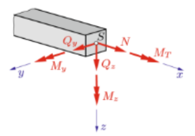
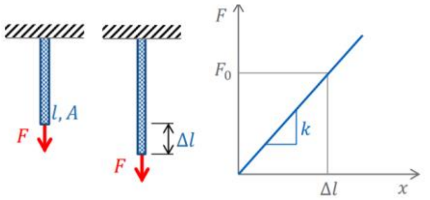


Schnittgrösse		Beanspruchung	Spannung
N	Normalkraft	Zug / Druck + Knickung	σ_x
Q_y, Q_z	Querkräfte	Querkraftbiegung	τ_{xy}, τ_{xz}
M_x	Torsionsmoment	Torsion	$\tau_{x\varphi}$
M_y, M_z	Biegemomente	Biegung (Bernoulli, Timoschenko)	σ_x



$F = k \cdot \Delta l$

$[N] = \left[\frac{N}{mm}\right] \cdot [mm]$

k ... (Struktur-) Steifigkeit

Spannung (Kraftgrösse)

→ Kraft bezogen auf Fläche

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Einheit: Megapascal $1\,MPa = 1\frac{N}{mm^2}$ $\left(1Pa = 1\frac{N}{m^2}\right)$

(Normal-) !

Positive Normalkräfte $N > 0$ (Zugstab)
Negative Normalkräfte $N < 0$ (Druckstab)

Dehnung (kinematische Grösse)

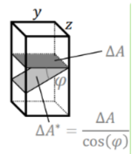
→ Längenänderung bezogen auf Ausgangslänge

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Einheit: einheitenlos $\left[\frac{mm}{mm}\right] = [-]$

$l = l_0$ (Ursprungslänge)
→ *technische Dehnung*

$l = l_{def}$ (deformierte Läng
→ *wahre Dehnung*



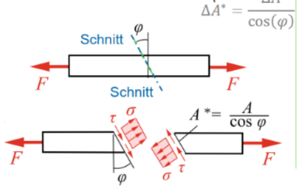
Stoffgesetze

→ Zusammenhang zwischen σ und ε

$$\sigma = E\varepsilon$$

E ... Elastizitätsmodul $[MPa]$ (Materialsteifigkeit)

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$



Normalspannungen

→ Schnittkräfte normal zur Schnittebene

$$\sigma = \frac{N\cos(\varphi)}{A/\cos(\varphi)} = \frac{1}{2}\frac{F}{A}(1+\cos(2\varphi))$$

Prinzip von de Saint-Venant
Spannungsüberhöhungen klingen mit zunehmendem Abstand zur gestörten Geometrie ab (z.B. Biegung: Abklinglänge ~ D)

Schubspannungen

→ Schnittkräfte in der Schnittebene

$$\tau = \frac{N\sin(\varphi)}{A/\cos(\varphi)} = \frac{1}{2}\frac{F}{A}\sin(2\varphi)$$

$$\sigma = E\varepsilon_{el} \qquad \varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E}$$

Hook'sches Gesetz
Elastischen Bereich

Stoffgesetze (Metalle)

- *Totale Dehnung* = elastisch + plastisch + thermisch

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{th} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{pl} + \alpha_{th}\Delta T$$

Plastisches Verhalten ($\sigma > \sigma_P$)

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{tot} - \varepsilon_{el} = \varepsilon_{tot} - \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \qquad \gamma_{xy}(x) = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

für bekannte $u(x)$ → $\varepsilon(x)$ durch Differenzieren
für bekannte $\varepsilon(x)$ → $u(x)$ durch Integrieren

Lokale Verzerrung
u Verschiebung eines Querschnitts

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = -\nu\varepsilon_x$$

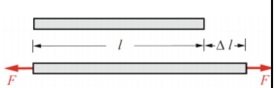
ν (Poissonzahl / Querkontraktionszahl)
(Metalle ν = 0.3)

Dehnungen (Längenänderungen)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Einheit: einheitenlos $\left[\frac{mm}{mm}\right] = [-]$

→ relevante kinematische Grösse für Stab



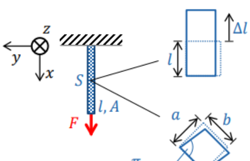
Scherungen (Winkeländerungen)

$$\gamma = \frac{\Delta a}{b} + \frac{\Delta b}{a}$$

Einheit: einheitenlos $\left[\frac{mm}{mm}\right] = [-]$

→ beim Stab für schiefen Schnitt relevant

Verzerrungen (ε, γ)



ahmen:
Stab mit konstantem Querschnitt und Ursprungslänge l
Konstante Beanspruchung entlang Stabachse ($\sigma = const.$)
Kleine Deformationen $|\Delta l| \ll l$, $|\varepsilon| \ll 1$
Für diese Annahmen sind ε und γ entlang der Stabachse konstant

$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$

Zug in x
änderung in y

Material	E in MPa	α_T in 1/°C
Stahl	$2{,}1 \cdot 10^5$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0{,}7 \cdot 10^5$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$
Beton	$0{,}3 \cdot 10^5$	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$
Holz (in Faserrichtung)	$0{,}7 \ldots 2{,}0 \cdot 10^4$	$2{,}2 \ldots 3{,}1 \cdot 10^{-5}$
Gusseisen	$1{,}0 \cdot 10^5$	$0{,}9 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1{,}2 \cdot 10^5$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$
Messing	$1{,}0 \cdot 10^5$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha_{th}\Delta T(x)\right)dx$$

Stabverlängerung

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad \xrightarrow{\int} N(x)$$

