Lineare Algebra

HS22 Aviatik ZHAW

Karen Klöti

10. Januar 2023

1 Vektoren

1.1 Grundlagen

- parallel: Richtung und Orientierung gleich
  $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$
- antiparallel: Richtung nicht gleich aber Orientierung gleich
  $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$
- kollinear/linear abhängig:
  Parallel oder antiparallel
  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, falls λ existiert ansonsten **windschief**
  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightarrow \vec{a}$ & $\vec{b}$ kollinear
  $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = 0$
- komplanar: Vektoren liegen auf der gleichen Ebene (lin. abhängig)
  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$
- orthogonal: $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, wenn sie einen rechten Winkel einschliessen.

Anmerkung *Der Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear und orthogonal*
Sind zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren orthogonal, dann sind sie nicht kollinear.
Der Gegenvektor und der Vektor haben den gleichen Betrag.
$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \neq \vec{a} \perp \vec{c}$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *komplanar* $\neq$ *kollinear*

Rechenregeln

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \; (Distributivgesetz)$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \; (Distributivgesetz)$$
$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) \quad = \mu(\lambda\vec{a}) \; (Assoziativgesetz)$$

1.1.1 Linearkombination

$$\vec{v} = a_1\vec{\omega_1} + a_2\vec{\omega_2} + a_3\vec{\omega_3} + ... + a_m\vec{\omega_m} =: \sum_{i=1}^{m} a_i\vec{\omega_i} \qquad m \in \mathbb{N}$$

1.1.2 Betrag

$$|\,\vec{a}\,| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.1.3 Normierung

$\vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$
Bsp.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\,\vec{a}\,| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \vec{e_a} = \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1.1.4 Dreiecksungleichung

$$|\,\vec{a} + \vec{b}\,| \leq |\,\vec{a}\,| + |\,\vec{b}\,|$$

1.1.5 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$= |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,| \cdot \cos(\varphi) = a \cdot b \cdot \cos(\varphi)$$

Anmerkung $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
Das Skalarprodukt ist eine skalare Grösse und wird auch als ***inneres Produkt*** *der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet.*

Rechenregeln:

$$(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$$
$$(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$$
$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

1.1.6 Winkelberechnen

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right), \; \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$$

1.1.7 Projektion

Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:
$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = (\vec{e_a} \cdot \vec{b})\vec{e_a} \qquad \vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$
$\cos(\varphi) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{\vec{b_a}}{\vec{b}}$

Beispiel *Projektion von* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ *auf* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 - 0 + 28 = 40, \qquad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{40}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1,6\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

1.2 Vektorprodukt

1.2.1 Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.2.2 Betrag Vektorprodukt

$\mathcal{A} = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$

1.2.3 Fläche

$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\varphi)$
Fläche vom Dreieck $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Rechenregeln

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \qquad Distributivgesetze$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad Anti-Kommutativ$$
$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \qquad Assoziativgesetz$$
$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Anmerkung *Das Vektorpordukt ist nicht assoziativ!* $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

1.2.4 Spatprodukt

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = det(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
$$= a_x b_y c_z + a_z b_x c_y + a_y b_z c_x - a_z b_y c_x - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z)$$

Volumen Parallelpiped $|\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

1.2.5 Determinante 3x3

Regel von Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right| = 48$$

Rechenregeln

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] \; zyklische\ Vertauschung$$
$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] \; Vertauschung\ von\ 2\ Vektoren:\ Vorzeichenwechsel$$
$$[\vec{a} + \vec{d}\;\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] + [\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}] \; Distributivgesetz$$
$$[\vec{a}\,\vec{a}\,\vec{c}] = 0 \; sind\ zwei\ Vektoren\ gleich:\ Spatprodukt = 0$$
$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0 \; so\ sind\ die\ Vekoren\ komplanar$$

1.2.6 n-dimensionalen Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 a_2 \ldots a_n)$$ **unabhängig (nicht komplanar)**

$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}$

2 Matrizen

2.1 Definition

2.1.1 m x n Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{m\times n} = \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$

2.1.2 Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

2.1.3 Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = (1)$$

untere Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$, für $i < j$ (über Hauptdiagonale)

obere Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$, für $i > j$ (über Hauptdiagonale)

symmetrische Matrix: $a_{ij} = a_{ji}$, für alle $i, j = 1, \dots, n$

Addition Seien A und B zwei m x n Matrizen. Dann ist $C = A + B$ definiert durch $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m und j = 1, \dots, n$.

