

Biegung

Spannungsverteilung und Schnittmoment

Reine Biegung

- Querkraft und Schubspannung vernachlässigbar ($Q_z = 0, \tau_{xz} = 0$)
- eine **linear** über den Querschnitt verteilte **Normalspannung** σ_{xx} (in x-Richtung) bewirkt ein **Biegemoment** M_y
- bei äusserem Moment M um die y-Achse (Funktion von z , NICHT von y , Steigung = c)
- bei äusserem Moment M um die z-Achse (Funktion von y , NICHT von z)

$$\sigma(z) = cz$$

Biegemoment M_y (Schnittmoment)

ergibt sich durch Integration der infinitesimalen Kräfte an jedem Flächenelement über die gesamte Querschnittsfläche (**Gleichgewicht**)

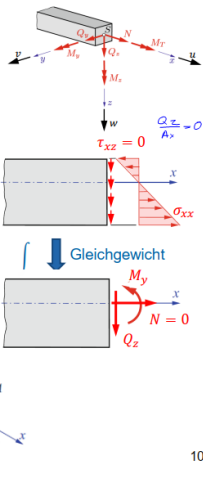
$$M_y = \int z\sigma(z) dA = c \int z^2 dA = c I_y$$

Spannung \leftrightarrow Biegemoment:

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \int z^2 dA$$



Flächenträgheitsmomente – Eigenschaften 2

Axiales Flächenträgheitsmoment

- Beschreibt Widerstand gegen Biegung in Balken (Spannung + Durchbiegung) bei **gerader Biegung**
- Je grösser das Flächenträgheitsmoment, desto kleiner die Durchbiegung und Spannungen

Deviationsmoment

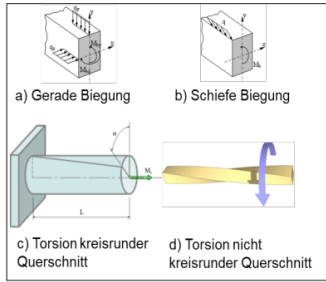
- Spielt eine Rolle, wenn der Körper nicht entlang seiner Hauptachsen belastet wird (**schiefe Biegung**)
- Beschreibt Bestreben eines Balkens sich in die Hauptachsen zu drehen bei schiefer Biegung

Polares Flächenträgheitsmoment

- Beschreibt Widerstand kreisrunder Querschnitte gegenüber **Torsion**
- Je grösser, umso kleinere Verdrehung und Schubspannung

Torsionsträgheitsmoment

- Beschreibt Widerstand nicht-kreisrunder Querschnitte gegenüber **Torsion**



Flächenträgheitsmomente – Eigenschaften 3

Einteilung der Flächenmomente

- 0. Ordnung: **Querschnittsfläche** [mm²]

$$A = \int dA \quad \text{Abstände von Achse in 0-ter Potenz} \rightarrow 1$$

- 1. Ordnung: **statisches Flächenmoment** [mm³]

$$S_y = \int z dA \quad S_z = \int y dA \quad \text{Abstände von Achse in 1-ter Potenz} \rightarrow y, z$$

- 2. Ordnung: **Flächenträgheitsmoment** [mm⁴] **Abstände von Achse in 2-ter Potenz** $\rightarrow y^2, z^2, r^2$

$$I_y = \int z^2 dA \quad I_z = \int y^2 dA \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dA \quad I_p = \int r^2 dA = \int (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$

Axiales Flächenträgheitsmoment Deviationsmoment (= 0 für symmetrische Q.) Polares Flächenträgheitsmoment

Abhängigkeiten

- Rein geometrische Grösse
- Hängt von Grösse, Form und Lage der Fläche ab
- Ist somit vom Koordinatensystem (insbesondere der Orientierung und vom Nullpunkt) abhängig (**Tensor**)

Flächenträgheitsmomente – Berechnung durch Integration

1) Infinitesimales Flächenelement

- Führt auf Flächenintegral
- $I_y = \int z^2 dA = \iint z^2 dy dz$
- $I_z = \int y^2 dA = \iint y^2 dy dz$