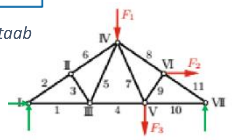
n = 0 → N = const → σ = const

$$\Delta l = \left(\frac{N}{EA} + \alpha_{th}\Delta T\right)l$$

n = 0 → N = const;
EA (Dehnsteifigkeit = const
Isotherme => ΔT = 0

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha_{th}\Delta T(x)$$

Elastizitätsgesetz für den Staab



$f = 2k - (s+r) = 0$

$f = 14 - (11+3) = 0$ ☑

k = Anzahl Knoten
s = Anzahl Stäbe
r = Anzahl Lager-reaktionen

Verschiebungsdifferenzialgleichung für Stab

$$(EAu')' = -n + (EA\alpha_{th}\Delta T)'$$

$$EAu'' = -n$$

EA = const; ΔT = const

Für gegebene EA, n und ΔT können die Verschiebungen eines beliebigen Stabquerschnitts berechnet werden (Integration) → Integrationskonstanten aus:

- *Verschiebungs-Randbedingungen*: Einspannung bei x_A → $u(x_A) = 0$
- *Kraft-Randbedingung*: Einzelkraft F_0 bei x_B → $u'(x_B) = \frac{N}{EA} + \alpha_{th}\Delta T$ wobei $N = F_0$; unbelastet $F_0 = \Delta T = 0$ → $u'(x_B) = 0$
- *Nicht-stetige Grössen* (A, E, ΔT, F) Bereichsweise Lösung → *Übergangsbedingungen*

Berechnung der Stabverlängerung (Einzelstab)

- **Statisch bestimmte Probleme**
  1. Gleichgewicht am inneren Freischnitt
     → Normalkraft $N(x)$
  2. Berechnung der Spannung
     → $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$
  3. Elastizitätsgesetz liefert Dehnung
     → $\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$
  4. Integration der Dehnung liefert Verschiebung
     → $u(x) = u(0) + \int_0^x \varepsilon(x)dx$
  5. Stabverlängerung
     → $\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \left(\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha_{th}\Delta T(x)\right)dx$ oder $(EAu')' = -n + (EA\alpha_{th}\Delta T)'$

  Optional (je nachdem, was gesucht)

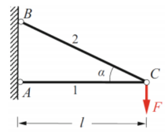
  → Temperaturänderungen verursachen nur **Wärmedehnungen, keine Spannungen!**

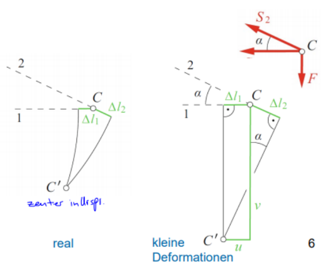
- **Statisch unbestimmte Probleme**
  → Normalkräfte können nicht aus dem Gleichgewicht bestimmt werden (zu wenig Gleichungen)
  → Zur Lösung müssen die Deformationen berücksichtigt werden. Dazu müssen Gleichgewicht, kinematische Beziehungen und Elastizitätsgesetz gleichzeitig erfüllt werden
  → Temperaturänderungen verursachen Spannungen (**Wärmespannungen**)
  → Vorgehen: siehe Stabsysteme

Statisch bestimmte Stabsysteme

- Vorgehen (für einfache Systeme)
  1. Gleichgewicht am unverformten System (Knotengleichgewicht, Ritter Verfahren)
     → Stabkräfte S_i = Normalkraft N_i
     → Annahme: kleine Deformationen
  2. Berechnung der Spannung im Stab i
     → $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$
  3. Elastizitätsgesetz liefert Dehnung im Stab i
     → $\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i}$
  4. Stabverlängerung / -verkürzung
     → $\Delta l_i = \left(\frac{S_i}{E_iA_i} + \alpha_{th,i}\Delta T_i\right)l_i$ Annahme: $E_i, A_i, \alpha_{th,i}, S_i, \Delta T_i = const.$ entlang x
     → entspricht Verschiebungen einzelner Knoten in Stabrichtung
  5. Verschiebungsplan

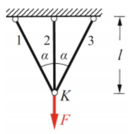
  Optional





Statisch unbestimmte Stabsysteme

Vorgehen 1 – Verschiebungskompatibilität

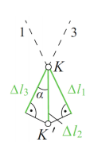


- *n-fach statisch unbestimmt*
  - zu wenige Gleichgewichtsbedingungen, um alle Stabkräfte zu bestimmen
  - gleichzeitige Betrachtung aller Grundgleichungen (Gleichgewicht, Elastizitätsgesetz, Kompatibilität der Verformung)

1. *Gleichgewicht* am unverformten System (Knotengleichgewicht, Ritter Verfahren)
   → Annahme: kleine Deformationen
2. Berechnung der *Stabdeformation* in Abhängigkeit der unbekannten Stabkräfte S_i
   $\Delta l_i = \left(\frac{S_i}{E_iA_i} + \alpha_{th,i}\Delta T_i\right)l_i$ Annahme: $E_i, A_i, \alpha_{th,i}, S_i, \Delta T_i = const.$ entlang x
3. Erstellen eines *Verschiebungsplans* (graphisch)
4. Aufstellen von n *Verträglichkeitsbedingung* (*Kompatibilität* der Stabdeformationen)
5. Auflösen der Gleichungen nach unbekannten *Stabkräften und Knotenverschiebungen*

Knotengleichgewicht

Verschiebungsplan



1) Freischnitt
→: $-S_1 \sin\alpha + S_3 \sin\alpha = 0$
↑: $S_2 + (S_1 + S_2)\cos\alpha - F = 0$
⇒ $S_1 = S_3 = \frac{F - S_2}{2\cos\alpha}$
2) $\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{S_1 l_1}{EA_1}$ $\Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EA_2}$
4) kompbed: KB
$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos\alpha$
5) Aufl.
$S_2 = \frac{F}{1 + 2\frac{EA_1}{EA_2}\cos^3\alpha}$ $S_1 = S_3 = \frac{EA_1/EA_2 \cdot \cos^2\alpha\, F}{1 + 2\,EA_1/EA_2 \cos^3(\alpha)}$