Subtraktion Seien A und B zwei m x n Matrizen. Dann ist $D = A - B$ definiert durch $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

skalare Multiplikation

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Rechnen Matrizen

2.2.1 Matrixprodukt

Definition *Gegeben sei die m x n Matrix A und die n x p Matrix B. Die* ***Produktmatrix*** *C=AB ist eine m x p Matrix und berechnet sich wie folgt:* $c_{ij} = [AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, *für* $i = 1, \dots, m$ *und* $j = 1, \dots, p$

Falk - Schema

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pk} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ik}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & & c_{mk} & & c_{mn} \end{pmatrix} = C$$

Reihe mal Spalte$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4(-2) + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 4\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 0(-2) + (-3)\cdot 0 & 4\cdot 1 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Matrixprodukt ist nicht kommutativ: AB $\neq$ BA

2.2.2 Inverse Matrix

Definition *Gibt es zu einer n x m Matrix A eine Matrix X mit* $AX = XA = I_n$, *so heisst X die zu A inverse Matrix, Sie wird durch das Symbol* A^{-1} *gekennzeichnet*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel Inverse überprüfen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-2 \\ -3+3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ **AB = BA = $\mathbf{I_2}$ $\rightarrow$ $\mathbf{A^{-1}}$ = B** und **$\mathbf{B^{-1}}$ = A**

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ quadratisch und $det(A) = -4 \neq 0 =$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$

$= A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.25 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$

Definition: Invertierbar *Eine quadratische Matrix heisst invertierbar (oder umkehrbar oder regulär), wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie singulär.*

Rechenregeln

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$A \cdot A^{-1} = E_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Transponierte Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Rechenregeln

$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C (i.Allg. \neq (B + C) \cdot A!)$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$E \cdot A = A \cdot E = A(E - Einheitsmatrix)$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T (Reihenfolgebeachten!)$$
$$\lambda A + A \cdot B = A \cdot (\lambda E + B) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.2.4 orthogonal

Eine n x n Matrix A heisst **orthogonal** falls gilt:
$A^T A = AA^T = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2.2.5 Definitheit von Matrizen

- **Möglichkeit I (2x2-Matrizen)**
  Eigenwerte λ_i mit $\det(A-\lambda_i I_n) \stackrel{!}{=} 0$
  - $\lambda_i > 0$ positiv definit (semi bei $\geq$)
  - $\lambda_i < 0$ negativ definit (semi bei $\leq$)
  - $\lambda_i > 0,\ \lambda_j < 0$ indefinit
- **Möglichkeit II (3x3-Matrizen)**
  Hauptminoren A_i berechnen

$$A_i = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

  - $A_1 > 0,\ A_2 > 0, \cdots, A_n > 0 \rightarrow$ positiv definit
  - $A_1 < 0,\ A_2 > 0, \cdots \rightarrow$ negativ definit
  - Kein Muster $\rightarrow$ indefinit

3 Lineare Gleichungssysteme

3.0.1 Gleichung

$$ax = b \qquad a \neq 0, x = \frac{b}{a}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

3.0.2 Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & a_{2n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & a_{2n}x_n & = b_m \end{cases}$$

homogen, *wenn $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$*
konsisten/lösbar, *wenn das GS mind. 1 Lösung hat.*
äquivalent, *wenn 2 GS dieselbe Lösungsmenge haben.*

3.0.3 Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

führende 1, nächste Zeile rechts davon, 0 Zeile zu unterst.
reduzierte Form, *wenn führende 1 keine anderen Zahlen in Spalte (oben/unten) hat.*

