Physik

HS22 Aviatik ZHAW

Karen Klöti

11. Januar 2023

1 Bilanzieren

Extensive Grösse: addieren

- Masse
- Volumen
- Elektrische Ladung
- Energie
- Impuls
- Bier

Intensive Grösse: nicht addieren

- Temperatur
- Geschwindigkeit
- Druck
- Elektrische Spannung
- Alkoholgehalt

Bilanzgleichung Die Bilanzgleichung für eine extensive Grösse bezüglich eines Systems verknüpft deren Änderungsrate im System mit den Ursachen für die Veränderung:

- Zuflüsse oder Abflüsse (über Systemgrenzen)
- Quellen oder Senken (innerhalb Systemgrenzen)

Bsp. Volumen-Bilanzgleichung

$$\dot{V} = I_{vin} + I_{vout} + \pi_{vin} + \pi_{vout}) \sum_i I_{vi} + \sum_j \pi_{vi} +$$

Änderungsrate der Grösse im System = Summe über alle Zuflüsse, Abflüsse, Quellen und Senken dieser Grösse.

Anmerkung *Mit Bilanzgleichungen können Vorhersagen zur zeitlichen Entwicklung von Systemen gemacht werden.*

- *Wie schnell findet eine Veränderung statt?*
- *Welchen Wert erreicht eine Grösse zu einem bestimmten Zeitpunkt?*

1.1 mittlere Änderungsrate

mittlere Änderungsrate (Sekante)

$$\frac{\Delta G_{t_1 - t_2}}{\Delta t}(t_1) = \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1}$$

1.2 momentane Änderungsrate

momentane Änderungsrate (Tangente)

$$\frac{dG}{dt}(t_1) = \lim_{t_2 - t_1} \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{G}$$

Bilanzgleichung mathematisch: $I_{G,i}(t)$ für Zu-oder Ablfüsse und $\Pi_{G,i}(t)$ für Produktkonsraten der Grösse G ($\Delta G t_1 \to t_2$ ist die Änderung von G(t))

$$\dot{G}(t) = \sum_i I_{G,i}(t) + \sum_j \Pi_{G,i}(t)$$

$$\Delta G_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{G}(t)dt = \sum_i \int_{t1}^{t2} I_{G,i}(t) + \sum_j \int_{t1}^{t2} \Pi_{G,i}(t)$$

$$\dot{V}(t) = I_{V,in}(t) + I_{V,out}(t) + \Pi_{V,Regen}(t) + \Pi_{V,Verdunsten}(t)$$

2 Impuls und Kraft

2.1 Newtonsche Axiome

- **1. Newtonsche Gesetz (Trägheisprinzip)**
  Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung so lange bei, bis er durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

  $$\vec{F}_{res} = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = const.$$

- **2. Newtonsche Gesetz (Aktionsprinzip)**
  Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so wird er in Richtung der Kraft beschleunigt. Die Beschleunigung ist dabei direkt proportional zur Kraft und indirekt proportional zur Masse des Körpers.

  $$\vec{F_{res}} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \begin{pmatrix} F_{resx} \\ F_{resy} \\ F_{resz} \end{pmatrix} = \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p_x} \\ \dot{p_y} \\ \dot{p_z} \end{pmatrix}$$

- **3. Newtonsche Gesetz (Reaktionsprinzip)**
  Besteht zwischen zwei Körpern 1 und 2 eine Kraftwirkung, so ist die Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 auswirkt, gleich der Kraft, die Körper 2 auf Körper 1 auswirkt.

  $$\vec{F}_{2\to 1}(t) = -\vec{F}_{1\to 2}(t)$$

  Anmerkung *Die Newton Gesetze sind nur in Inertialsystemen (unbeschleunigte Systeme) und für $\vec{v}$ viel kleiner als c Lichtgeschwindigkeit.*

2.2 Impuls

2.2.1 Impuls

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}} = \Delta t \cdot \vec{F} \qquad \left[\frac{kg \cdot m}{s}\right] = \left[\frac{N}{s}\right]$$

2.2.2 Betrag

$$||\,\vec{p}\,|| = ||\,m\vec{v}\,|| = |\,m\,| \cdot ||\,\vec{v}\,|| = mv \qquad mit\ v = ||\,\vec{v}\,||$$

2.2.3 Impulsbilanz(=2.Newtonsche Gesetz)

$$\dot{\vec{p}} = 0 = \begin{pmatrix} \dot{p_x} \\ \dot{p_y} \\ \dot{p_z} \end{pmatrix} = \sum_i I_{\vec{p},i} = \begin{pmatrix} \sum_i I_{\vec{px},i} \\ \sum_i I_{\vec{py},i} \\ \sum_i I_{pz,i} \end{pmatrix}$$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1' v_1' + m_2' v_2'$$

$$\Rightarrow m_1 v_1(t_1) + m_2 v_2(t_1) = m_1 v_1(t_2) + m_2 v_2(t_2) \Rightarrow \Delta(m_2 v_2) = -\Delta(m_1 v_1)$$

