Analysis

HS22 Aviatik ZHAW

Karen Klöti

22. Januar 2023

1 Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{B}$ ordnet jedem $x \in \mathbb{D}$ genau ein Element $y \in \mathbb{B}$zu. x heisst Argument, y heisst Funktionswert, $\mathbb{D}$ ist die Definitionsmenge und $\mathbb{B}$ ist die Bildmenge

1.1 Kurvendiskussion

1.1.1 Bijektivität

surjektiv, $wenn\, aus\, x_1 \neq x_2\, mit\, x_1, x_2 \in D\, stets\, f(x_1) \neq f(x_2)\, folgt.$
injektiv, $wenn\, es\, zu\, jedem\, y \in W\, ein\, x\, in\, D\, gibt\, mit\, f(x) = y.$
bijektiv,$wenn\, sie\, injektiv\, und\, surjektiv\, ist.$

Bemerkung *Streng monotone Funk. sind injektiv, da die Bedingung für strenge Monotonie eine Verschärfung der Bedingung für Injektivität ist.*

1.1.2 Symmetrie

gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$, Spiegelung an der y-Achse $(\cos, x^2)$
ungerade Funtion: $f(-x) = -f(x)$, Puntspiegelung $(\sin, x, x^3)$

1.1.3 Periodizität

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst periodisch mit Periode T, wenn gilt: $f(x+T) = f(x)$für alle $x \in \mathbb{R}$

1.2 Extrema

1.2.1 relative Extrema

$$\begin{cases} f(x_0) > f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{relatives Maximum} \\ f(x_0) < f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{relatives Minimum} \end{cases}$$

1.2.2 Hochpunkt/Tiefpunkt

$$f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_E) < 0 \text{ Hochpunkt} \\ f''(x_E) > 0 \text{ Tiefpunkt} \end{cases}$$

1.2.3 Wendepunkt/Sattelpunkt

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_E) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x_W) < 0 \text{ Links-Rechts WP} \\ f'''(x_W) > 0 \text{ Rechts-Links WP} \end{cases}$$

1.2.4 Tangentenverfahren Newton

Ziel: Lösung ξ der Gl. $f(x) = 0$
Startwert *x_0 geeignet wählen (nahe bei ξ)*
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Die Folge konvergiert gegen die Lösung ξ

1.2.5 Graphen von Polynomen skizzieren

1. Nullstellein berechnen und Einzeichnen
2. asymptotisches Verhalten: höchste Potenz ist entscheidend
$p(x) \approx a_n x^n$
$x \to \infty \Rightarrow p(x) \dots$
$x \to -\infty \Rightarrow p(x) \dots$

1.3 Polynomfunktion

1.3.1 Polynomfunktion

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad mit\, a_n \neq 0$$

1.3.2 Fundamentalsatz der Algebra

Jede ganze rationale Funktion $y = p_n(x$ besitzt genau n reelle oder komplexe NS, wobei k-fache NS auch k-fach gezählt werden.

1.3.3 Nullstellen

Satz: Ist x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $y = f(x)$ vom Grad n , dann gibt es eine eindeutig bestimmmte Polynomfunktion $q(x)$ vom Grad $n-1$, mit m-facher Nullstelle, so dass gilt:
$f(x) = (x - x_0)^m \cdot q(x) \qquad f\ddot{u}r\, jedes\, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-2} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \\ &= a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \end{aligned}$$

1.3.4 Identitätssatz

Gegeben sind die Polynome$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ und$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots b_n x^n$. Dann gilt $p(x) = q(x)$für alle$x \in \mathbb{R}$genau dann, wenn $ak = bk$ für alle $0 \leq k \leq n$.

1.3.5 Polynomdivision

- Meistens durch NST des Polynoms teilen, da kein Rest übrig bleibt
- NST durch raten (Ordnung +2) bzw. Mitternachtsformel herausfinden

Beispiel

$$\begin{array}{l} (\ -2x^2 \quad -x-1) \div (x-1) = \ -2x - 3 + \dfrac{-4}{x-1} \\ \underline{\ \ 2x^2 - 2x\ \ } \\ \qquad -3x - 1 \\ \qquad \underline{\ \ 3x - 3\ \ } \\ \qquad\qquad -4 \end{array}$$