3.1 Gauss-Jordan Verfahren

Beispiel

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1. *Gleichungssystem in Zeilenstufenform aufschreiben*

x_1	x_2	x_3	
-2	-4	-6	4
3	-1	2	1
4	0	3	3

2. *Koeffizientenmatrix in Einheismatrix umformen*

x_1	x_2	x_3		
-2	-4	-6	4	$:(-2)$
3	-1	2	1	
4	0	3	3	
1	2	3	-2	
3	-1	2	1	$II - 3 \cdot I$
4	0	3	3	$III - 4 \cdot OI$
1	2	3	-2	
0	-7	-7	7	$:(-7)$
0	-8	-9	11	$III + 8 \cdot II$
1	2	3	-2	
0	1	1	-1	
0	0	-1	3	$:(-1)$
1	2	3	-2	$I - 3 \cdot III$
0	1	1	-1	$II - III$
0	0	1	-3	
1	2	0	7	$I - 2 \cdot II$
0	1	0	2	
0	0	1	-3	
1	0	0	3	$I - 2 \cdot II$
0	1	0	2	
0	0	1	-3	

3. *Lösung ablesen*
   $x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3$
4. *Lösungsmenge aufschreiben* $\mathbb{L} = \{(3 \mid 2 \mid -3)\}$

3.2 Gauss Verfahren

1. Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringen

x_1	x_2	x_3		
0	-1	2	0	$:(-2)$
0	1	-2	-9	
0	0	1	4	

2. zugehöriges GS aufschreiben $\begin{cases} x + 2y - z & = 0 \\ y - 2z & = -9 \\ z & = 4 \end{cases}$
3. Auflösen $\begin{cases} x & = -2y + z \\ y & = -9 + 2z \\ z & = 4 \end{cases}$
4. Rückwärts einsetzen
   $y = -9 + 2 \cdot 4 = -1$
   $x = -2 \cdot (-1) + 4 = 6$
5. Lösungsmenge aufschreiben $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

3.3 lineare Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn diese lineare GS nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. hat.

3.4 Diskussion Lösungsmenge

3.4.1 r=rang(a)

Sei A eine m x n Matrix. Der Rang der Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen.

Für jede m x n Matrix gilt : $0 \leq rang(A) \leq min(m, n)$.

$r < m$: treten Nullzeilen in Zeilenstufenform auf, dann muss $b_k, k = r+1, \ldots, m$ alle Null sein, damit GS lösbar ist. $\Rightarrow r = rang(A \mid \vec{b})$
$r = m$: treten keine Nullzeilen in der Zeilenstufenform auf, dann ist GL lösbar $\Rightarrow r = rang(A \mid \vec{b})$

*Das lineare GS ist nur **lösbar**, wenn:*
$r = rang(A \mid \vec{b})$,
d.h. wenn enweder $r < m$ und $b_k = 0, k = r+1, \ldots, m$ oder $r = m$
*Für $r = n$: **genau eine Lösung***
*Für $r < n$: **unendlich viele Lösungen**, wobei die Anzahl der freien Variablen gleich $n - r$ ist.*

Bsp:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$n = 3, m = 6, r = 3$
$n - r = 0$ freie Variable. Da $r < m, b_4 = b_5 = b_6 = 0$ und $r = n$, besitzt das GS genau 1 Lösung, die lautet: $x_1 = 0, x_2 = 0 x_3 = 0$

3.5 Inverse einer Matrix

3.5.1 Determinante

Gegeben sei die 2 x 2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die aus den Elementen von A berechnete Grösse $ad - bc$ wird als 2-reihige Det. bezeichnet:

$$\mathbf{det(a)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathbf{ad - bc}$$

$det(A) = ad - bc \neq 0$ invertierbar $\Rightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det(A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Anmerkung *Eine 2x2 Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.*

3.5.2 Inverse A^{-1}

1. Koeffizientenmatrix erweitern

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

2. auf reduzierte Zeilenstufenform mit dem Gauss-Jordan Verfahren.

3. Ist der **Rang der Matrix A gleich n**, dann lässt sich die Inverse A^{-1} direkt an der erweiterten Koeffizientenmatrix auf reduzierter Zeilenstufenform ablesen.

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array}\right) = (I_n \mid A)$$

*Ist der **Rang kleiner als n**, dann besitz die Matrix keine Inverse.*
$A \cdot A^{-1} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *falls Inverse existiert*

3.6 Cramersche Regel

GS:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

Ist $det(A) \neq 0$, dann ist das lineare GS $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.
$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}$ und $x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$
mit den Determinanten:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Anmerkung
Sind $det(a) = det(A_1) = det(A_2) = 0$, so hat das lineare GS unendlich viele Lösungen.
ist $det(A) = 0$, aber ist $det(A_1)$ oder $det(A_2)$ ungleich Null, so besitzt das lineare GS keine Lösung.