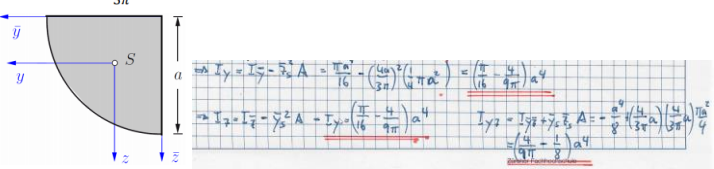
2) Infinitesimaler Streifen (parallel zur z-Achse)

- Führt auf Einfachintegral
- $I_z = \int y^2 dA = \int y^2 h(y) dy$

3) Infinitesimaler Streifen (parallel zur y-Achse)

- Führt auf Einfachintegral
- $I_y = \int z^2 dA = \int z^2 b(z) dz$

$$\bar{y}_S = \bar{z}_S = \frac{4}{3\pi} a$$



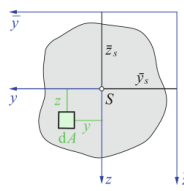
$$I_{yz(quer)} = -a^4/8$$

$$I_y = I_{z(quer)} = \pi \cdot a^4 / 16$$

Satz von Steiner (Parallelverschiebung der Bezugsachsen)

- Flächenträgheitsmomente hängen vom Bezugspunkt und den Richtungen des Koordinatensystems ab
- Wird der Bezugspunkt aus dem Schwerpunkt S verschoben, können die Flächenträgheitsmomente bezüglich des verschobenen Systems $I_{\bar{y}}$ aus den ursprünglichen I_y im Schwerpunkt mit dem **Satz von Steiner** ermittelt werden

$$I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_S^2 A \quad I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_S^2 A \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_S \bar{z}_S A$$



$$I_y = \int z^2 dA = \int (z + \bar{z}_S)^2 dA = \int z^2 dA + 2\bar{z}_S \int z dA + \bar{z}_S^2 \int dA$$

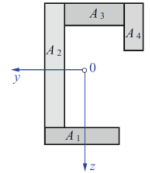
- mit $I_y = \int z^2 dA$ im Bezugssystem durch Schwerpunkt S
- mit der Fläche $A = \int dA$
- mit $\int z dA = 0$ (statische Moment bzgl. der Schwerachse y bzw. z)

- **Löcher** werden durch negative Flächenträgheitsmomente berücksichtigt

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA + \dots = \sum I_{yi}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots = \sum I_{zi}$$

$$I_{yz} = - \int_A yz dA = - \int_{A_1} yz dA - \int_{A_2} yz dA + \dots = \sum I_{yzi}$$



Standard-Flächenträgheitsmomente 1

| Fläche | I_y | I_z | I_{yz} | I_p | $I_{\bar{y}}$ |
|----------------------|--------------------|------------------------------------|------------------------------|--|--------------------|
| Rechteck b, h | $\frac{b h^3}{12}$ | $\frac{h b^3}{12}$ | 0 | $\frac{b h}{12} (h^2 + b^2)$ | $\frac{b h^3}{3}$ |
| Quadrat a | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{a^4}{12}$ | 0 | $\frac{a^4}{6}$ | $\frac{a^4}{3}$ |
| Dreieck b, h | $\frac{b h^3}{36}$ | $\frac{b h}{36} (b^2 - b a + a^2)$ | $-\frac{b h^2}{72} (b - 2a)$ | $\frac{b h}{36} (h^2 + b^2 - b a + a^2)$ | $\frac{b h^3}{12}$ |

| Fläche | I_y | I_z | I_{yz} | I_p | $I_{\bar{y}}$ |
|---|-----------------------------------|-----------------------|----------|-----------------------------------|------------------------|
| Kreis R | $\frac{\pi R^4}{4}$ | $\frac{\pi R^4}{4}$ | 0 | $\frac{\pi R^4}{2}$ | $\frac{5\pi R^4}{4}$ |
| Dünner Kreisring $t \ll R_m$ R_m, t | $\pi R_m^3 t$ | $\pi R_m^3 t$ | 0 | $2\pi R_m^3 t$ | $3\pi R_m^3 t$ |
| Halbkreis R | $\frac{R^4}{72\pi} (9\pi^2 - 64)$ | $\frac{\pi R^4}{8}$ | 0 | $\frac{R^4}{36\pi} (9\pi^2 - 32)$ | $\frac{\pi R^4}{8}$ |
| Ellipse a, b | $\frac{\pi}{4} a b^3$ | $\frac{\pi}{4} b a^3$ | 0 | $\frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2)$ | $\frac{5\pi}{4} a b^3$ |