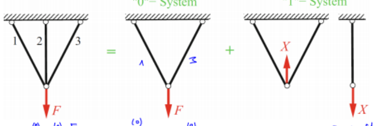
➢ Ebene Tragwerke $f = 3 - r = 0$
f>0 --> unterbestimmt
f<0 --> überbestimmt
➢ Räumliche Tragwerke $f = 6 - r = 0$
➢ Mehrteilige Tragwerke $f = 3n - (r + z) = 0$
(n Teilkörper, z Verbindungselemente)

Notwendige Bedingung

Statisch unbestimmte Stabsysteme

Vorgehen 2 – Superposition

- n-fach statisch unbestimmt
  - $k = 0 \div n$ … Ersatzsystem
  - $i = 1 \div$ Anzahl Stäbe … Stabindex



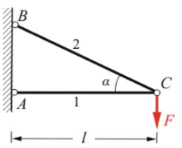
1. Rückführung auf statisch bestimmte Systeme durch *Entfernen* von n *Stäben*
   → *0-System:* hier wirkt nur äussere Kraft F
   → *k-System:* hier wirken jeweils nur die n statisch unbestimmten Stabkräfte S_i als X_i
2. *Gleichgewicht* an jedem System
   → Stabkräfte $S_i^{(k)}$ in Abhängigkeit von F oder X_i
3. Berechnung der *Stabdeformation* $\Delta l_i^{(k)}$ in Abhängigkeit von F oder X_i

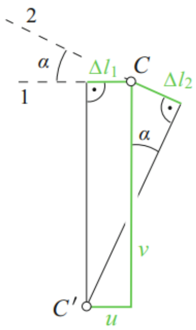
$$\Delta l_i^{(k)} = \left(\frac{S_i^{(k)}}{E_i A_i} + \alpha_{th,i}\Delta T_i^{(k)}\right) l_i$$

Annahme: $E_i, A_i, \alpha_{th,i}, S_i, \Delta T_i = const.$ entlang x

4. *Superposition* der Verschiebungen und Stabkräfte
5. Erstellen eines *Verschiebungsplans* (graphisch)
6. Aufstellen der n *Verträglichkeitsbedingung* (Kompatibilität der Stabdeformationen)
7. Auflösen der Gleichungen nach unbekannten *Stabkräften und Knotenverschiebungen*

10





$$u = |\Delta l_1| = \frac{F\,l}{EA}\frac{1}{\tan\alpha},$$

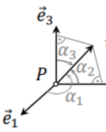
$$v = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} + \frac{u}{\tan\alpha} = \frac{F\,l}{EA}\frac{1+\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

Tensoren

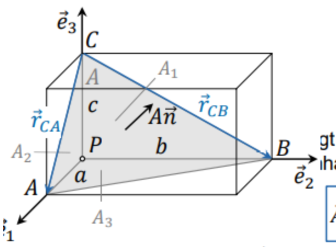
Rotation um den Winkel φ	Rotation um den Winkel φ	Rotation um den Winkel φ
Nicht gültig		

Es gilt wegen $|\vec{n}| = 1$: $\quad cos^2(\alpha_1) + cos^2(\alpha_2) + cos^2(\alpha_3) = 1$

d.h. *nur zwei Winkel sind frei wählbar.*



$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha_1)\\ \cos(\alpha_2)\\ \cos(\alpha_3)\end{pmatrix}$$



$\vec{A}_n = A\vec{n}$

$\vec{A}_n = \frac{1}{2}(\vec{r}_{CA} \times \vec{r}_{CB})$

$\vec{A}_1 = -\frac{1}{2}cb\vec{e}_1 = -A_1\vec{e}_1 \qquad \vec{A}_2 = -\frac{1}{2}ac\vec{e}_2 = -A_2\vec{e}_2 \qquad \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}ab\vec{e}_3 = -A_3\vec{e}_3$

$A_i = \vec{A}_n \cdot \vec{e}_i$

7

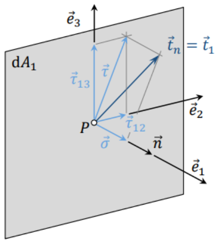
Beispiel: $\vec{A}_n \cdot \vec{e}_1 = A\vec{n} \cdot \vec{e}_1 = A_1 = A\cos(\alpha_1)$

$$\vec{t}_n = \lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta\vec{F}_R}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_R}{dA} \qquad [t_n] = \frac{N}{mm^2}$$

$$\vec{\mu}_n = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{M}_R}{\Delta A} = 0$$

$\vec{\sigma} = (\vec{t}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = \sigma\,\vec{n} = \sigma_{11}\vec{n}$

$\vec{t}_1 = \begin{pmatrix}\sigma\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\end{pmatrix}$



$\vec{\tau} = \vec{t}_n - \vec{\sigma} \qquad \tau = \sqrt{\vec{t}_n^2 - \vec{\sigma}^2} = \sqrt{\vec{t}_n\cdot\vec{t}_n - \vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}}$

$\vec{\tau}_{n2} = (\vec{\tau}\cdot\vec{e}_2)\,\vec{e}_2 = \tau_{n2}\,\vec{e}_2$

$\vec{\tau}_{n3} = (\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3)\,\vec{e}_3 = \tau_{n3}\,\vec{e}_3$

6

1. Index:	Richtung der *Schnittnormalen*
2. Index:	*Wirkrichtung* der Spannungskomponente

+ Spannungen zeigen an + Schnittufer in + Richtung
+ Spannungen zeigen an – Schnittufer in – Richtung

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\vec{t}_1^T\\ \vec{t}_2^T\\ \vec{t}_3^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix} = \sigma_{ik}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T\vec{n} = \vec{t}_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ik}n_i = t_{nk}$$