4 Determinante

4.1 nxn Determinante

$$\begin{vmatrix} a & \mathbf{b} & c & d \\ e & \mathbf{f} & g & h \\ i & \mathbf{j} & k & l \\ m & \mathbf{n} & o & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{a} & \boxed{b} & \cancel{c} & \cancel{d} \\ e & \cancel{f} & g & h \\ i & \cancel{j} & k & l \\ m & \cancel{n} & o & p \end{vmatrix} \Rightarrow -b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c & d \\ \cancel{e} & \boxed{f} & \cancel{g} & \cancel{h} \\ i & \cancel{j} & k & l \\ m & \cancel{n} & o & p \end{vmatrix} \Rightarrow f \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c & d \\ e & \cancel{f} & g & h \\ \cancel{i} & \boxed{j} & \cancel{k} & \cancel{l} \\ m & \cancel{n} & o & p \end{vmatrix} \Rightarrow -j \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c & d \\ e & \cancel{f} & g & h \\ i & \cancel{j} & k & l \\ \cancel{m} & \boxed{n} & \cancel{o} & \cancel{p} \end{vmatrix} \Rightarrow n \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + f \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} n \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

i-ten Zeile:
$det(a) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$

j-ten Spalte:
$det(a) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.1.1 Eigenschaften

Eigenschaft 1 $det(A^T) = det(A)$

Eigenschaft 2 *beim Vertauschen zweier Zeilen(oder Spalten) ändert eine Det ihr Vorzeichen.*
$A = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -det(a)$

Eigenschaft 3 *Vorfaktor darf vor die Det genommen werden oder mit einem reelen Skalar multipilziert werden.*
$\lambda det(A) = \lambda(ad - bc) = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$

Eigenschaft 4 *Matrix $\Rightarrow$ jedes Element $\cdot\lambda$*
Det $\Rightarrow$ eine Spalte/Zeile $\cdot\lambda$
$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$

Eigenschaft 5 $det(A) = 0$ *wenn alle Elemente Z/S=0 oder 2 Z/S gleich oder Z/S Linearkomb. der übrigen Z/S*

Eigenschaft 6 *Wert einer Det bleibt gleich, wenn man zu einer Z/S ein beliebiges Vielfache einer anderen Z/S elementweise addiert*

Eigenschafet 7/8 $det(AB) = det(A)det(B)$

$det(A^k) = (det(A))^k$

Eigenschaft 9 *Die Det einer Δ Matrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente*
$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$

Eigenschaft 10 *wenn die Matrix invertierbar ist:*
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

4.1.2 äquivalente Aussagen

$\mathbf{det(A) \neq 0}$	$\mathbf{det(A) = 0}$
S-Vektoren von A: lin unabh.	S-Vektoren von A: lin. abh
Z-Vektoren von A: lin unabh.	Z-Vektoren von A: lin. abh
$rang(A) = n$	$rang(A) < n$
Matrix ist invertierbar	Matrix ist singulär
$A\vec{x} = \vec{b}$: eindeutige Lösung	$A\vec{x} = \vec{b}$:keine eindeutige Lösung
$\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$	

4.2 Cramersche Regel

Die k-te Komponente des Lösungsvektors $\vec{x}$ des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lässt sich mit Hilfe von Det. berechnen.

$$x_k = \frac{det(A_k)}{det(a)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, k = 1, \dots, n$$

In $det(A_k)$ wurde die k-te Spalte in der Det von A durch $\vec{b}$ ersetzt. (nur Anwenden wenn $det(A) \neq 0$)

$det(A) = det(A_k) = 0$ unendlich viele Lösungen
$det(A) = 0, det(A_k) \neq 0$ keine Lösungen

5 Geraden

5.0.1 Geraden

$\vec{a}$: Ortsvektor eines Aufpunktes
$\vec{v}$: Richtungsvektor
$\vec{n}$: Normalvektor

5.0.2 Schnittwinkel

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\mid \vec{v}_1 \mid\mid \vec{v}_2 \mid}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\mid \vec{n}_1 \mid\mid \vec{n}_2 \mid}\right)$$