1.3.6 Effizient auswerten

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d && \Rightarrow 3 + 2 + 1 = 6\, Koeffizienten \\ &= ((a \cdot x + b) \cdot x + c) \cdot x + d && \Rightarrow 3\, Koeffizienten \end{aligned}$$

1.3.7 Horner Shema

$y = (((a_n x + a_{n-1})x + \dots)x + a_1)x + a_0$

Beispiel

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= ((a \cdot x + b) \cdot x + c) \cdot x + d \end{aligned}$$
$x = -1 \ in \ f(x) = x^3 - 3x^2 + 0x + 4$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} f + g &: D \to \mathbb{R}\, mit\, x \to f(x) + g(x) \\ f - g &: D \to \mathbb{R}\, mit\, x \to f(x) - g(x) \\ f \cdot g &: D \to \mathbb{R}\, mit\, x \to f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} &: D \to \mathbb{R}\, mit\, x \to \frac{f(x)}{g(x)} \ falls\ g\ (x \neq 0 f\ddot{u}r\ alle\ x \in D \\ c \cdot f &: D \to \mathbb{R}\, mit\, x \to c \cdot f(x)\ f\ddot{u}r\ ein\ festes c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.3.8 Verkettung von Funktionen

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

1.3.9 Umkehrfunktion

Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion. Die *Umkehrfunktion* $g : W \to D$ ist definiert durch:

$x = f^{-1} = g(y)$

wobei x durch f(x)=y eindeutig definiert wird .

Löse $y = f(x)$ nach x auf
Vertausche die Variablen x und y
Bsp. $y = f(x) = \frac{3x}{2x-5}$ Auflösen nach x

$$y = \frac{3x}{2x-5} \Rightarrow (2x-5)y = 3x \Rightarrow x(2y-3) = 5y \Rightarrow x = \frac{5y}{2y-3}$$
$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \tfrac{5x}{2x-3}$$

1.3.10 Verschiebung, Strecken, Stauchen

Verschiebung

	in y Richtung	$y = f(x) + \mathbf{c}$ nach oben
	in x Richtung	$y = f(x + \mathbf{c})$ nach links

Strecken/Stauchen

	in y Richtung	$y = \mathbf{c} \cdot f(x)$
	in x Richtung	$y = f(\mathbf{c} \cdot x)$

1.3.11 Tangente berechnen

1. x in Fkt. einsetztlen, $\Rightarrow$ Berührungspunkt.
2. x in die Ableitung einsetzen $\Rightarrow$ Steigung m der Tangente.
3. Steigung m und Punkt in die Geradengl. $y = mx + b$ einsetze. $\Rightarrow$

$f(x) = x^3 - 2x \qquad Punkt\ 2$

$1. f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 = 4$

$2. f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 1$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 = 10$

$\Rightarrow y = 10x + b$

$3.\ 4 = 10 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -16$

$\Rightarrow y = 10x - 16$

1.3.12 Normalen berechnen

gleich wie Tangente, aber Steigung ist:$m_n = -\frac{1}{m}$

1.4 Ableitungsfunktion

Eine Fkt. f heisst diff'bar, falls f in jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ diff'bar ist.

1.4.1 Differentialquotient

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

Rechenregeln

$(cf(x))'$	$= cf'(x)$	*Faktorregel*
$(f(x) + g(x))'$	$= f'(x) + g'(x)$	*Summenregel*
$(f \cdot g)'$	$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	*Produktregel*
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}$	*Quotientenregel*
$(f \circ g)'(x)$	$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$	*Kettenregel*
$(f^{-1})'(y)$	$= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$	*Umkehrregel*
$(f)'(x)$	$= u(x)^{v(x)}$	*Log. Abl.*
$\ln(f(x))$	$= v(x) \cdot \ln(u(x))$	

1.4.2 Implizite Differentiation

Erfüllt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ und gilt $F_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann ist die Ableitung von f gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Beispiel 1

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 8y + 2xy^2 = 19$$

$$2x + y^2 - 5 + 8y + 2xy^2 = 0 \ \ (nach\ x\ ableiten)$$

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 5 + 8\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 = 0 \ \ (nach\ y\ ableiten)$$

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 5 + 8\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y^2 + \overbrace{4xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}^{Produktregel} = 0$$

$$\to (2y + 8 + 4xy)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2y^2 - 2x + 5$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{\frac{dy}{dx}}\right) = \mathbf{\frac{(-2y^2 - 2x + 5)}{(2y + 8 + 4xy)}}$$