Formel von Cauchy

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}p&0&0\\0&p&0\\0&0&p\end{pmatrix}$

p… Hydrostatischer Druck

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1&\sigma_1&0\\\sigma_1&\sigma_1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

mit $\sigma_1 = \frac{N}{A}$, $N = F$ — für 45°-Schnitt

Einachsiger Spannungszustand Zug / Druck

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

mit $\sigma_1(x_1, x_2) = -\frac{M(x_1)}{I}x_2$

$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$

Einfache Biegung

ESZ dünnwandige Struktur

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}&\tau_{12}&0\\\tau_{21}&\sigma_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\sigma_{33}, \tau_{31}, \tau_{32} \ll \sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$

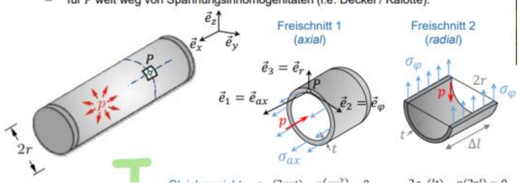
ESZ Torsion

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}0&\tau_{12}&0\\\tau_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix}\sigma_1&0&0\\0&-\sigma_1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

mit $\tau_{12}(x_1, x_3) = -\frac{M_T(x_1)}{I_T}x_3$ — 45° Schnitt mit $\sigma_1 = \tau_{12}$

Falls Kugelkessel:
δ Phi wird gleich δ Ax
$\varepsilon_{Kugel} = \Delta r / r_0$

- dünnwandig: $t \ll r$ ($r > 5t$) → $\sigma_r \ll \sigma_\varphi, \sigma_{ax}$
- für P weit weg von Spannungsinhomogenitäten (i.e. Deckel / Kalotte).



ESZ dünnwandiger Kessel

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{ax}&0&0\\0&\sigma_\varphi&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Gleichgewicht $\quad \sigma_{ax}(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0 \qquad 2\sigma_\varphi(lt) - p(2rl) = 0$

Axialspannung $\quad \sigma_{ax} = \frac{1}{2}\frac{R}{t}p \qquad \sigma_\varphi = \frac{R}{t}p = 2\,\sigma_{ax}$ *Umfangsspa*

Beispiel

1. Rotation um den Winkel γ um die z-Achse
2. Rotation um den Winkel β um die mitrotierte y'-Achse

$\} \quad R_{y'}(\beta)\cdot R_z(\gamma)$

Nun gilt aber: $\quad R_{y'}(\beta)\cdot R_z(\gamma) = R_z(\gamma)\cdot R_y(\beta)$

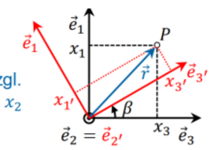
Entsprechendes gilt bei mehreren verketteten Rotationen um mitrotierte Achsen: Die Rotationsmatrizen werden in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben, d.h. die Matrix für die letzte Rotation steht ganz rechts; dafür ‚vergisst' man, dass die Rotationsachse mitrotiert worden ist.

${}^{KI}\mathbf{R}^T = {}^{KI}\mathbf{R}^{-1}$

${}^{KI}\mathbf{R}^T\,{}^{KI}\mathbf{R} = \mathbf{E}$

${}^{KI}\mathbf{R}^T = {}^{IK}\mathbf{R}$

β positiv bzgl. Drehachse x_2 von $I \to K$



${}^{KI}\mathbf{R}^T\,{}^{KI}\mathbf{R} = \mathbf{a}^T\,\mathbf{a} = \mathbf{E}$

${}^{K}\vec{r} = {}^{KI}\mathbf{R}\;{}^{I}\vec{r}$

${}^{I}\vec{r} = {}^{IK}\mathbf{R}\;{}^{K}\vec{r} = {}^{KI}\mathbf{R}^T\;{}^{K}\vec{r}$

Rotationsmatrizen für Koordinatentransformationen von $I \to K$

Rotation um x_3 *mit* γ	Rotation um x_2 *mit* β	Rotation um x_1 *mit* α
${}^{KI}\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix}\cos(\gamma)&\sin(\gamma)&0\\-\sin(\gamma)&\cos(\gamma)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	${}^{KI}\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix}\cos(\beta)&0&-\sin(\beta)\\0&1&0\\\sin(\beta)&0&\cos(\beta)\end{pmatrix}$	${}^{KI}\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&\sin(\alpha)\\0&-\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Rotationsmatrizen für Koordinatentransformationen von $K \to I$

Rotation um x_3 *mit* γ	Rotation um x_2 *mit* β	Rotation um x_1 *mit* α
${}^{IK}\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix}\cos(\gamma)&-\sin(\gamma)&0\\\sin(\gamma)&\cos(\gamma)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	${}^{IK}\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix}\cos(\beta)&0&\sin(\beta)\\0&1&0\\-\sin(\beta)&0&\cos(\beta)\end{pmatrix}$	${}^{IK}\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\0&\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Eine physikalische Grösse, die sich durch eine 3×3 Matrix $\boldsymbol{\sigma}$ darstellen lässt und sich mit einer *orthogonalen Matrix* $\boldsymbol{a}$ für die gilt

$\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{a}^{-1}$ sowie $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \mathbf{E}$ mit $\det\boldsymbol{a} = +1$

gemäss

${}^{K}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{a}\;{}^{I}\boldsymbol{\sigma}\;\mathbf{a}^T$

transfomieren lässt, heisst *Tensor 2. Stufe*.

