem, Matlab:

```
[R,lambda] = eig(inv(M)*C))
```

Handrechnung:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}C = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1+c_2)/m_1 & -c_2/m_1 \\ -c_2/m_2 & c_2/m_2 \end{bmatrix}$$

$$det\left[-\omega^2\mathbb{I} + M^{-1}C\right] = det\begin{bmatrix} -\omega^2 + (c_1+c_2)/m_1 & -c_2/m_1 \\ -c_2/m_2 & -\omega^2 + c_2/m_2 \end{bmatrix}$$

$$det\left[-\omega^2\mathbb{I} + M^{-1}C\right] = \left(-\omega^2 + (c_1+c_2)/m_1\right)\left(-\omega^2 + c_2/m_2\right) - \frac{c_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1+c_2}{m_1}\right) + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

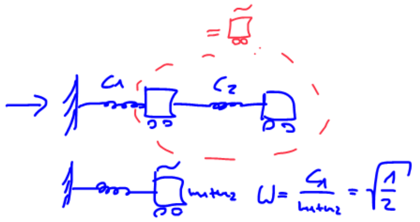
Ersatzmasse durch hohe Steifigkeit

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$m_1 = 1 \quad c_1 = 1$

$m_2 = 1 \quad c_2 = 1000$



Grundgleichung

$$\left[-\omega^2\mathbb{I} + M^{-1}C\right] = \begin{matrix} -\omega^2 + (c_1+c_2)/m_1 & -c_2/m_1 \\ -c_2/m_2 & -\omega^2 + c_2/m_2 \end{matrix}$$

Werte Berechnen

Bsp.

$m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg $\quad c_1 = 2$ N/m, $c_2 = 1$ N/m

Für $\omega = \omega_1 = \sqrt{2}\,RAD/s$:

$$\begin{aligned} -2(\sqrt{2})^2 x_1 + 2x_1 - 1(x_2 - x_1) &= 0 \\ -1(\sqrt{2})^2 x_2 + 1(x_2 - x_1) &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = -x_2$ oder $\quad X_1 = \alpha_1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Für $\omega = \omega_2 = 1/\sqrt{2}\,RAD/s$:

$$\begin{aligned} -2(1/\sqrt{2})^2 x_1 + 2x_1 - 1(x_2 - x_1) &= 0 \\ -1(1/\sqrt{2})^2 x_2 + 1(x_2 - x_1) &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 1/2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1/2 x_2$ oder: $\quad X_2 = \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

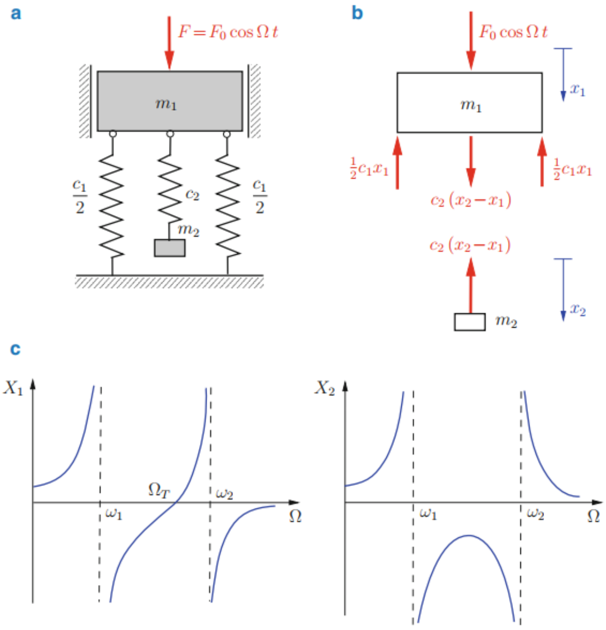
Gleichung:

$$x(t) = \alpha_1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{j\omega_2 t}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Art der Kopplung nicht vom mechanischen System, sondern von der Wahl der Koordinaten abhängt.