Beispiel 2

$$F(x, y) = x - 2y^3 - 3y^5 - y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -6y^2 - 15y^4 - 1$$

$$\to y'(x) = \frac{1}{6y^2 + 15y^4 + 1}$$

1.5 Integral

1.5.1 unbestimmtes Integral

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathbf{C}, \qquad n \neq -1$$

1.5.2 bestimmtes Integral

zweiter Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Rechenregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

1.5.3 Partielles Integrieren

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx}$$

1.5.4 Riemannsumme

Ein abgeschlossenes Intervall , das wir in n Teilintervalle unterteilen:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= f'(\xi_1)(x_1 - x_0) + f'(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f'(\xi)(xn - x_{n-1})$$

1.5.5 Flächeninhalt

$$A = \int_a^b (f_0(x) - f_u(x))dx = \int_a^b f_0(x)dx - \int_a^b f_u(x)dx$$

Falls ein Intervall [a,b] nicht gegeben ist $\to$ Schnittpunkte berechnen.

1.6 Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{cases} n > m \to & echt\ (gebrochen)\ rational \\ n < m \to & unecht\ (gebrochen)\ rational \end{cases}$$

1.6.1 Nullstellen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{wenn } p(x_0) = 0, q(x_0) \neq 0$$

1.6.2 Polstellen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{wenn } q(x_0) = 0, p(x_0) \neq 0$$

1.6.3 hebbare Definitionslücken

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{wenn } p(x_0) = 0, q(x_0) = 0$$

$$Bsp.\ y = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-1)^2(x-3)(x+4)} \begin{cases} NS : x = -2 \\ PS : x_{1,2} = 1, x_3 = -4 \\ DefL : x = 3 \end{cases}$$

2 Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0 \qquad \begin{cases} \text{Konvergenz: Grenzwert existiert} \\ \text{Divergenz: Grenzwert existiert nicht} \end{cases}$$

2.0.1 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$$

$$\lim_{x \to \infty} q^x = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{z^x} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} ((1 + \frac{1}{x})^x) = e$$

Rechenregeln

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \qquad \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^k = a^k \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\ falls\ a_n \geq 0\ und\ a \geq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},\ falls\ b_n \neq 0\ und\ b \neq 0$$

2.0.2 Brüche

Durch die grösste Potenz des Zählers/Nenners teilen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{7}{x^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2.0.3 Beträge

Beträge vereinfachen indem man sich überlegt, ob das Argument im Betrag grösser bzw. kleiner 0 ist

Beispiel

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} (2+x) = 4$$

2.0.4 Wurzelterme

Wurzelterme kann man mithilfe der 3. binomischen Formel erweitern

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) \qquad \| \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \frac{1+\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

2.0.5 l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

2.0.6 Substitution

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{u\to u_0} f(u) \quad \text{mit } u_0 = \lim_{x\to x_0} u(x)$$

2.0.7 "exp-log" Methode

$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} h(x)\cdot \ln(g(x))\right)$$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0}(1+3\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin(x))}{x}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x)}{1+3\sin(x)}\right)$$

$$= e^3$$

2.1 Bps und Tricks

2.1.1 erweitern mit $\frac{1}{x^k}$ mit k grösster Exponent

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^6-x^3}{7x^6+x^5-3} \overbrace{=}^{\cdot\frac{1}{x^6}} \frac{2-\frac{1}{x^3}}{7+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^6}} = \frac{2}{7}$$

2.1.2 erweitern mit $\frac{1}{a^k} = \frac{1}{7^n}$ mit a grösste Basis und k kleinste Exponent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 3^{x-1}+3^x}{9\cdot 3^{x+1}-3} \overbrace{=}^{\cdot\frac{1}{3^x}} \frac{3\cdot 3^{-1}+1}{9\cdot 3^1-\frac{3}{3^x}} = \frac{2}{27}$$

2.1.3 $\lim_{x\to\infty} \sqrt{a_x}-\sqrt{b_x}$ erweitern mit $\sqrt{a_x}+\sqrt{b_x}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{x^2+x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2x}} \overbrace{=}^{\cdot\frac{1}{x}} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}$$

2.1.4 umformen zu $\lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x)^a = e^a$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{3x})^{\frac{2}{3}x} = e^{(\lim_{x\to\infty} \log((1+\frac{4}{3x})^{\frac{2x}{3}}))} = e^{\frac{8}{9}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{2}{3}x\cdot\frac{4}{3}\frac{3}{4}} = \left(1+\frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{3}{4}x\cdot(\frac{8}{9})} \to e^{\frac{8}{9}}$$

2.1.5 mit Riemannsumme

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+n^2}{n^3} = \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right) = \int_0^1 x^2+1 = \frac{4}{3}$$

2.2 Stetigkeit

2.2.1 Grenzwert-Kriterium

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{!}{=} f(x_0)$$

Funtion f stetig, falls an jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs stetig ist.