${}^{K}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}_3\;{}^{I}\boldsymbol{\sigma}\;\mathbf{a}_3^T$

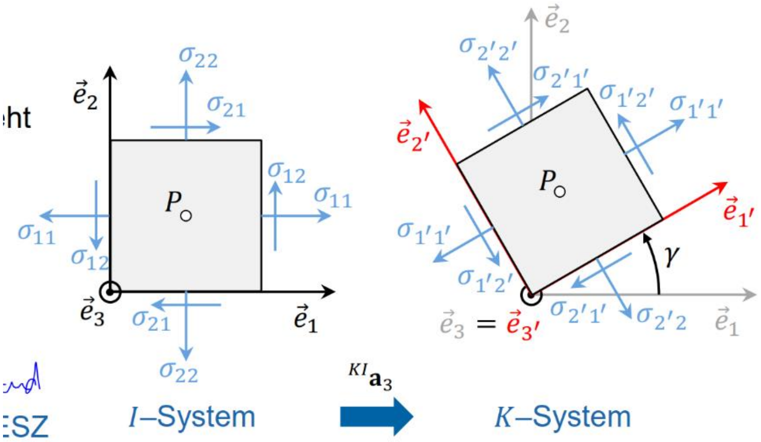
Ebener Spannungszustand

Transformationsbeziehung für ESZ

$$\sigma_{1'1'} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\cos(2\gamma) + \sigma_{12}\sin(2\gamma)$$

$$\sigma_{2'2'} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\cos(2\gamma) - \sigma_{12}\sin(2\gamma)$$

$$\sigma_{1'2'} = \sigma_{2'1'} = \quad -\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\sin(2\gamma) + \sigma_{12}\cos(2\gamma)$$



Hauptrichtung (Winkel extremaler Normalspannung)

$$\tan(2\gamma^*) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

Hauptspannung (extremale Normalspannung)

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Welcher Winkel gehört zu welcher Hauptspannung?

1) Berechne die Hauptrichtung γ^*
2) Berechne die Hauptspannungen $\sigma_{1,2}$
3) Setze γ^* in die Transformationsgleichungen ein

Fall 1: $\sigma_{1'1'}(\gamma^*) = \sigma_1$
→ γ^* gehört zu σ_1,
γ^* dreht $\vec{e}_1$ *in Richtung max. Spannung*
→ $\gamma^* + \frac{\pi}{2}$ gehört zu σ_2

Fall 2: $\sigma_{1'1'}(\gamma^*) = \sigma_2$
→ γ^* gehört zu σ_2
γ^* dreht $\vec{e}_1$ *in Richtung min. Spannung*
→ $\gamma^* + \frac{\pi}{2}$ gehört zu σ_1

Hauptschubspannungsrichtung (Winkel extremaler Schubspannung)

$$\tan(2\gamma^{**}) = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \quad \rightarrow \quad \gamma^{**} = \gamma^* + \frac{\pi}{4}$$

Hauptschubspannung (extremale Schubspannung) | Mittelspannung

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad \sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Eigenwertproblem

$$^*\mathbf{R} = {}^*\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} {}^I\vec{e}_{1^*}^{\,T} \\ {}^I\vec{e}_{2^*}^{\,T} \\ {}^I\vec{e}_{3^*}^{\,T} \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{a}\ {}^I\boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{a}^T) = {}^*\boldsymbol{\sigma} \quad \text{mit} \quad \sigma_{i^*i^*} = \sigma_i,\ \sigma_{i^*j^*} = 0 \text{ (Diagonalform)}$$

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\,\mathbf{E}) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Invarianten

$\boxed{\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0}$ *Charakteristisches Polynom* $\qquad I_i$ … Invarianten von $\boldsymbol{\sigma}$

Durch Rückeinsetzen der Eigenwerte in die Eigenwertgleichung $^I(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\,\mathbf{E})\ {}^I\vec{n}_* = 0$ erhält man einen Eigenvektor $^I\vec{n}_{i^*}$ (= *Hauptrichtung*) für jeden Eigenwert σ_i (= *Hauptspannung*)

hschule

atensystem $\boldsymbol{\sigma}$ beschrieben wird

Invarianten von $\boldsymbol{\sigma}$

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

1. *Invariante*
 = Spur von $\boldsymbol{\sigma}$ ($\propto$ hydrost. Spannung)
2. *Invariante*
 = Summe der Unterdeterminanten
3. Invariante
 = Determinante von $\boldsymbol{\sigma}$

hschule

Mohr'scher Spannungskreis

$$(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$\sigma_M = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} \qquad R^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2$$

Mittelpunkt *Radius*

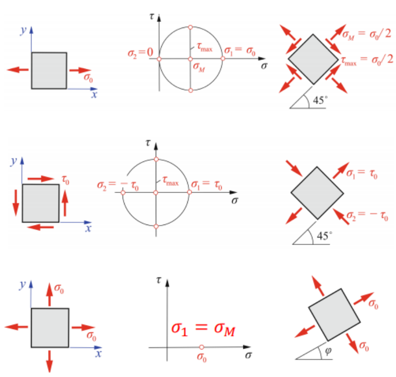
→ *Kreisgleichung in* (σ, τ) – *Ebene mit Mittelpunkt* σ_M *und Radius* R

→ *Der Radius* R *ist unabhängig vom Koordinatensystem, i.e. eine Invariante* $R^2 = \frac{1}{4}(I_1^2 + 4I_2)$

Mohr'scher Kreis – Formeln (ESZ) $\sigma_3 = 0$

- *Kreisradius* $\qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$
- *Kreismittelpunkt* $\qquad \sigma_M = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$
- *Hauptspannungen* $\qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm R = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2}$
- *Maximale Schubspannung* $\qquad \tau_{max} = \pm R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2}$

Mohr'scher Kreis für spezielle Spannungszustände



Einachsiger Zug
- $\sigma_{11} = \sigma_0 \quad \sigma_{22} = 0 \quad \tau_{12} = 0$
- *Hauptschubspannung:* $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ mit $\sigma_M = \frac{\sigma_0}{2}$
- *Hauptrichtung:* $\gamma^{**} = 45°$