2.2.4 Impulsänderungsrate und Beschleunigung

$$\boxed{\dot{p} = \vec{F} = m\vec{a}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0} \cdot \vec{v} + m \cdot \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}}$$

$$F = \frac{\Delta p}{t} \qquad E_{kin} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

$m_1 v_{1,A} + m_1 v_{1,E} = m_2 v_{2,A} + m_2 v_{2,E}$ (Impulserhaltung)
$v_{2,E} - v_{1,E} = -(v_{2,A} - v_{1.A})$ (mechanische Energieerhaltung)

3 Kraft, Leistung und Energie

3.0.1 Wirkungsgrad

$\eta = \frac{P_{Nutzen}}{P_{Aufwand}}$ **Dissipierte Energie**: $E_{term} \to$ irreversibel an Umgebung

3.1 Arbeit [J]

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \qquad dW_F = F(s) \cdot ds$$

Arbeit [J] einer Kraft entlang eines Pfads

$$W_{F,s_1 \to s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} \qquad [J]$$

Leistung [W](Arbeit pro Zeit) einer Kraft entlang eines Pfads

$$P_F(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) \qquad [W]$$

Arbeit [J] einer Kraft bei bekannter Leistung

$$W_{F,t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_F(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \cdot \vec{v}dt$$

$\to$ meist bei einem geg. Graphen:
$p_1' = m_1 \cdot v_1 = p_1 + \Delta p_1 = p_1 + \int F(t)dt$

3.1.1 kinetische Energie

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

Elastisch (Sym. Flüssligkeitsmodell): $E_{kin} = 0$
Stoss voll elastisch: $v_1 = v_{tot} - (v_{start} - v_{tot}), v_2 = 2 \cdot v_{tot} - v_{start}$
Änderung der kin. Energie ist gleich der verrichteten Arbeit

$$\Delta E_{kin,t_1 \to t_2} = W_{F_r t_1 \to t_2}$$

Herleitung

$$\frac{d}{dt} E_{kin}(t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{d}{dt}(v(t)^2)$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)^2) = 2 \cdot v(t) \cdot \dot{v}(t) = 2 \cdot v(t) \cdot a(t)$$

$$\frac{d}{dt} E_{kin}(t) = \underbrace{m \cdot a(t)}_{=F(t)} \cdot v(t)$$

$$\Delta E_{kin,t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} E_{kin}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{F(t) \cdot v(t)}_{=P_F(t)} dt = W_{F,t_1 \to t_2}$$

3.1.2 Reibung

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g \cdot l_{A \to B}$$

3.1.3 potenielle Energie

$$E_{pot,G} = m \cdot g \cdot H$$

3.1.4 mechanische Energie

$$E_{mech}(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$$

3.1.5 disspersions Energie

$$E_{diss} = \Delta W_{sys} = \Delta p \cdot \frac{1}{2}(\Delta v_I + \Delta v_F)$$

$$= m_1(v_1 - v_A) \cdot \frac{1}{2}(v_1 - v_2) \quad v_A = beim\ Stoss$$

3.1.6 Bilanzierung

Änderungsrate von E_{mech} ist gleich der Summe der Leistungen aller am System angreifender Kräfte.

$$\dot{E}_{mech}(t) = \sum P_{F,i}(t)$$

$$\Delta E_{mech,t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_{mech}(t) dt$$

Energieänderung zwischen zwei Zuständen eines 2-Körpersystems bei Impulsübertragung

$$\Delta E_{kin,t_1 \to t_2} = \Delta p_{t_1 \to t_2} \cdot \frac{1}{2}(\Delta v_{t_1} + \Delta v_{t_2})$$

$$= \Delta p \cdot \frac{1}{2}(\Delta v_F) = m_1(v_1 - v_A) \cdot \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$$

3.2 Auftrieb und Luftwiederstand

Druckkraft $F_D = pA$

3.2.1 Auftriebskraft

statische Auftriebskraft in Fluid

$$\vec{F_A} = -m_{Fl} \cdot \vec{g} = -\rho_{Fl} \overbrace{V}^{l \cdot A} \cdot \vec{g}$$

Hängt nur vom Volumen des Körpers und der Dichte des Fluids ab (verdrängte Fluidmasse), Dichte des Körpers hat keinen Einfluss
*Die **statische Auftriebskraft** entspricht demnach der **resultierenden Druckkraft** $\vec{F}_D$ auf den Körper*