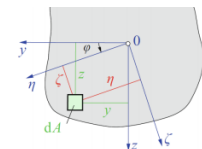
| | | |
|------------------------------|--|--|
| Sechseck a | $I_y = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot a^4$ $I_z = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot a^4$ | $W_y = \frac{5}{8} \cdot a^3$ $W_z = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot a^3$ |
| Achteck a | $I_y = \frac{8 \cdot \sqrt{2} + 11}{12} \cdot a^4$ $I_z = \frac{8 \cdot \sqrt{2} + 11}{12} \cdot a^4$ | $W_y = \frac{2^{(1/4)} \cdot (8 \cdot \sqrt{2} + 11)}{6} \cdot a^3$ $W_z = \frac{2^{(1/4)} \cdot (8 \cdot \sqrt{2} + 11)}{6} \cdot a^3$ |
| Vierkantröhre h, B, b | $I_y = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $I_z = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{12}$ | $W_y = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$ $W_z = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{6 \cdot B}$ |

| | | | |
|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| | $I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ | $I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$ | $I_{yz} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ |
| | $I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ | $I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$ | $I_{yz} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ |
| | $I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ | $I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$ | $I_{yz} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ |
| | $I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ | $I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$ | $I_{yz} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ |

Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente

Für welchen Winkel φ werden die Trägheitsmomente maximal?

$$\frac{dI_\eta}{d\varphi} = 0 \quad \frac{dI_\zeta}{d\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(2\varphi^*) = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$



- da der Tangens eine $\frac{\pi}{2}$ -periodische Funktion ist, gilt: $\tan(2\varphi^*) = \tan\left(2\varphi^* + \frac{\pi}{2}\right)$, das heisst, es gibt zwei zueinander senkrechte Winkel, für welche das Flächenträgheitsmoment extremal wird
- die dazugehörigen Achsen heissen **Hauptachsen**, die extremalen Flächenträgheitsmomente heissen **Hauptträgheitsmomente** I_1 und I_2

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad I_{12} = 0 \quad (\text{Deviationsmoment verschwindet})$$

- für den Winkel φ^* verschwindet das Deviationsmoment: $I_{yz} = 0$.
- das Hauptachsensystem entspricht der **Symmetrieachse** und der Achse senkrecht dazu (wenn der Körper symmetrisch ist)

27

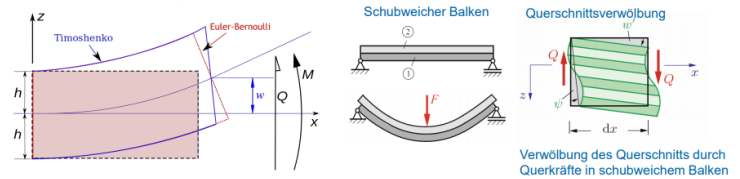
Klassifizierung von Biegeproblemen 3

Schubstarrer vs. schubweicher Balken (bzw. Euler-Bernoulli vs. Timoschenko)

Schubstarrer Balken = Euler-Bernoulli Balken
Querschnittsflächen, die vor der Deformation eben und senkrecht zur Balkenachse stehen, bleiben eben und senkrecht (1. und 2. Bernoulli Hypothese). Das gilt, wenn **reine Biegung vorliegt** (d.h. Querkräfte vernachlässigbar sind) und für lange, schlanken Stäbe ($L \gg 5x$ Querschnittshöhe).

Schubweiche Balken = Timoschenko Balken

Für kurze und dicke Balken sind diese Annahmen nicht mehr gültig und die durch Querkräfte verursachten Schubspannungen und -verzerrungen sowie die Änderung des Flächenträgheitsmoments müssen berücksichtigt werden. Je schlanker ein Balken, desto kleiner der Schubeffluss.