5.0.3 Abstand Punkt - Gerade

$$2D : D = \frac{\mid \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \mid}{\mid \vec{n} \mid} = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

$$3D : D = \frac{\mid \vec{x} \times \overrightarrow{AP} \mid}{\mid \vec{v} \mid}$$

5.0.4 Abstand Gerade - Gerade

$$D = \frac{\mid \begin{bmatrix} vvA_1A & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \mid}{\mid \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \mid}$$

5.0.5 Parameterform

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

5.0.6 Normalform

$$g : \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 0$$

$$g : \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} = 0, \text{ wobei } \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}$$

Normalvektor = Einheisvektor ⇒ Hesseschen Normalform
Normalform ist nicht eindeutig

5.0.7 Koordinatengleichung

$$ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

5.0.8 Schnittpunkt

$$g_1 = \overrightarrow{OA}_1 + \lambda \vec{v}_1 \text{ und } g_2 = \overrightarrow{OA}_2 + \mu \vec{v}_2$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}_1 + \lambda \vec{v}_1 = \overrightarrow{OA}_2 + \mu \vec{v}_2$$

***Anmerkung** Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel oder identisch, wenn die Richtungsvekt./Normalvekt. kollinear sind. Erfüllt der Stützvektor $\overrightarrow{OA}_1$ von g_1 die Parameterdarst. der Geraden g_2, so sind die Geraden identisch.*

5.0.9 Lagen

kollinear/linear abhängig:Richtung und Orientierung gleich
parallel: kollinear, keinen gemeinsamen Punkt
$\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$
identisch Geraden sind kollinear & gemeinsamer Punkt
schneidend nicht kollinear, aber einen gemeinsamen Punkt
$\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = 0$
windschief Geraden/Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt.
$\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \neq 0$

5.0.10 Spurpunkt

Spurpunkt $S_1 = (0; y; z)$ oder $S_2 = (x; 0; z)$ oder $S_3 = (x; y; 0)$

6 Ebenen

$\vec{a}$: Ortsvektor eines Aufpunktes
$\vec{v}$: Richtungsvektor
$\vec{n}$: Normalvektor
$\vec{\omega}$: linear unabhängiger Richtungsvektor zu $\vec{v}$

Ebene parallel zu xz-Ebene: $\vec{v} = \vec{e}_x, \vec{w} = \vec{e}_z, \vec{n} = \vec{e}_y$

6.0.1 Parameterform

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{\omega}$$

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v} + \gamma \vec{w}$$
$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

6.0.2 Normalenform

$$E : \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} 0, wobei\ \vec{n} = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

6.0.3 Koordinatenform

$ax + by + cz + d = 0$
mit Normalenvektor: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$

6.0.4 Normalvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

6.0.5 Winkel zwischen Gerade und Ebene

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{n}_E \cdot \vec{v}_G}{|\vec{n}_E||\vec{v}_G|}\right)$$

6.0.6 Winkel zwischen 2 Ebenen

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

6.0.7 Abstand P-Ebene

$P(x_0, y_0, z_0)$
$D = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$
$D = 0$: Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ liegt auf der Ebene
$D > 0$: P lieft im Halbraum, wo der Normalvektor hinzeigt
$D < 0$: P lieft im Halbraum, entgegengesetzt des Normalvektor

7 Anhang

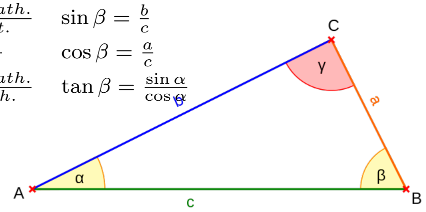
7.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	-$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkath.}{Hypot.}$ $\quad \sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankath.}{Hypot.}$ $\quad \cos\beta = \frac{a}{c}$
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Gegenkath.}{Ankath.}$ $\quad \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$1rad = 57.3°$



7.1.1 Logarithmus

$b^x = a \qquad ln(x) = y$
$x = \log_b a \qquad e^y = x$

Für Taschenrechner: $\log_2(100) \Rightarrow \frac{\log(100)}{\log(2)}$
ableiten:$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \Rightarrow f^(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