Druckkraft (Druck x Fläche) $||\vec{F}_D|| = F_D = pA$

Hydrostatischer Druck (Einzauchtiefe z) $p(z) = p_0 + \rho_{Fl} g z$

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{mg}{A} = \rho g h = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho A h g}{A}$$

3.2.2 aerodynamische Kraft $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{Aero}}$

Anströmgeschw. ν_∞
Anströmrichtung$\vec{\nu}_\infty$
Luftdichte ρ_∞
Anstellwingel angle of attack α
Längsneigungswinkel pitch θ
L=lift und D=drag

$$\vec{F_{Aero}} = \vec{F_L} + \vec{F_D}$$

$\vec{F_L} \perp \vec{\nu_\infty}$ und $\vec{F_D} \parallel \vec{\nu_\infty}$

dynamischer Druck

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty \nu_\infty^2$$

dynamische Auftriebskraft und Luftwiderstand

$$F_L = \frac{1}{2} \rho_\infty \nu_\infty^2 \cdot c_L \cdot A$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_\infty \nu_\infty^2 \cdot c_D \cdot A$$

Richtung der Kräfte immer in Anströmrichtung

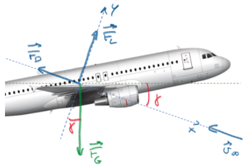
Gleitverhältnis der Widerstand und Auftriebswerte

$$\frac{c_D}{c_L} = \tan \gamma$$

$$c_D = \frac{F_D}{q_\infty \cdot A} \cdot \frac{1}{c_L} = \frac{F_L}{q_\infty \cdot A}$$

4 Technische Mechanik

Gleitflug



1. Freischneiden und Kräfte einzeichnen, x- und y-Achsen bestommen
2. Impulsbilanz aufstellen

$$\vec{F}_L + \vec{F}_D + \vec{F}_G = \dot{\vec{p}}$$

3. Vektorkomponentenform

$$\vec{F}_G = \begin{bmatrix} F_G \cdot \sin \gamma \\ -F_G \cdot \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ F_L \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_D = \begin{bmatrix} -F_D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix}$$

mit $F_L = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_L \cdot A$ und $F_D = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 \cdot c_D \cdot A$

4. x- und y Gleichung aufstellen, Rahmenbedingungen!

$$\begin{cases} x: & F_G \cdot \sin \gamma - F_D & = \dot{p}_x & = 0 \\ y: & -F_G \cdot \cos \gamma + F_L & = \dot{p}_y & = 0 \end{cases}$$

5. Gleitwinkel γ bestimmen $\Rightarrow$max. StreckeΔx finden

$$\begin{cases} x: & F_G \cdot \sin \gamma & = F_D & = & \frac{1}{2} \rho_\infty v \infty^2 \cdot c_D \cdot A \\ y: & -F_G \cdot \cos \gamma & = F_L & = & \frac{1}{2} \rho_\infty v \infty^2 \cdot c_L \cdot A \end{cases}$$

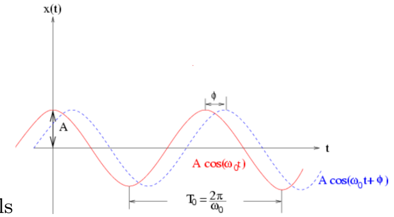
$\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{c_D}{c_L} \Rightarrow = \tan$
$\Delta x = \frac{\Delta h}{tan \gamma} = \Delta h \cdot$ Gleitzahl

Je kleiner das Gleitverhältnis /je grösser die Gleitzahl, desto kleiner der Gleitwinkel und eine umso weitere Strecke Δxkann das Flugzeug für einen bestimmten Höhenverlust Δh zurücklegen.

5 Mechanische Schwingungen

5.1 Freier harmonischer Oszillator

5.1.1 Federkraft



$F_F(t) = -k_F \cdot x(t) = m \cdot a_x$
$E_F = \frac{1}{2} k_F \Delta l^2$
k_f = Federkonstante $\Rightarrow \left[\frac{N}{m}\right]$

5.1.2 Bewegungsgleichung

des ungedämften Federpendels

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

5.1.3 allg. Bewegungsgleichung

freier harmonischer Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

5.1.4 allg. Lösung

$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta)$ Position/Auslenkung
$v(t) = \dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta)$ Geschwindigkeit
$a(t) = \ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta)$ Beschleunigung

A=Amplitude
ω_0 = *Kreisfrequenz*
δ =*Phasenverschiebung*

5.1.5 Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

5.1.6 Geschwindigkeit

$$\nu(t) = \dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta)$$

5.1.7 Beschleunigung

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{k_F}{m} \cdot x \qquad [A] = \frac{m}{s^2}$$

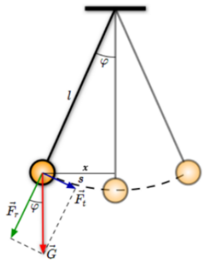
Frequenz $v = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_F}{m}}$ $\quad [v] = s^{-1} = Hz$

Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $\quad [\omega] = \frac{rad}{s}$

Ortsfunktion (ungedämpftes Federpendel) $x(t) = x_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{k_F}{m}} \cdot t)$

Energie des harmonischen Oszillators
$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} k_F A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$
$E_{pot} = \frac{1}{2} k_F (x - x_0)^2$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$
Energie des ungedämpften Federpendels
$E_{Sys} = E_{kin}(t) + E_F(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \nu^2(t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x(t)^2$

5.2 Mathematisches Pendel



φ Auslenkwinkel mit $\sin(\varphi) = x/l$
l Länge des Pendels
s Auslenkung des Pendels | $s = l \cdot \varphi$
G Erdanziehung | $G = m \cdot g$
F_r *Kraftkomponente in Richtung Faden*
F_t *tangentielle Kraftkomponente*
m Masse des Pendels
g Erdbeschleunigung $= 9{,}81\, m/s^2$

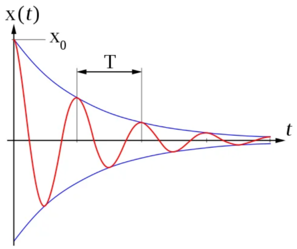
$F(t) = -mg\sin(\varphi(t)) = m \cdot a(t)$
↳ Masse hat keinen Einfluss auf die Bewegung

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu_{LR}}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$$

Tangentialkraft: $F_t = ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$
Auslenkung: $s = l \cdot \varphi$
Für kleine Winkel: $\omega_{math} = \sqrt{\frac{g}{l}}, T_{math} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

5.3 Linear gedämpfter Oszillator

Jedes System kommt nach einiger Zeit zur Ruhe, denn dem schwingenden System wird durch Reibungskräfte Energie entzogen und in Wärmeenergie umgewandelt.



5.3.1 Reibungskraft

$$F_R = -\mu_{LR} \cdot \nu(t) = -\mu\dot{x}(t)$$

5.3.2 Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu_{LR}}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

5.3.3 allg. Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \cdot \dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$
$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \delta)$$

Kreisfrequenz $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\mu_{LR}}{2m})^2}$
Periode $T = \frac{2\pi}{w_d}$
Dämpfungskonstante: $b = \mu_{LR}$
Resonanzfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Dämpfungskoeff.: $\gamma = \frac{\mu_{LR}}{2m}$
Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{2\gamma}$
Gütefaktor $Q = 2\pi \cdot \left(\frac{\Delta E_{Sys,k\to k+1}}{E_{Sys,k}}\right)^{-1} = \omega_d \cdot \tau$

Fälle vom Dämpfung
1. $\mu > \omega_0$ *(überdämpft): Osz. schwingt nicht, geht asymptotisch in Ruhelage.*

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} > 0 \in \mathbb{R}$$

2. $\mu = \omega_0$ *(kritische Dämpfung): Min. Zeitaufwand zum Erreichen des Gleichgewichts.*

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda_0 t} + B \cdot e^{\lambda_0 t}, \quad \lambda_0 = -\mu$$

3. $\mu < \omega_0$ *(schwache Dämpfung):*
Der Oszillator schwingt mit abnehmender Amplitude.

$$x(t) = A \cdot e^{(-\mu + i\omega')}t + B \cdot e^{(-\mu - i\omega')}t$$

5.4 Harm. angeregter, linear gedämpfter Oszillator

5.4.1 harmonische Anregung

$$F_A(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$$

5.4.2 Kräfte

$$F_F(t) = -k \cdot x(t) \qquad F_R = -\mu_{LR} \cdot v(t) \qquad F_A(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$$

5.4.3 Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu_{LR}}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$$

5.4.4 allg. Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \cdot \dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = s(t)$$
$x(t) = A(\omega_A) \cdot \cos(\omega_A \cdot t - \delta(\omega_A))$ mit Störfkt. $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$

Amplitude $A(\omega_A) = \frac{\hat{s}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega_A^2}}$
Phasenverschiebung $\delta(\omega_A) = \tan^{-1}(\frac{2\gamma \cdot \omega_A}{\omega_0^2 - \omega_A^2})$
Resonanzfrequenz $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
Gütefaktor $Q \approx \frac{A(\omega_R)}{A_{stat}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Δ pro T aufgenommene Leistung $P(\omega_A) = \frac{F_0^2 \cdot \mu_{LR} \cdot \omega_A^2}{2 \cdot [m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + (\mu_{LR} \cdot \omega_A)^2]}$
Leistung mit Resonanz $max(P(\omega_a)) = P(\omega_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2}{\mu_{LR}}$