Zusammengesetztes Profil

| Fläche | Abstände vom Ursprung (y & z) | Flächenträgheitsmoment im verschobenen Schw. | Ftm im Globalen Schw. (Steiner) |
|--------|-------------------------------|--|---|
| 1 | $h \cdot d$ | 0 | $\frac{dh^3}{12}$ |
| 2 | $b \cdot t$ | $-\left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2}\right)$ | $\frac{bt^3}{12} + \frac{bt}{2} \cdot \left(\frac{h+t}{2}\right)^2$ |
| 3 | $b \cdot t$ | $0 + \left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2}\right)$ | $\frac{bt^3}{12} + \frac{bt}{2} \cdot \left(\frac{h+t}{2}\right)^2$ |

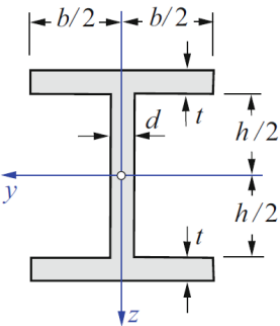
$$I_y = \sum I_{y,i} = \frac{dh^3}{12} + \left(\frac{bt^3}{12} + \frac{(h+t)^2}{4} \cdot bt\right) \cdot 2$$

$$= \frac{dh^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{bt^3}{12} + \frac{bth^2}{4} + \frac{2bht^2}{4} + \frac{bt^3}{4}\right)$$

$$= \frac{dh^3}{12} + \frac{2bt^3}{3} + \frac{bth^2}{2} + bht^2$$

$$I_z = \sum I_{z,i} = \frac{hd^3}{12} + 2 \cdot \frac{bt^3}{12}$$

Abstände vom Schwerpunkt des Bezugspunktes!



I-Träger

$$I_y = \frac{dh^3}{12} + \frac{2bt^3}{3} + \frac{bth^2}{2} + bht^2$$

$$I_z = \frac{hd^3}{12} + \frac{2tb^3}{12}$$

Trafo Bez.

Transformationsbeziehungen (Drehung des Bezugssystems)

- Flächenträgheitsmomente hängen vom Bezugspunkt und der Orientierung des Koordinatensystems ab
- Wird das Bezugssystem bezüglich eines beliebigen anderen Systems yz (mit bekannten Flächenträgheitsmomenten I_y, I_z, I_{yz}) gedreht, so können die Flächenträgheitsmomente $I_\eta, I_\zeta, I_{\eta\zeta}$ bzgl. des gedrehten Systems $\eta\zeta$ mit den **Transformationsbeziehungen** ermittelt werden.

$$\eta = y \cos(\varphi) + z \sin(\varphi)$$

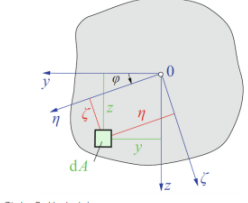
$$\zeta = -y \sin(\varphi) + z \cos(\varphi)$$

$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos(2\varphi) + I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_\zeta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cos(2\varphi) - I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin(2\varphi) + I_{yz} \cos(2\varphi)$$

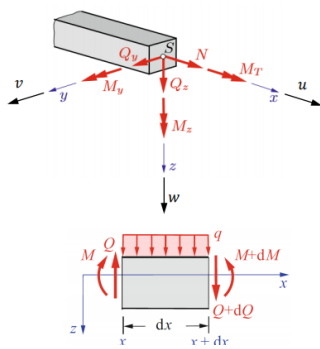
Es gilt: $I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = I_p$
das heisst, I_p ist eine **Invariante**.