7.2 Flächenformel

Kugel:
Oberfläche $4\pi r^2$, *Volumen* $\frac{4}{3}\pi r^3$
Kreis:
Umfang $2\pi r$, *Fläche* πr^2
Zylinder:
$O_{mantel} 2\pi rh$, $O_{Deckel} 2 \cdot \pi r^2$, Volumen $\pi r^2 h$

Begriffe
Abszisse = x-Achse
Ordinate = y-Achse $\qquad$ z.B Ordinate: 15 ⇒ P(x,15)

Normalvektor

$4x-3y=0 \rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad Punkt(0,0) \quad 4\cdot 0-3\cdot 0=0$

$2x+7=0 \rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\quad Punkt(-\frac{7}{2},2) \quad 2\cdot -\frac{7}{2}-7=0$

Koordinatendarstellung herausfinden

$$A(3,5) \qquad \Rightarrow c=-\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad =-\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$
$$x+4y-23=0 \qquad =-(3+20)=-23$$

Gerade Lagen bestimmen

$g_1: 6x+y-9=0 \qquad g_2: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{n}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$SP: x=1+\lambda(-1) \qquad g_1: 6(1-\lambda)+(3+2\lambda)-9=0$
$y=3+\lambda(2) \qquad 6+3-9-6\lambda+2\lambda=0$
$\Rightarrow \lambda=0$
$\Rightarrow P(1,3)$

$$\text{Winkel: arccos}\frac{\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix}6\\1\end{matrix}\right|\cdot\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right|}=\frac{6\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{6^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=17.10°$$

gegenseitige Lage bestimmen

$$g_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\9\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix} \qquad g_2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-5\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$A_1\vec{A}_2\ \left[\ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2\right]=\begin{vmatrix}-10 & -5 & -5\\ 0 & 2 & -2\\ -8 & -4 & -4\end{vmatrix}=0$$

$$SP: \begin{pmatrix}7\\1\\9\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-5\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1, SP(2;3;5)$$

$$Schnittwinkel\ \theta: \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(-5)\cdot(-5)+2\cdot(-2)+(-4)\cdot(-5)=37$$
$$|\vec{v}_1|=\sqrt{(-5)^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{45}$$
$$|\vec{v}_2|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{45}$$
$$\Rightarrow \theta=\arccos(\frac{37}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{45}}=34.69°$$

Ebenen bestimmen

g.g.: $A(1;-2;3) \qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix}5\\8\\-3\end{pmatrix}$

Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}+\gamma\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\8\\-3\end{pmatrix}$$

Normalform:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\times\gamma\begin{pmatrix}5\\8\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\10\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Normalform: \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}=0$$

$$Skalarprodukt: \vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=-1-2+3=0$$

Koordinatengl. $\Rightarrow -x+y+z=0$

Ebenen bestimmen

g.g.: Koordinatengleichung E: $2x3y+4+5=0$

P bestimmen $A(-1;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

$\mathbf{\tilde{n}\cdot\tilde{v}=0}$ & $\mathbf{\tilde{n}\cdot\tilde{w}=0} \qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ erraten

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda,\gamma\in\mathbb{R}$$

Schnittgerade

g.g.: $E_1: 2x-8y+4z-7=0 \qquad E_2: x-4y-z-3=0$

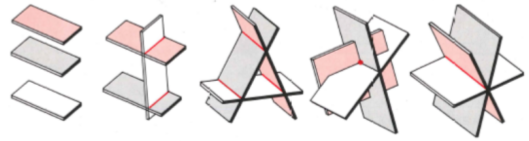
$$\begin{cases}x-4y-z & =-3\\ 2x-8y+4z & =7\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & -1 & -3\\ 2 & -8 & 4 & 7\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 6 & 13\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{6}\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 0 & -\frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{6}\end{array}\right)$$

$y=\lambda\Rightarrow x=4\lambda-\frac{5}{6}.z=\frac{13}{6}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\lambda-\frac{5}{6}\\\lambda\\\frac{13}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\0\\\frac{13}{6}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$$



(1) (2) (3) (4) (5)

$$1: E_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$E_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$2: E_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$E_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$3: E_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\ E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$E_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$4: E_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$E_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$5: E_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$E_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$