5.4.5 Federpendel-Schwingung

Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f$
Abklingkonst. $\gamma = \frac{\mu_{LR}}{2m}$
Störfkt. $s(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$
Amplitude $A(\omega_A) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + (\mu_{LR} \cdot \omega_A)^2}}$
Phasenverschiebung $\delta(\omega_A) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_{LR} \cdot \omega_A}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)}\right)$

6 Kreisbewegung und Tragheitskräfte

6.0.1 gleichförmige Kreisbewegung

$\boxed{a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$ $\Rightarrow v = w \cdot r^2$

6.1 Winkelgeschwindigkeit

6.1.1 mittlere Winkelgeschw.

$$\overline{\omega}_{t_1 \to t_2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{mit } \theta = \text{Winkel}$$

6.1.2 momentane Winkelgeschw.

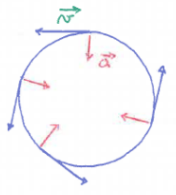
$$\omega = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$

Radialbeschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r}$
Bogenlänge auf Kreis $s(t) = \theta(t) \cdot r$
Winkelbeschleunigung $v(t) = \omega(t) \cdot r$

6.2 gleichförmige Bewegung (w=konst., a=0)

6.2.1 Periode

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$



6.2.2 Frequenz

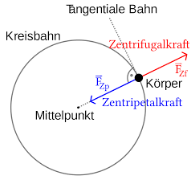
$$f = \frac{1}{t} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi r}{v}$$

6.2.3 Beschleunigung gleichförmiger Kreisbewegung

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) = \vec{a_t}(t) + \vec{a_r}(t)$$

$$||\vec{a}_r|| = \boxed{a_r = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}}$$

radial nach innen
$\vec{F_{res}}$ muss zentripetal sein.
$F_{res} = m \cdot a$



6.2.4 Zentripetalbeschleunigung

$\boxed{a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$

6.2.5 Allg. Kreisbewegung

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$$

$$\dot{v}(t) = \vec{a}_t(t) \perp \vec{a}_r(t) = \frac{v^2(t)}{r} \text{ falls } \vec{v} = const, \text{dann } \vec{a}_t(t) = 0$$

6.3 Zentripetal-und Radialkraft

$$\vec{F}_{res}(t) = \underbrace{\vec{F}_{res,t}(t)}_{tangential} + \underbrace{\vec{F}_{res,t}(t)}_{zentripetal}$$

$\vec{F}_{res,t}$ tangenziale Anteil (Veränderung des Geschwindigkeitsbetrag / $\vec{F}_{res,r}$ radialer Anteil (Änderung der Kreisbahngeschwindigkeitsrichtung, wenn die Kreisbewegung gleichförmig ist, verschwindet $\vec{F}_{res}$ und die gesammte res. Kraft zeigt inn Richtung Kreisbahnmittelpunkt (zentripetal)

7 Gravitation und Trägheitsfeld

7.1 Newtonsches Gravitationsgesetz

$G = (6.67430 \pm 0.00015) \cdot 10^{-11} N \cdot \frac{m^2}{kg^2}$

7.1.1 Gravitationskraft

$$\vec{F}_{G,12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_12}$$

$$\parallel \vec{F}_{G,12} \parallel = \parallel \vec{F}_{G,21} \parallel = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad \text{(Betrag)}$$

7.1.2 Gravitationsfeld

$$\vec{g}(P) = \frac{\vec{F}_G(m,P)}{m}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{kugelsymmetrischer Körper}$$

$$||\vec{g}(\vec{r})|| = g(r) = \frac{GM}{r^2} \quad \text{Stärke}$$

Bsp.

$$g(r_E) = \frac{GM_E}{r_E^2} = \frac{\overbrace{6.674 \cdot 10^{-11}}^{Grav.Feldstaerke} \cdot \overbrace{5.972 \cdot 10^{24}}^{Masse\ der\ Erde}}{\underbrace{(6.375 \cdot 10^6)}_{Radius\ Erde}{}^2} \frac{N}{kg} = 9.81 \frac{N}{kg}$$

7.1.3 Gravitationsfeldstärke

$$||\vec{g}(P)|| = g(P) = \frac{||\vec{F}_G(m,P)||}{m}$$

7.1.4 Trägheit

$$\vec{g}_{träg} = -\vec{a}_S = \vec{g}_t \quad \text{Trägheitsfeld im Innern des beschl. Systems}$$
$$\vec{g}_{lokal} = \vec{g} + \vec{g}_{träg} \quad \text{Lok. Gravitationsfeld im beschl. System}$$

7.2 Rotierende Bezugssysteme

7.2.1 Zentrifugalkraft

Zentrifuge / Trägheitskraft

$$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2 r \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad F_{ZF} = m\omega^2 r (Betrag)$$