2.2.2 Stetige Funktionen

- Polynome $y = a_n x^n + \cdots + a_0$
- rationale Funktionen $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ (Nenner $\neq 0$)
- trig. Funktionen
- hyperbolische Funktionen
- Exponentialfunktion $y = a^x)$ für $a > 0$
- Logarithmusfunktion $y = log_a(x)$ für $a > 0$
- Komposition von stetigen Funktionen

2.2.3 Epsilon-Delta-Kriterium

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x\in\mathbb{R} : |x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

2.2.4 Lipschitz Stetigkeit

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \qquad L \ge 0 \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Anmerkung

i) Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig

2.2.5 Differenzenquotient (Sekante)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Bsp.

$$f(x) = |x| \begin{cases} \text{stetig bei } x_0 \\ \text{nicht differenzierbar, da kein Grenzwert } \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \text{(Knick)} \end{cases}$$

2.2.6 Stetigkeit überprüfen (1-dim)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < p \\ f_2(x) & x > p \\ a & x = p \end{cases} \qquad \lim_{x\to p^-} f_1(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to p^+} f_2(x) \overset{!}{=} a$$

2.2.7 Stetigkeit überprüfen (n-dim)

Der Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)\ \ x\in\mathbb{R}^n$ muss existieren und eindeutig sein

Anmerkungen

i) Falls $n = 2$: Transformiere x und y in Polarkoordinaten, φ muss sich dabei rauskürzen, da der Limes sonst nicht eindeutig ist

ii) Falls $n > 2$: Nur zeigen, dass der Grenzwert nicht eindeutig ist, sonst zu kompliziert

2.2.8 Differenzierbarkeit vs. Stetigkeit

f ist stetig,$\to$keine Sprünge
diffbar. Fkt. $\Rightarrow$ stetige Fkt.

f ist diffbar, $\to$ keine Knicke
diffbar. Fkt. $\not\Leftarrow$ stetig Fkt.

Anmerkung: *Eine unstetige Funktion ist an ihren Unstetigkeitsstellen nicht diffbar.*

3 Folge

Eine Folge ordnet jedem Index $k \ge 1$ eine reelle Zahl a_k zu.

$$(a_k) = (a_k)_{k\ge 1} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) \qquad \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, n \to a_n$$

Die zu einer Folge gehörenden Reihe ist definiert als die Folge der Partialsummen.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

alternierend=unendliche Folge $\sum_{k=0}^{\infty})-1)^k a_k$

3.0.1 Explizites/direktes Bildungsgesetz

$$a_k = f(k) \qquad a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$$

Bsp. $3, 6, 9, 12, 15 \Rightarrow a_k = 3\cdot k$

k-te Folgenglied berechnen, ohne die vorherigen zu kennen.

3.0.2 Rekursives Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-1} + d$$

Bsp. $3, 6, 9, 12, 15 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 3$

k-te Folgenglied nur berechnen, wenn die vorherigen bekannt sind.

3.1 Arithmetische Folge und Reihe

$$a_{k+1} = a_k + d$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Differenz zweier Nachbarglieder ist konstant. $a_i - 1_{i-1} = d$

rekursives Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-1} + d$$

explizites Bildungsgesetz

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

explizites Bildungsgesetz(Reihe)

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Gaussche Summenformel

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.2 Geometrische Folge und Reihe

Die Folgeglieder werden durch Multiplikation mit konst. Faktor q und dem vorhergehenden Glied berechnet. ***geometrisches Mittel***

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

rekursives Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-1} \cdot q$$

explizites Bildungsgesetz

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

explizites Bildungsgesetz der Reihe

$$s_k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (q \neq 1)$$

für $q = 1$: $s_n = a_0(n+1)$

3.3 spezielle Reihen

3.3.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

3.3.2 Allgemeine harmonische Reihe (Dirichlet-Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für} & s > 1 \\ \text{divergiert für} & s \leq 1 \end{cases}$$

