Zusammenfassung Analysis 1

3. Januar 2023; rev. 11. Januar 2023

Linda Riesen (rieselin)

Inhaltsverzeichnis

1 Konzepte der Differential- und Integralrechnung 1

2 Folgen und Reihen 3

3 Erweiterung der Differentialrechnung 5

4 Ungleichungen 6

1 Konzepte der Differential- und Integralrechnung

1.1 Integralrechnung

1.1.1 Integrieren von Flächen

Nullstellen bestimmen: => Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

1.2 Integrationsregeln

1.2.1 Substitution

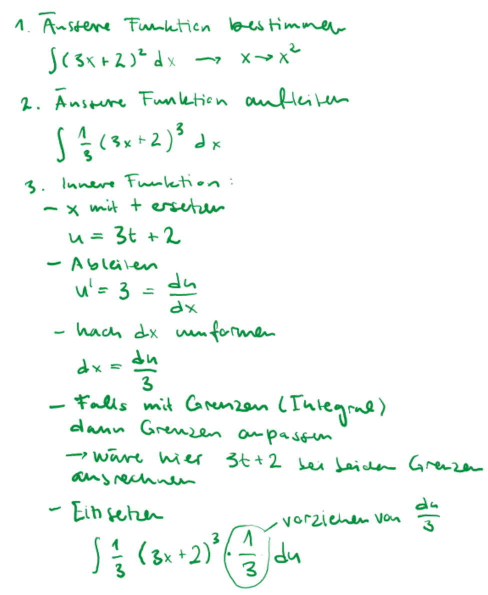

Abbildung 1: Substitution Anleitung

1.3 Zeichnen des Graphen

1.3.1 Transformationen

- $y = f(x)ßy = f(ax)$: Streckung des Graphen um Faktor $\frac{1}{a}$ in x Richtung
- $y = f(x)ßy = f(x+b)$: Verschiebung des Graphen um $|b|$ in x Richtung
- $y = f(x)ßy = cf(x)$: Streckung des Graphen um Faktor c in y Richtung
- $y = f(x)ßy = f(x) + d$: Verschiebung des Graphen um d Einheiten in y Richtung

1.3.2 Graphen von Polynomen

- Hat so viele Nullstellen wie Grad des Polynoms (Fundamentalssatz der Algebra)
- bei Faktorisiertem angeben, noch Vorfaktor beachten => Falls Punkt gegeben kann dieser berechnet werden
- für jede Nullstelle:

- Einfach: Schneidend
- Doppelt: Berührend
- Dreifach: Wie x^3

- für Asymptoten: anlehnend

1.3.3 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

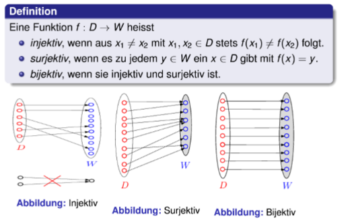

Abbildung 2: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

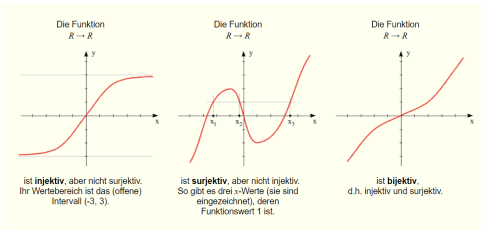

Abbildung 3: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv Graph Beispiele

1.3.4 Horner-Schema

Um nach Nullstellen aufzulösen: Nullstelle einsetzen und das Resultat (ohne Null am Ende) mit Grad -1 auffüllen = Lösung der Polynom Division...

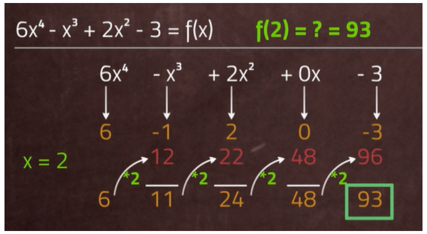

Abbildung 4: Horner Schema (Rest würde als + 0 / (x-5) angefügt werden)

1.3.5 Polynomdivision

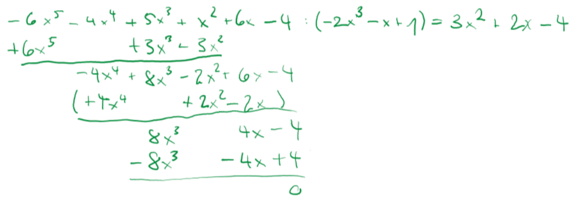

Abbildung 5: Polynomdivision

1.4 Begriff des Polynoms, Eigenschaften von Polynomen

1.5 Ableitung (Tangente, Kurvendiskussion)

1.6 Stammfunktion und Hauptsatz

2 Folgen und Reihen

2.1 Begriff der Folge (direkt, rekursiv, arithmetisch, geometrisch)

2.2 Grenzwertbegriff (Monotonie, Beschränktheit, Rechenregeln, Limes einer Funktion)

2.2.1 Beschränktheit

- nach oben beschränkt: falls es eine reelle Zahl M gibt so dass $a_n \leq M$ für alle n in $\mathbb{N}$
- nach unten beschränkt: falls es eine reelle Zahl M gibt so dass: $a_n \geq M$ für alle n in $\mathbb{N}$
- Dabei gilt a_n konvergent $\Rightarrow$ a_n beschränkt aber nicht umgekehrt
- M (Grenze) muss nicht optimal gewählt werden
- **Monotoneikritierium** Monoton wachsend und nach oben beschränkt ist konvergent | Monoton fallend und nach unten beschränkt ist konvergent (gilt auch bei abgeleitet für Umgebungsbereich).