Beispiel $r = 29ft = 8.84m$, *max Drehzahl* $50RPM$

$$\omega_{max} = \frac{50\frac{U}{min} \cdot 2\Pi \frac{rad}{U}}{60\frac{s}{min}} = 5.24\frac{rad}{s}$$

$$a_{r,max} = \omega_{max}^2 \cdot r = (5.24\frac{rad}{s})^2 \cdot 8.84m = 243\frac{m}{s^2} = 24.8 \cdot 9.81\frac{m}{s^2}$$

Beschleunigung von 24.8G

7.2.2 Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{\nu}) \qquad F_C = 2m \cdot \omega\nu \cdot \sin\angle(\vec{\omega}, \vec{\nu})$$

8 Impuls und Energiebilanz-offenes System

abgeschlossen: *weder Masse noch Energie mit Umwelt austauschen (Energie bleibt erhalten).*
geschlossen: *System kann E mit Umgebung austauschen, keine Masse.*
offen: *System kann Energie/Masse mit Umwelt austauschen.*

8.0.1 Bernoulli

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho\nu^2 + \rho gh = const}$$

$$h_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{p_0}{\rho g} = h_1 + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g}$$

Bernoulli Effekt/hydrodynamische Paradoxon: laminare Strömung Die Strömungsgeschwindigkeit steigt im verengten Rohrstück, aber der Druck sinkt gleichzeitig! Energieerhaltung: $\dot{W} = I_{W1} + I_{W2} = 0$

8.1 offenes System

8.1.1 Impulsbilanz

$$\sum_i \vec{F}_{Ob,i} + \sum_i \vec{F}_{K,i} + \sum_i \vec{I}_{p,konv,i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

8.1.2 Impulsstrom

$$\vec{I}_{p,konv} = I_m \cdot \vec{\nu}_m \qquad I_m(t) = \rho \cdot I_V(t) \text{ Massestrom}$$
$$= \dot{m}v_a + ma_x$$

Volumenstrom

$$I_V(t) = v \cdot A$$

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(h_E - h_A) \cdot A}{\Delta t}$$

Massenbilanz

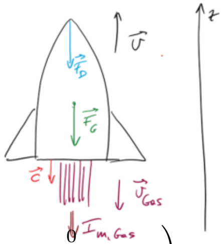
$$\sum_i I_{m,i}(t) = \dot{m}(t)$$

Satz von Toricelli

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) + 2g(h_2 - h_1)}$$

8.1.3 Rakete mit Graviation



1. Freischneiden + Kräfte einzeichnen
Impulsstrom: $\vec{I}_{p,konv,Gas} = I_{m,Gas} \cdot \vec{v}_{Gas}$
3. Impulsbilanz

$$\vec{F}_D + \vec{F}_G + I_{,m,Gas} \cdot \vec{v}_{Gas} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4. Bezugssystem - Vektorkomponente

$$\vec{I}_{p,konv,Gas}(t) = I_{m,Gas}(t) \cdot \vec{v}_{Gas}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{m,Gas}(t) \cdot v_{Gas}(t) \end{pmatrix}$$

5. Impulsbilanz in skalarer Form

$$-F_d(t) - m(t)g(t) + I_{m,Gas}(t) \cdot v_{Gas}(t) = \dot{p}_z(t)$$

6. Bewegungsgleichung (Luftwiderstand vernachlässigen, g(t)=konst.

$$-m(t)g_0 + I_{m,Gas}(t) \cdot \overbrace{(v_z(t) - c)}^{=v_{Gas}(t)} = \overbrace{\dot{p}_z(t)}^{\frac{d}{dt}m(t)\cdot v_z(t)}$$

$$-m(t)g_0 + I_{m,Gas}(t) \cdot (v_z(t) - c) = \overbrace{\dot{m}(t)}^{I_{m,Gas}(t)} \cdot v_z(t) + m(t) \cdot v_z(t)$$

$$-m(t)g_0 - I_{m,Gas}(t) \cdot c = m(t) \cdot \dot{v}_z(t)$$

$$\Rightarrow \dot{v}_z(t) = -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \cdot c - g_0$$

7. Bewegungsgl. lösen $v_z(0) = 0$

$$\int_0^t \dot{v}_z(t)dt = \int_0^t \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \cdot c dt - \int_0^t g_0 dt = -c \cdot [ln(m(t))]_0^t - [g_0 t]_0^t$$

$$\Rightarrow v_z(t) = -c \cdot ln\frac{m(0)}{m(t)} - g_0 t$$

8.1.4 Energiebilanz

Leistung der Druckkraft mit Volumenstrom I_V

$$I_{W_p} = p \cdot I_V$$

$$p(t) = \Delta p(t) \cdot I_V$$

Energie

$$\int_0^{\Delta t} P(t)dt \to \text{Graph}$$

dissp. Energie

$$\int_0^{\Delta t} P_{diss}dt = P_{diss} \cdot \Delta t = k_v \cdot I_v^3 \Delta t$$