3.3.3 Binomische Reihe

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \qquad \alpha \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Konvergenz, falls $x > 0$ *und* $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{kleiner Gauss}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 4k + 2)$$

$$s_n = 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + 2n)$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$$= n \cdot (2n^2 + n + 1)$$

3.4 Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat folgende Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

3.4.1 Wichtige Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

4 Konvergenzverhalten von Folgen

Eine Folge a_n *besitzt den Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$*, falls es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *in* N_ε *gibt, so dass* $|a - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq N_\varepsilon$
Eine Folge heisst konvergent, falls sie einen Grenzwert besitzt, ansonsten divergent.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Bsp. geom. Folge: $(a^n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

Für $|q| < 1$ *ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, d.h. die Folge* (a_n) *ist konvergent*
Für $|q| > 1$ *ist* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$*, d.h. die Folge* (a_n) *ist divergent*
Für $q = 1$ *ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$*, d.h. die Folge* (a_n) *ist konvergent*
Für $q = -1$ *existiert* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *nicht, d.h. die Folge* (a_n) *ist divergent*

4.0.1 Monotonie

Eine Funkion $f\, D \to \mathbb{R}\, (wobei\, D \subseteq \mathbb{R})$ heisst
monoton wachsend $wenn\, f\ddot{u}r\, alle\, x_1, x_2 \in D\, mit\, x_1\, x_2\, gilt:$
$f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend $wenn\, f\ddot{u}r\, alle\, x_1, x_2 \in D\, mit\, x_1\, x_2\, gilt:$
$f(x_1) \geq f(x_2)$

Monotoniekriteruium:
Sei a_k eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist. Dann ist die Folge konvergent. Analog ist jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergent

4.0.2 Beschränktheit

Def: Eine Folge an heisst nach oben beschränkt , falls es eine reelle Zahl M gibt, so dass $a_n \geq M$ für alle$n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine Folge an heisst nach unten beschränkt, falls es eine reelle Zahl M gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Jede unbeschränkte Folge ist stets divergent
$a_n konvergent \Rightarrow a_n$ beschränkt
$a_n konvergent \not\Leftarrow a_n$ beschränkt

4.1 Konvergenzkriterien

4.1.1 Nullfolgenkriterium

Falls a_n keine Nullfolge bildet, so divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

4.1.2 Leibnitzkriterium

Falls a_n eine monoton fallende Nullfolge bildet, dann konvergiert auch die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

4.1.3 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \leq b_n\ \forall n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

4.1.4 Minorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \geq b_n\ \forall n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (meistens ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe)

4.1.5 Quotientenkriterium

$$Q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & Q > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & Q < 1 \\ \text{keine Aussage} & Q = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(\frac{2}{3})^{n+1}}{n(\frac{2}{3}^n} = \frac{2}{3}\lim n\to\infty \frac{n+1}{n} = \frac{2}{3}$$

4.1.6 Wurzelkriterium

$$L = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & L > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & L < 1 \\ \text{keine Aussage} & L = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)\lim n\to\infty \sqrt[n]{n} = \frac{2}{3}$$

5 Summe

5.0.1 Summenzeichen

$$\left(\sum_{k=s}^{n}(a_k)\right) = a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \cdots + a_n$$

Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot a_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k\cdot b_k)\right) \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

5.0.2 Teleskopsumme

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

5.0.3 Gausssche Summe

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bsp. $\sum_{m=6}^{18}(a_{m+1} - a_m) = a_{19} - a_6$

Bsp: $a_k = a_0\cdot q^k \qquad n_k = \sqrt{a_k} \qquad \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\sqrt{a_0\cdot q^{k+1}}}{\sqrt{a_0\cdot q^k}} = \sqrt{q}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \Rightarrow \frac{a_0}{1-q} = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a_0}}{1-\sqrt{q}} = 2$

5.1 Partialbruchzerlegung

Integrale der Form $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$dx zu berechnen

1. Polynomdivison
2. Nullstellen von $Q_m(x)$ berechnen
3. Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen
   - reelle r-fache Nullstelle x_0
   $$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$
   - komplexe r-fache Nullstelle
   $$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+2ax+b)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+2ax+b)^r}$$
4. Gleichung aufstellen und lösen