Reiner Schub
- $\sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = 0 \quad \tau_{12} = \tau_0$
- *Hauptspannung:* $\sigma_1 = \tau_0$ mit $\sigma_2 = -\tau_0$
 Hauptrichtung: $\gamma^* = 45°$

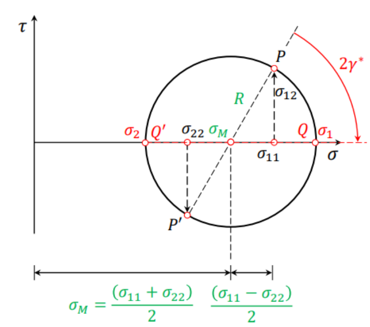
Hydrostatischer Spannungszustand
- $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 \quad \tau_{xy} = 0$
- MOHRscher Kreis entartet zu Punkt
- Bel. Drehung bringt immer gleichen SZ (*invariant*) 13

Vorgehen
1. Zeichne (σ, τ) – Ebene (ggbf. mit Massstab)
2. Trage Normalspannungen σ_{11} und σ_{22} auf σ-Achse auf (Vorzeichen!)
3. Schubspannungen σ_{12} einzeichnen
 → vorzeichenrichtig über σ_{11}
 → umgekehrtes Vorzeichen über σ_{22}
 → P und P' auf Kreis einzeichnen
4. Kreismittelpunkt σ_M einzeichnen
 → Schnittpunkt von $\overline{PP'}$ mit σ-Achse liefert σ_M, R

→ P beschreibt den Spannungszustand im Schnitt durch einen Punkt, in welchem σ_{11} und σ_{12} wirken
→ P' beschreibt den Spannungszustand im dazu um 90° gedrehten Schnitt im selben Punkt. Es wirken σ_{22} und σ_{12}.

7

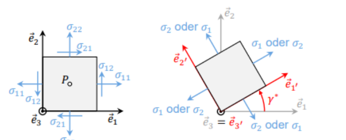
Hauptspannungen mit Mohr'schem Spannungskreis



Vorgehen

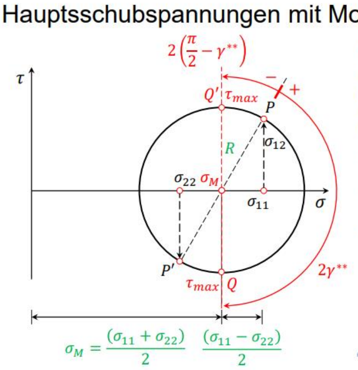
Mit dem Mohr'schen Spannungskreis lassen sich die Drehwinkel γ^* (Hauptrichtung) und die Hauptspannungen $\sigma_{1,2}$ graphisch ermitteln.

→ Winkel zwischen P und der σ – Achse (i.e. $\tau = 0$) in der Mohr'schen (σ, τ) – Ebene entspricht $2\gamma^*$
→ Wird im Mohr'schen Kreis im Uhrzeigersinn um $2\gamma^*$ gedreht (heisst positiv), so muss der Schnitt im materiellen Punkt im Gegenuhrzeigersinn (d.h. ebenfalls positiv) um γ^* gedreht werden!



9

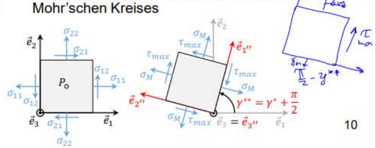
Hauptsschubspannungen mit Mohr'schem Spannungskreis 1



Vorgehen

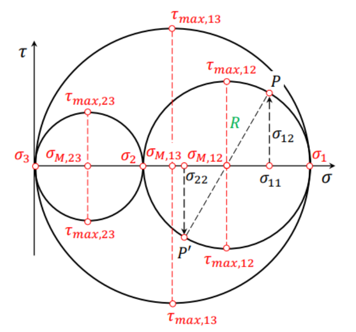
Mit dem Mohr'schen Spannungskreis lassen sich auch die Drehwinkel γ^{**} (*Hauptschubspannungsrichtung*) sowie die Hauptschubspannungen τ_{max} und Mittelspannung σ_M graphisch ermitteln.

→ Winkel zwischen P und Q in der Mohr'schen (σ, τ) – Ebene entspricht $2\gamma^{**}$ (*positive Drehung*)
→ Der Winkel zwischen P und der Q' entspricht $2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma^{**}\right)$ (*negative Drehung*) und ist äquivalent.
→ Die *Hauptschubspannung* τ_{max} entspricht dem *Radius*, die *Mittelspannung* σ_M dem *Mittelpunkt* des Mohr'schen Kreises



10

Mohr'scher Kreis für räumlichen Spannungskreis

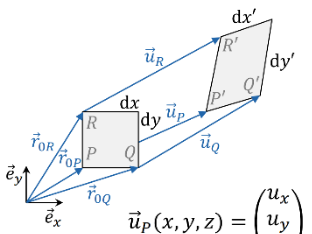


Vorsicht

Im Ebenen Spannungszustand ist eine Hauptspannung immer Null. Somit ergibt sich aus der alleinigen Analyse der Hauptspannungen $\sigma_{1,2}$ nicht die absolut maximalen Schubspannungen. Hierzu muss $\sigma_3 = 0$ berücksichtigt werden.