E_{kin} der Flüssigkeit

$$I_{W_{kin}1} = \frac{1}{2} \underbrace{I_{m1}}_{\rho I_{V1}} v_1^2$$

E_{pot} der Flüssigkeit

$$I_{W_{potG}1} = \underbrace{I_{m1}}_{\rho I_{V1}} \cdot g h_1$$

Innere Energie der Flüssigkeit

$$I_{W_i1} = \omega_i \underbrace{I_{m1}}_{\rho I_{V1}}$$

Gesamtbilanz - Energiestrom

$$I_{W1} = I_{W_p1} + I_{W_{kin}1} + I_{W_{pot}1} + I_{W_i1}$$

$$I_{W2} = I_{W_p2} + I_{W_{kin}2} + I_{W_{pot}2} + I_{W_i2}$$

$$\dot{W} = I_{W1} + I_{W2} \text{ und } I_{V1} = -I_{V2}$$

$$\dot{W} = (p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + \omega_i \rho) \cdot I_V - (p_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_2 + \omega_i \rho) \cdot I_V$$

9 Koordinaten

9.0.1 Polarkoordinaten

$$\Phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r, \varphi)) = r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

9.0.2 Zylinderkoordinaten

$$\Phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r, \varphi, h)) = r$$

$$\vec{v} = r\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\vec{e}_r + z\dot{\vec{e}}_z + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = r\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

9.0.3 Kugelkoordinaten

$$\Phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(r, \varphi, h)) = r^2 \sin(\vartheta)$$

Anmerkungen: ϑ = Polarwinkel und Winkel zwischen Polrichtung und Punkt P auf Kugeloberfläche; φ ist der Azimutwinkel und der gleiche Winkel wie bei den Polar- bzw. Zylinderkoordinaten

10 Kinematik

10.1 Rotation und Geschwindigkeit

10.1.1 Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

10.1.2 Geschwindigkeitsvektor

$\boxed{\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$ Punkt des 2-dim. starren Körpers

$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$ Punkt auf dem rotierenden starren Körper

10.1.3 Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) \qquad v(t) = ||\vec{v}(t)|| = r \cdot |\omega(t)|$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\dot{w}t^2 + w_0 \cdot t + \theta_0$$

$$v(t) = ||\vec{v}(t)|| = ||\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)|| = ||\vec{\omega}(t) \cdot \vec{r}(t)|| \cdot \sin\underbrace{\angle(\vec{\omega}(t), \vec{r}(t))}_{=\pi/2} = |\omega(t)| \cdot r$$

10.2 Rotation und Beschleunigung

10.2.1 Beschleunigungsvektor $\omega = const$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}\right] = -r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a(t) = ||\vec{a}(t)|| = r \cdot \omega^2}$$

Richtung $\tan\varphi = \frac{a_r(t)}{a_t(t)}$

10.2.2 Beschleunigunsvektor $\omega \neq const$

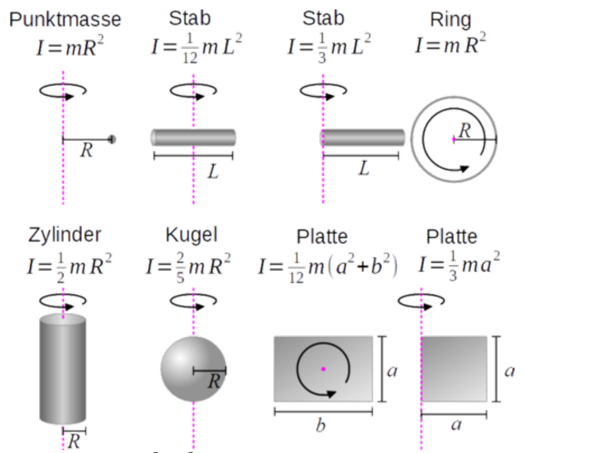
$\boxed{a_t(t) = ||\vec{a}_t(t)|| = r \cdot |\dot{\omega}(t)|}$ $\overbrace{\textbf{Tangential}}^{linear}$ **beschleunigung**

$a_r(t) = ||\vec{a}_r(t)|| = r \cdot \dot{\omega}^2(t)$ **Radial-/Zentripetalbeschl.**

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)}_{=\vec{a}_t(t)} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{=\vec{a}_r(t)}$$

$$||\vec{a}(t)|| = \sqrt{\vec{a}_t(t)^2 + \vec{a}_r(t)^2}$$

10.3 Trägheitsmomente



Hohlzylinder: $J = m\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ Kegel: $J = \frac{3}{10}mr^2$ $\quad [kg \cdot m^2]$