Erzwungene Schwingungen n>2 FG

Aufgabe



$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -2\cdot\frac{1}{2}c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) + F_0\cos\Omega t, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

oder Umgeformt

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)x_1 - c_2 x_2 &= F_0\cos\Omega t, \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ansatz

$$x_{1p} = X_1\cos\Omega t, \quad x_{2p} = X_2\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_1 = -\Omega^2 x_1; \qquad \ddot{x}_2 = -\Omega^2 x_2$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} \left[(c_1 + c_2 - m_1\Omega^2)X_1 - c_2 X_2\right]\cos\Omega t &= F_0\cos\Omega t, \\ \left[-c_2 X_1 + (c_2 - m_2\Omega^2)X_2\right]\cos\Omega t &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_1+c_2}{m_1} - \Omega^2\right)X_1 - \frac{c_2}{m_1}X_2 &= \frac{F_0}{m_1}, \\ -\frac{c_2}{m_2}X_1 + \left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega^2\right)X_2 &= 0. \end{aligned}$$

Amplituden:

$$X_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega^2\right)}{\Delta(\Omega)}, \qquad X_2 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\frac{c_2}{m_2}}{\Delta(\Omega)}$$

Koeffizientendeterminante / harakteristische Gleichung

$$\Delta(\omega) = \left(\frac{c_1+c_2}{m_1} - \omega^2\right)\left(\frac{c_2}{m_2} - \omega^2\right) - \frac{c_2^2}{m_1 m_2} = 0.$$

Wobei

$$\Delta(\Omega) = (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$$

Damit werden

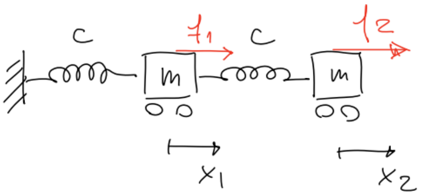
$$X_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\left(\frac{c_2}{m_2} - \Omega^2\right)}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}, \quad X_2 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\frac{c_2}{m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}. \tag{5.90}$$

Die Verläufe der Amplituden X_1 und X_2 sind in Abb. 5.29c in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz Ω qualitativ dargestellt. An den Stellen $\Omega = \omega_1$ und $\Omega = \omega_2$ sind im ungedämpften Fall die Amplituden unbeschränkt (Nenner gleich Null): es gibt *zwei* Resonanzfrequenzen.

Nimmt die Erregerfrequenz Ω den Wert $\Omega_T = \sqrt{c_2/m_2}$ an, so wird $X_1 = 0$. Dann ist die Masse m_1 in Ruhe (*Schwingungstilgung*), und nur die Masse m_2 schwingt. Diesen Effekt kann man ausnutzen, wenn man die Ausschläge der Masse m_1 bzw. die von den Federn auf den Boden übertragenen Kräfte klein halten will. In diesem Fall hängt m_2 an der *ruhenden* Masse m_1. Sie schwingt mit der Eigenfrequenz $\sqrt{c_2/m_2}$, die dann mit der Erregerfrequenz übereinstimmt.

Erzwungene Schwingungen (Righi)

Aufgabe



GL aufstellen

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ freie Schwingungen

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

mit Erregung:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Bewegungsgleichungen aufstellen

$$m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = f_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = f_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Ansatz

$$f_1(t) = F_1 \cos(\Omega t) \qquad f_2(t) = F_2 \cos(\Omega t)$$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t) \; ; \quad \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 x_1(t)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\Omega t) \; ; \quad \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 x_2(t)$$

Einsetzen

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t)$$

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Matrix Invertieren

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 m + 2c & -c \\ -c & -\Omega^2 m + c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-\Omega^2 m + 2c} & -c \; \boxed{*-1} \\ -c \; \boxed{*-1} & \boxed{-\Omega^2 m + c} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\boxed{(-\Omega^2 m + 2c)(-\Omega^2 m + c)} - \boxed{c^2}}\begin{bmatrix} -\Omega^2 m + c & c \\ c & -\Omega^2 m + 2c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Lsg:

OUTPUT

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\Omega) & H_{12}(\Omega) \\ H_{21}(\Omega) & H_{22}(\Omega) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

INPUT

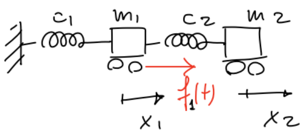
$$H_{11}(\Omega) = \frac{-\Omega^2 m + c}{(-\Omega^2 m + 2c)(-\Omega^2 m + c) - c^2}$$

$$H_{12}(\Omega) = H_{21}(\Omega) = \frac{c}{(-\Omega^2 m + 2c)(-\Omega^2 m + c) - c^2}$$

$$H_{22}(\Omega) = \frac{-\Omega^2 m + 2c}{(-\Omega^2 m + 2c)(-\Omega^2 m + c) - c^2}$$

Wenn Zähler von $H_{XY} = 0$ → entspricht einem Tilger

Wenn Nenner von $H_{XY} = 0$ → Resonanz



$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \; ; \quad f_1(t) = F_1 \cos(\Omega t)$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \{f\}$$ erzwungene Schw.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ freie Schw.