Zürcher Fachhochschule

Gerade, reine Biegung

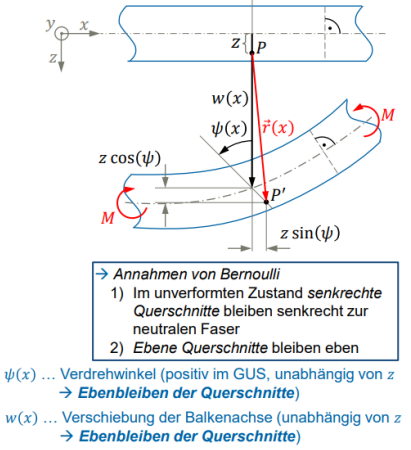
Konventionen



- Homogene, isotrope Werkstoffe** (Elastizitätsgesetz)
- Kleine Deformationen**
- Koordinatensystem**
 x → Koordinate entlang Längsachse
 y, z → Hauptachsen des Querschnitts im Flächenschwerpunkt S ($I_{yz} = 0$)
- Schnittgrößen**
 Q_y, Q_z → Querkräfte
 M_y, M_z → Biegemomente
→ äussere Lasten führen nur zu Q_z und M_y
→ zunächst nur **gerade, reine Biegung**: M_y
- Verschiebung der Balkenachse**
 u, v, w → x, y, z -Richtung

Verschiebungen

- Verschiebungsvektor** eines beliebigen Punktes P in der yz Ebene im Abstand z von der neutralen Faser
 $\vec{r} = u_1(x, z)\vec{e}_x + u_2(x, z)\vec{e}_y + u_3(x, z)\vec{e}_z$
- Verschiebung in x-Richtung**
 $u_1(x, z) = u(x, z) = z \sin(\psi(x))$
- Verschiebung in y-Richtung**
 $u_2(x, z) = v(x) = 0$
- Verschiebung in z-Richtung**
 $u_3(x, z) = w(x) + z \cos(\psi(x)) - z$
→ **Kleine Deformationen**: $\psi(x) \ll 1$
 $u_1(x, z) = u(x, z) = z\psi(x)$
 $u_2(x, z) = v(x) = 0$
 $u_3(x, z) = w(x)$



- Annahmen von Bernoulli**
1) Im unverformten Zustand **senkrechte Querschnitte** bleiben senkrecht zur neutralen Faser
2) **Ebene Querschnitte** bleiben eben
- $\psi(x)$... Verdrehwinkel (positiv im GUS, unabhängig von z) → **Ebenbleiben der Querschnitte**
- $w(x)$... Verschiebung der Balkenachse (unabhängig von z) → **Ebenbleiben der Querschnitte**

Kinematische Beziehungen

- Dehnung (x-Richtung)**
 $\epsilon_{xx}(x, z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} = z\psi'(x)$
- Dehnung (z-Richtung)**
 $\epsilon_{zz}(x, z) = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$
- Scherung (xz-Ebene)**
 $\gamma_{xz}(x, z) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = w'(x) + \psi(x)$

9

Gleichgewicht 2

Biegemoment

$$M_y(x) = \int \sigma_{xx}(z) z dA = E \psi'(x) \int z^2 dA = E \psi'(x) I_y$$

→ das Biegemoment um y-Achse ist proportional zur Änderung der Querschnittsverdrehung $\psi'(x)$

Querkraft

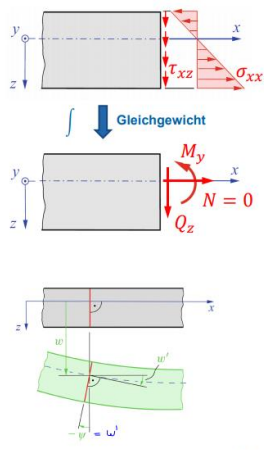
$$Q_z(x) = \int_A \tau_{xz}(x, z) dA = \kappa GA (w'(x) + \psi(x))$$

→ für reine Biegung oder schubstarren Balken $\rightarrow Q_z = 0$

$$\psi(x) = -w'(x)$$

→ reine Biegung $Q_z(x) = 0$ oder schubstarre Balken $\kappa GA \rightarrow \infty$