2.2.2 Monotonie

- monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$
- monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$

Beweis:

- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend (bzw. umgekehrt fallend)
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0$ dann monoton wachsend

2.3 Reihen (Summenzeichen, arithmetisch, geometrisch)

2.3.1 Eigenschaften Summenzeichen

- Homogenität:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$
- Additivität:
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- Konstanter Summand:
$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$
- Teleskopsumme:
$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$
- Indexverschiebung (Substitution):
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

2.3.2 Spezielle Reihen

- kleiner Gauss:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Bernoulli Ungleichung: $(1+x)n \geq 1+nx$

2.3.3 Berechnung von Grenzwerten

Grenzwert mit gegebenen Grenzen:

- $\lim_{x\to 5} \frac{n+1}{x-1}$ => Grenzwert direkt bei x Einsetzen

- Damit Grenzwert existiert muss stetig sein (bei von Fallunterscheidung der gleiche Wert)

Grenzwert Berechnen Tricks

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)
  $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6-n^3}{7n^6+n^5-3} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{2}{7}$

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent)
  $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1}+2^{n+1}}{7^n+5} \cdot \frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}} = \frac{1}{7}$

- "$\infty - \infty$" Trick: Erweitern mit $\sqrt{...} + \sqrt{...}$
  $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = 1/2$

- Kettenfunktionen: Trick Stetigkeit von f(x) ausnützen $\Rightarrow$ zuerst $\lim_{n\to\infty} a_n$ berechnen, danach f(x) (ohne nochmals lim) anwenden.

- e-like...: Trick: umformen zu $((1+\frac{1}{x})^x)^a \Rightarrow e^a$

2.3.4 Stetigkeit

- Stetig wenn keine Sprünge (ungenaue definition)

- Stetig an Stelle x_0 falls Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$

- Stetig alls sie in jedem Punkt x0 in D ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Die folgenden elementaren Funktionen sind stetig:

- Polynome $y = a_n x^n + ... + a_0$ sind stetig.

- Gebrochenrationale Funktionen $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind stetig.

- Exponentialfunktionen $y = a^x$ sind stetig.

- Logarithmusfunktionen $y = log_a(x)$ sind stetig.

- Trigonometrischen Funktionen $y = sin(x)$, $y = cos(x)$, $y = tan(x)$ sind stetig

Rechnen mit stetigen Funktionen: Seien f(x) und g(x) in der Stelle x_0 stetig. Dann gilt:

- Die Funktion $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ist in x_0 stetig.

- Die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ ist in x_0 stetig.

- Die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist in x_0 stetig, falls $g(x_0) \neq 0$.

- Falls f(x) an der Stelle $g(x_0)$ stetig ist, dann ist auch die Verknüpfung (f ° g)(x) an der Stelle x_0 stetig.

2.3.5 Differenzierbarkeit

Damit eine Funktion f an der Stelle x0 differenzierbar ist, muss der Grenzwert $f'(x_0)$ existieren. Das bedeutet insbesondere, dass die linksseitige Ableitung = der rechtsseitigen Ableitung sein muss. $\lim_{h\uparrow 0}$ or $\lim_{h\downarrow 0}$ Differenzierbar => Stetig!
aber Stetig $\neq$> Differenzierbar!

3 Erweiterung der Differentialrechnung

3.1 Ableitung elementarer Funktionen

3.2 Ableitungsregeln

3.3 Kurvendiskussion

- Monotonieverhalten (monoton wachsend / fallende Bereiche bestimmen)
- Krümmungsverhalten / Minima / Maxima etc überprüfen
- Kritische Punkte: hinreichende Bedingung nicht erfüllt
  1. Keine Aussage!
  2. Leite f(x) so lange ab bis die n-te Ableitung an Stelle $\neq 0$ ist. Dann gilt:
  3. Wenn n gerade ist, hat f(x) an der Stelle x0 ein relatives Extremum, und zwar ein relatives Maximum im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein relatives Minimum im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$
  4. Wenn n ungerade ist, hat f(x) an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (und damit einen Sattelpunkt).

3.3.1 Differentialrechnung

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an einer Stelle x0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (**Linearisierung**): $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

3.4 Extremwertaufgaben

1. Gleichung aufstellen
2. Ableiten
3. Kandidaten für Min/Max finden
4. Begründen durch 2. Ableitung / Graph

3.5 Newton-Verfahren (Approximation einer Nullstelle)

4 Ungleichungen

No flipping

- $log_a()$ [mit a > 1] (oder andere monoton wachsende Funktion)
- Addition / Subtraktion
- Mult. mit Positiver Zahl
- Divi. durch Positive Zahl

Flipping needed

- $log_a()$ [mit 0 < a < 1] (oder andere monoton fallende Funktion)
- Mult. mit Negativer Zahl
- Divi. durch Negative Zahl