Freie Schwingung mehrere Freiheitsgrade

"Lösung" :

freie Schwingunge :

$$(-\omega^2[M]+[C])\{x\} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\det(-\omega^2[M]+[C]) = \emptyset$$ von Hand oder

[r, lambda] = eig(inv(M)*C) MATLAB

(Modes) Eigenvektoren

Eigenwerte

Erzwungene Schwingungen mehrere Freiheitsgerade

erzwungene Schwingunge :

$$(-\Omega^2[M]+[C])\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_1\\\emptyset\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix} = (-\Omega^2[M]+[C])^{-1}\begin{Bmatrix}F_1\\\emptyset\end{Bmatrix}$$

$$-\Omega^2\begin{bmatrix}m_{11} & 0\\ 0 & m_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix}$$

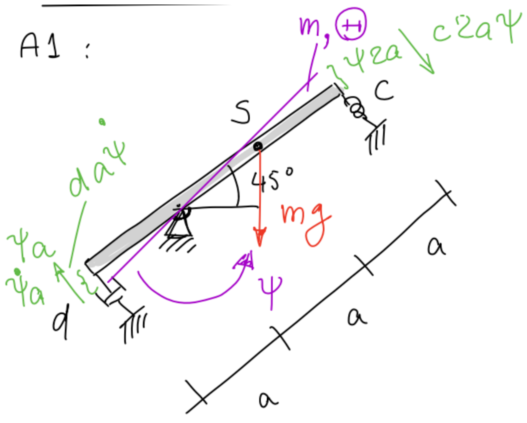
$$\begin{bmatrix}c_{11}-\Omega^2 m_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}-\Omega^2 m_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_{11}-\Omega^2 m_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}-\Omega^2 m_{22}\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(c_{11}-\Omega^2 m_{11})(c_{22}-\Omega^2 m_{22})-c_{12}^2}_{\Delta}}\begin{bmatrix}c_{22}-\Omega^2 m_{22} & -c_{12}\\ -c_{12} & c_{11}-\Omega^2 m_{11}\end{bmatrix}$$

Ohne Gewichtskraft

A1 :



$$\Theta\ddot\psi = -2ac2a\psi - ada\dot\psi$$

$$\Theta\ddot\psi + a^2d\dot\psi + 4a^2c\psi = \emptyset$$

Mit Gewichtskraft

$$-mg\cdot a\cos(45°+\psi)$$

$$-mga\left(\cos 45°\underbrace{\cos\psi}_{\sim 1} - \sin 45°\underbrace{\sin\psi}_{\sim\psi}\right) =$$

$$-mga\left(\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}\cdot\psi\right)$$

$\sin(x\pm y)$	=	$\sin(x)\cdot\cos(y)\pm\cos(x)\cdot\sin(y)$,
$\cos(x\pm y)$	=	$\cos(x)\cdot\cos(y)\mp\sin(x)\cdot\sin(y)$,
$\sin(2x)$	=	$2\sin(x)\cdot\cos(x)$,
$\cos(2x)$	=	$\cos^2(x)-\sin^2(x)$,
$\tan(x\pm y)$	=	$\frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\cdot\tan(y)}$,
$\sin(x)+\sin(y)$	=	$2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
$\sin(x)-\sin(y)$	=	$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
$\cos(x)+\cos(y)$	=	$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
$\cos(x)-\cos(y)$	=	$-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

$$\Theta\ddot\psi = \underbrace{-2ac2a\psi}_{\text{Feder}} \underbrace{-ada\dot\psi}_{\text{Dämpfer}} \underbrace{-mga\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\psi\right)}_{\text{Gewichtskraft}}$$

$$\Theta\ddot\psi + da^2\dot\psi + \underbrace{\left(4a^2c - \frac{\sqrt2}{2}mga\right)}\psi = -mga\frac{\sqrt2}{2}$$

ohne Dämpfung :

$$\Theta\ddot\psi + \left(4a^2c - \frac{\sqrt2}{2}mga\right)\psi = -mga\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{4a^2c - \sqrt2/2\,mga}{\Theta}}$$

$$f_1(t) = ca\Psi(t)$$

$$\boxed{f_1(t) = ca\Psi e^{i\Omega t}}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-