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)} \qquad x = A(x-1) + B(x+1)$$

$$(x_0 = 1) \quad 1 = 0 + 2B \to B = \frac{1}{2}$$

$$(x_1 = -1) \quad -1 = -2A + 0 \to A = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2)}dx = \int \frac{9}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-2)} \quad \textit{Partialbruchzerlegung}$$

$$\Rightarrow A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x-2)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2: & A + C = 0 & \Rightarrow & A = -C \\ x: & -A + B - 4C = 0 & \Rightarrow & B + 3C = 0 \\ -: & -2A - 2B + C = 1 & \Rightarrow & 6C + 2C + C = 9 \end{cases}$$

$A = -1, B = -3, C = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{-1}{x+1} + \int \frac{-3}{(x+1)^2} + \int \frac{1}{x-2}$$

$$= -\log|x+1| + \frac{3}{x+1} + \log|x-2| + C$$

5.2 Nützliches

5.2.1 Newton Verfahren: Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

Bsp.

$$h(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{2}} = sin(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \cos(x) = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}}} - \cos(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \sqrt{\frac{x_n}{2}} = sin(x_n)}{-\frac{1}{4\sqrt{\frac{x_n}{2}}} - \cos(x_n)}$$

5.2.2 Logarithmus

$$b^x = a \qquad ln(x) = y$$

$$x = \log_b a \qquad e^y = x$$

Für Taschenrechner: $\log_2(100) \Rightarrow \frac{\log(100)}{\log(2)}$

ableiten:$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \Rightarrow f^{(}x) = \frac{1}{x\cdot\ln(10)}$

5.2.3 Substitution + partielles Integrieren

$$\text{mit } y = log(x) \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dx = xdy$$

$$\int(\log x)^2 dx = \int y^2 x dy \overset{e^y = x}{\overbrace{=}} \int y^2 e^y dy = e^y y^2 - \int 2ye^y dy$$

$$= e^y y^2 - 2ye^y + \int 2e^y dy = e^y y^2 - 2ye^y + 2e^y + C$$

$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$$

5.3 Flächenformel

Kugel:
Oberfläche $4\pi r^2$, *Volumen* $\frac{4}{3}\pi r^3$
Kreis:
Umfang $2\pi r$, *Fläche* πr^2
Zylinger:
$O_{mantel}\ 2\pi rh$, $O_{Deckel}\ 2\cdot\pi r^2$, Volumen $\pi r^2 h$
Kegel:
$O_{mantel}\ 2\pi + r\pi s$, Volumen $V = \frac{r^2\pi h}{3}$, Seite $\sqrt{r^2+h^2}$
Pyramide
Volumen $V = \frac{G\cdot h}{3}$

6 Anhang

6.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

6.1.1 Trigonometrische Grössen

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	-$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6.1.2 Identitäten

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left((n-2k)(x-\frac{\pi}{2})\right)$$

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(x(n-2k)\right)$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$\sinh(x) = -i\sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$$

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

6.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2 \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(x)}{x} = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} n\cdot\sin(\frac{1}{n}) = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \qquad \lim_{x\to 0} x^a\cdot\ln^b(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{a} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n = \frac{1}{e^2}$$

6.3 Wichtige Ableitungen

$$(a^x)' = \ln(a)a^x \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\log_{10}(x))' = \frac{\ln(x)}{\ln(1)} = \frac{1}{x\cdot(\ln(10))}$$

$$(\sqrt[x]{a})' = -\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln(a)}{x^2} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$$

$$\cot'(x) = -\csc^2(x) \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x) \qquad \cosh(x)' = \sinh(x)$$

$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{artanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

6.4 Integrale

6.4.1 Potenzen und Wurzeln

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

$$\int -\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

6.4.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int a^{kx}\mathrm{d}x = \frac{a^{kx}}{k\ln(a)} + C \qquad a > 1$$

$$\int\ln(x)\mathrm{d}x = x\left(\ln|x| - 1\right) + C \qquad x > 0$$

$$\int x^n e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$$

6.4.3 Hyperbolische Funktionen

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x) + C \qquad x > 1$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x) + C$$

6.4.4 Trigonometrische Funktionen

$$\int\tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int\frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\int\sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

$$\int\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

$$\int\sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$$

$$\int\cos^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$

$$\int\cot(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int\arcsin(x)\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int\arccos(x)\mathrm{d}x = x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$