→ Für einen *räumlichen Spannungszustand* ergeben sich drei Mohr'sche Kreise
→ Dies muss vor allem dann berücksichtigt werden, wenn $\sigma_{1,2} > 0$ (sonst nicht konservativ)
→ Es ergeben sich so drei Hauptschubspannungen (hier: $\tau_{max,13} > \tau_{max,12} > \tau_{max,23}$ mit den dazugehörigen Mittelspannungen)
→ Die Winkel, welche für die einzelnen Hauptschubspannungen bestimmt werden, gelten für Drehungen aus der 13–, 12 – bzw. 23 –Hauptnormalspannungsebene

Ebener Verzerrungszustand (EVZ) / Verzerrungstensor



$$\vec{u}_P(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$$

$$^K\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}\ {}^I\boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{a}^T \quad \Leftrightarrow \quad {}^K\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\ {}^I\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{a}^T$$

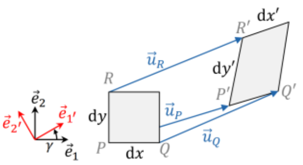
Dehnungen / **Scherungen**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\varepsilon_{xz}$$

- Ebener Verzerrungszustand (EVZ)
  - → Verschiebungen im I $(x_1\ x_2\ x_3)$ System: $u_1, u_2 \ \rightarrow \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$
  - → Verschiebungen im K $(x_{1'}\ x_{2'}\ x_{3'})$ System: $u_{1'}, u_{2'} \ \rightarrow \varepsilon_{1'1'}, \varepsilon_{2'2'}, \varepsilon_{1'2'}$



Transformationsbeziehung (EVZ)

$$\varepsilon_{1'1'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos(2\gamma) + \varepsilon_{12}\sin(2\gamma)$$

$$\varepsilon_{2'2'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos(2\gamma) - \varepsilon_{12}\sin(2\gamma)$$

$$\varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_{2'1'} = \quad -\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin(2\gamma) + \varepsilon_{12}\cos(2\gamma)$$

Hauptdehnungen

– *Maximale / minimale Dehnung*
(keine Scherung, nur Vergrösserung der Fläche)

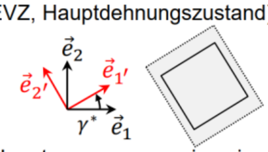
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

– *Hauptdehnungsrichtung*

$$\tan(2\gamma^*) = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}$$

– *Verzerrungstensor* (EVZ, Hauptdehnungszustand)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



→ Hauptdehnungen & Hauptspannungen zeigen in gleiche Richtung (gilt nur für isotrope, elastische Materialien!!)

→ Reine Vergrösserung der Fläche entlang Hauptrichtung

Hauptscherungen

– *Maximale / minimale Scherung*
(Formänderung + zusätzliche isotrope Dehnung ε_M)

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2} = \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

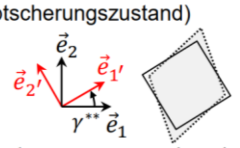
$$\varepsilon_M = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$$

– *Hauptscherungsrichtungen*

$$\tan(2\gamma^{**}) = -\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2\varepsilon_{12}} \quad \rightarrow \quad \gamma^{**} = \gamma^* + \frac{\pi}{4}$$

– *Verzerrungstensor* (EVZ, Hauptscherungszustand)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_M & 1/2\,\gamma_{max} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{max} & \varepsilon_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

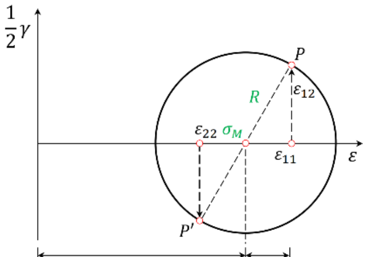


→ Hauptscherungen & Hauptschubspannungen zeigen in gleiche Richtung (isotrope, elastische Materialien!!)

→ Formänderung + gleichmässige Vergrösserung d. Fläche

Mohr'scher Verzerrungskreis

Analog zum Mohr'schen Spannungskreis



$$\varepsilon_M = \frac{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{2} \qquad \frac{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})}{2}$$

$$(\varepsilon - \varepsilon_M)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2 = R^2$$

$$\varepsilon_M = \frac{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{2} \qquad R^2 = \left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2$$

Vorgehen

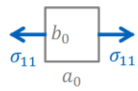
1. Zeichne $\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\gamma\right)$ – Ebene
2. Trage Dehnungen ε_{11} und ε_{22} auf ε-Achse auf (Vorzeichen!)
3. Scherungen ε_{12} einzeichnen
   → vorzeichenrichtig über ε_{11}
   → umgekehrtes Vorzeichen über ε_{22}
   → P und P' auf Kreis einzeichnen
4. Kreismittelpunkt ε_M einzeichnen
   → Schnittpunkt von $\overline{PP'}$ mit ε-Achse liefert ε_M, R

→ P beschreibt den Verzerrungszustand im Schnitt durch einen Punkt, in welchem ε_{11} und ε_{12} wirken

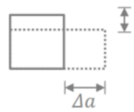
→ P' beschreibt den Verzerrungszustand im dazu um 90° gedrehten Schnitt im selben Punkt. Es wirken ε_{22} und ε_{12}.

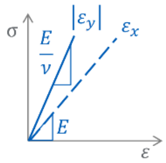
1

Gerader Schnitt
Hauptrichtung ($\gamma = 0°$)



Verzerrung





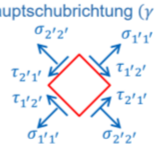
Materialparameter { E ... Elastizitätsmodul [MPa]; ν ... Poissonzahl ($-1 < \nu < 0.5$) [-]

Längsdehnung / *Querdehnungen*

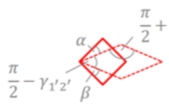
$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} \qquad \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

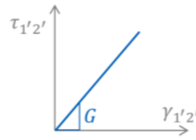
$$\varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

Schiefer Schnitt
Hauptschubrichtung ($\gamma = 45°$)



Verzerrung





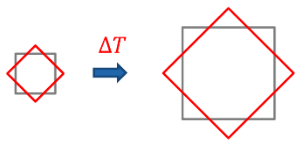
Materialparameter { G ... Schubmodul [MPa]; isotrop, elast. Material: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