→ nur dann ist Verdrehwinkel der Balkenquerschnitte $\psi(x)$ durch die Neigung $w'(x)$ der neutralen Faser gegeben (d.h. Senkrechtbleiben der Querschnitte)



| i | A_i | $\bar{y}_{s,i}$ | $\bar{z}_{s,i}$ | $\bar{y}_{i,1}$ | $\bar{z}_{i,1}$ | $I_{\bar{y}\bar{y},i}$ | $I_{\bar{y}\bar{z},i}$ | $I_{\bar{z}\bar{z},i}$ | $I_{\bar{y}\bar{z},i}$ |
|---|-------|-----------------|-----------------|----------------------|--------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------------------|
| 1 | $2at$ | 0 | 0 | $\frac{t(2a)^3}{12}$ | $\frac{2at^3}{12}$ | 0 | 0 | $\frac{t(2a)^3}{12}$ | 0 |
| 2 | a^2 | $-\frac{t}{2}$ | a | $\frac{at^3}{12}$ | $\frac{ta^3}{12}$ | 0 | 0 | $0 + a^2(at)$ | $\frac{ta^3}{12} + \frac{a^3}{12}at$ |
| 3 | at | $-\frac{t}{2}$ | $-a$ | $\frac{at^3}{12}$ | $\frac{ta^3}{12}$ | 0 | 0 | $0 + a^2(at)$ | $\frac{ta^3}{12} + \frac{a^3}{12}at$ |
| 4 | at | a | $\frac{a}{2}$ | $\frac{at^3}{12}$ | $\frac{ta^3}{12}$ | 0 | 0 | $0 + a^2(at)$ | $\frac{ta^3}{12} + \frac{a^3}{12}at$ |
| 5 | at | $-a$ | $-\frac{a}{2}$ | $\frac{at^3}{12}$ | $\frac{ta^3}{12}$ | 0 | 0 | $0 + a^2(at)$ | $\frac{ta^3}{12} + \frac{a^3}{12}at$ |

Grundgleichungen für Gerade, Reine Biegung

Normalspannungen

→ Ein Biegemoment M_y bewirkt eine lineare Normalspannungsverteilung (abhängig von z), welche durch das Gleichgewicht berechnet werden kann

$$M_y(x) = \int_A \sigma_{xx}(z) z dA \quad \sigma_{xx}(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

→ Das Flächenträgheitsmoment I_y bestimmt dabei den geometrischen Anteil der Biegesteifigkeit

→ Bei einem positiven $M_y > 0$ treten positive Zugspannungen für $z > 0$ auf, bei negativen $M_y < 0$ für $z < 0$

→ Die Balkenachse, für welche $\sigma_{xx} = 0$ wird neutrale Faser genannt

→ Die Maximale Spannung im grössten Abstand $z = z_{max}$ zur neutralen Faser auf und ist damit eine reine Funktion der Querschnittsgeometrie, welche durch das Widerstandsmoment gegen Biegung W charakterisiert wird

→ Es stellen sich zwei Grundprobleme:

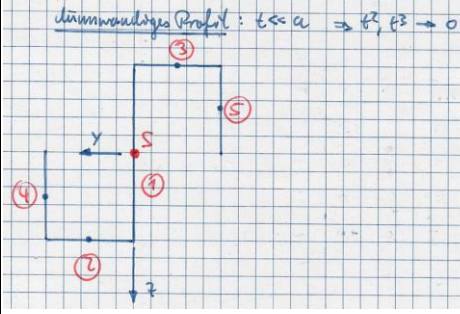
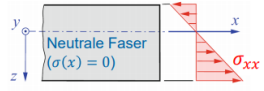
- Spannungsnachweis: M, W sind bekannt $\rightarrow \sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$ überprüfen

- Dimensionierung: M, σ_{zul} sind bekannt $\rightarrow W$ so anpassen, dass $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$

$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$... Widerstandsmoment gegen Biegung

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{zul} \rightarrow \frac{|M|}{W} \leq \sigma_{zul}$$

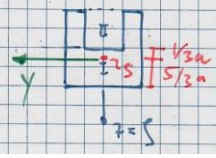
$$W_{erf} = \frac{|M|}{\sigma_{zul}}$$



$$I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_s^2 A \quad I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_s^2 A \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A$$

Flächenschwerpunkt?

$$\bar{z}_s = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i} = \frac{16a^2 \cdot 0 - 4a^2 \cdot a}{16a^2 - 4a^2} = \frac{1}{3}a$$



⇒ Widerstandsmoment! $z_{max} = a \Rightarrow W = \frac{I_y}{z_{max}}$
 ↳ maximale Distanz von S

Zürcher Fachhochschule