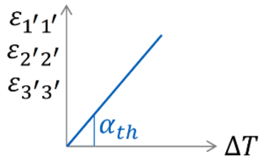
Zürcher Fachhochschule

Scherungen

$$\gamma_{1'2'} = 2\varepsilon_{1'2'} = \frac{1}{G}\sigma_{1'2'} \qquad \gamma_{1'3'} = 2\varepsilon_{1'3'} = \frac{1}{G}\sigma_{1'3'}$$

$$\gamma_{2'3'} = 2\varepsilon_{2'3'} = \frac{1}{G}\sigma_{2'3'}$$





Thermische Dehnungen

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha_{th}\Delta T$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right) + \alpha\Delta T \qquad \gamma_{12} = \frac{1}{G}\tau_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})\right) + \alpha\Delta T \qquad \gamma_{23} = \frac{1}{G}\tau_{23}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right) + \alpha\Delta T \qquad \gamma_{13} = \frac{1}{G}\tau_{13}$$

Gamma in Radiant

Normalspannungen → Längen-, Flächen-, Volumenänderungen

Temperaturänderung → Volumenänderungen

Schubspannungen → Gestaltänderung (Winkel)

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_2), \qquad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_1)$$

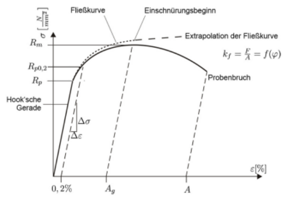
Hauptdehnungen und Hauptspannungen verwenden; falls kein EVZ ε_{33} berechnen
Falls a d T vorhanden, 2mal a d T!, Gleichung 1) + v2) umstellen auf Sigma x/y/z

Vorgehen Dehnmessstreifen

1. Koordinatensystem Vergeben
2. Transformationsbeziehungen
3. Fehlende Grössen berechnen
4. Haupt Dehnung berechnen
5. Haupt Richtung y* bestimmen
6. Kontrolle durch Einsetzen
7. Skizze der Verzerrung
8. Hauptspannungen ermitteln (E, v gegeben)
9. Mohrscherspannungskreis /Mohrscherverzerrungskreis

Festigkeitshypothesen

- Versagen eines Stabes (Zugversuch → einachsiger Spannungszustand) kann definiert werden bezüglich
  - → *Plastifizierung* $\sigma < \sigma_{zul} = \frac{R_{p0.2}}{SF_1}$
  - → *Bruch* $\sigma < \sigma_{zul} = \frac{R_m}{SF_2}$



- Im Allgemeinen herrscht in einem Bauteil aber ein räumlicher Spannungszustand
  - → Wie muss Versagen ermittelt werden?
- *Festigkeitshypothesen*
  - Berechnungsvorschrift für eine *Vergleichsspannung* σ_V
  - Beanspruchung im Bauteil durch σ_V charakterisiert
    - → kann mit *Zugversuch* verglichen werden
  - vom Material abhängig

Normalspannungshypothese

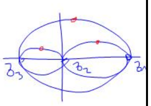
- *Annahme:* grösste Hauptspannung für Versagen verantwortlich
- *Anwendung:* spröde Werkstoffe (z.B. Keramik, Grauguss), stossende Belastung
- *Versagen:* Bruchfläche senkrecht zur Hauptspannung

$$\boxed{\sigma_V = \sigma_1}$$

Normalspannungshypothese

Schubspannungshypothese (Tresca)

- *Annahme:* grösste Schubspannung für Versagen verantwortlich
  - → Zugstab: $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_1$
  - → ESZ: $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$



- *Anwendung:* duktile Werkstoffe (z.B. Metalle), einfache Handrechnung, bis zu 15% konservativer als vonMises
- *Versagen:* Bruchfläche 45° zur Hauptspannung

$$\boxed{\sigma_V = 2\tau_{max} = max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) = \underbrace{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_{12}^2}}_{\text{ESZ}}}$$

Schubspannungshypothese

Gestaltänderungshypothese (vonMises)

- *Annahme:* Versagen durch Energie, welche Gestaltänderung bewirkt
- *Anwendung:* duktile Werkstoffe (z.B. Metalle), einfache Handrechnung, generell weniger konservativ als Tresca, z.B. für Alu experimentell besser belegt
- *Versagen:* Bruchfläche 45° zur Hauptspannung

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)} = \overbrace{\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2}}^{\text{ESZ}}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)\right]}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$ $\sigma_{1,2,3}$ = Hauptspannungen

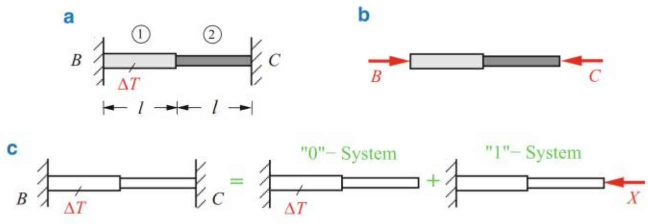
Gestaltänderungshypothese

$$\rightarrow: \quad B - C = 0\,.$$

Daher müssen wir die Verformungen in die Rechnung einbeziehen. Für die Längenänderungen in den beiden Teilbereichen ① und ② gilt nach (1.16) mit der konstanten Normalkraft $N = -B = -C$:

$$\Delta l_1 = \frac{N\,l}{EA_1} + \alpha_T \Delta T\, l\,, \quad \Delta l_2 = \frac{N\,l}{EA_2}$$

(der Stab wird im Bereich ② nicht erwärmt).



$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0\,.$$

Eine solche Bedingung wird auch *Verträglichkeitsbedingung* (*Kompatibilitätsbedingung*) genannt. Einsetzen ergibt

$$\frac{N\,l}{EA_1} + \alpha_T \Delta T\, l + \frac{N\,l}{EA_2} = 0 \quad \rightarrow \quad B = C = -N = \frac{\overset{L}{\cancel{EA_1A_2}}\,\alpha_T \Delta T}{A_1 + A_2}\,.$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-