10.3.1 Satz von Steiner

$$J_A = J_{MMP} + md^2$$

10.4 Massenmittelpunkt MMP

10.4.1 MMP (Mehrteilchensystem)

$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k$$

10.4.2 MMP (kontinuierliche Massenverteilung mit Dichte $\varrho(\tilde{\mathbf{r}})$)

$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\cdot\varrho(\vec{r})dV$$

10.4.3 MMP (starrer Körper mit Masse $\mathbf{m_i}$ MMP $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{MMP,i}}$)

$$\vec{r}_{MMP} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_{MMP,i}$$

10.4.4 Dynamik des MMP

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\cdot\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_{MMP}) = m\cdot\vec{a}_{MMP}$$

10.5 Allg. ebene Bewegung

10.5.1 Geschwindigkeit

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_P(t) + \vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{PB}(t)$$

10.5.2 Beschleunigung

$$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_P(t) + \dot{\vec{\omega}}(t)\times\vec{r}_{PB}(t) + \vec{\omega}(t)\times\left(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{PB}(t)\right)$$

10.5.3 Momentanpol

$$\vec{r}_{PM}(t) = \frac{\vec{\omega}(t)\times\vec{v}(t)}{\omega^2(t)}$$

10.6 Drehmoment $\vec{\mathcal{M}}$

10.6.1 Drehmoment der Kraft $\vec{F}_Q$die in Q angreift, bezüglich Punkt S

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_Q,P} = \vec{r}_{PQ}\times\vec{F}_Q$$

10.6.2 Drehmoment Betrag

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_Q,P} = r_{PQ}\cdot F_Q\cdot\sin\angle(\vec{r}_{PQ},\vec{F}_Q) = F_Q\cdot r_{PQ,\perp}$$

10.6.3 Reibungsrehmoment

$$M_{reib} = -\dot{L} = -J\cdot\dot{\omega}$$

10.6.4 Res. Drehmoment

$$\vec{\mathcal{M}}_{res,P} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{i,P} \qquad \vec{\mathcal{M}} = \vec{f}_{SQ}\times\vec{F} \qquad \text{Angriffspunkt S und Q}$$

10.7 Drehimpuls $\vec{L}$

10.7.1 Drehimpuls

$$\vec{L}_P = \vec{r}_{PQ}\times\vec{p} = J_p\cdot\vec{\omega} \qquad \left[\frac{kgm^2}{s}\right]$$

$$\Delta L = \int M_B dt = M_B\cdot\Delta t$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_P = \sum\vec{\mathcal{M}}_P$$

$$= 0 \text{ wenn keine ext. Drehmomente angreifen}$$

Bei 2 Bewegungen immer $L_{Eigen} + L_{Bahn}$ mit $L_{Bahn} = mr^2\omega_{Bahn}$

10.7.2 Massenträgheitsmoment und Drehimpuls

einer Punktmasse mit Massenträgheitsmoment J_P und Winkelgeschw. $\vec{\omega}$ um P.

$$J_p = m\cdot r_{PQ}^2 \qquad \vec{L}_P = J_P\cdot\vec{\omega}$$

entlang Drehachse

$$J_{\vec{\omega}} = \sum_i m_i\cdot r_i^2\perp \qquad L_{\vec{\omega}} = J_{\vec{\omega}}\cdot\omega$$

um Haputträgerachse

$$J_{HTA} = \sum_i m_i\cdot r_i^2\perp \qquad L_{\vec{HTA}} = J_{HTA}\cdot\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{MMP}^{Eigen} = J_{MMP}\cdot\vec{\omega}$$

Die zetiliche Drehimpulsänderungsrate eines Körpers ist gleich der Summe aller externen Drehmomente, die auf den Körper wirken. (giltet nur im Inertialsystem)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_P = \sum\vec{\mathcal{M}}_{ext,P} \qquad \frac{d}{dt}\vec{L}_{MMP} = \sum\vec{\mathcal{M}}_{ext,MMP}$$

$$\sum\mathcal{M}_{ext} = J\cdot\dot{\vec{\omega}}$$

Ist die Summe der externen Drehmomente auf ein System gleich Null, dann bleibt der Drehimpuls des Systems erhalten:

$$\sum\mathcal{M}_{ext,P} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_P = 0 \qquad \Rightarrow \vec{L}_P = const.$$

10.8 Drehimpuls und Energie

10.8.1 kinetische Rotationsenergie

2-dimensional

$$W_{kin,rot} = \sum_i \frac{1}{2}\cdot m_i\cdot v_i^2 = \frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2$$

um fixe Achse

$$W_{kin,rot} = \frac{1}{2}\cdot J_{\vec{\omega}}\cdot\omega^2$$

10.8.2 kinetische Energie des starren Körpers bei freier ebener Bewegung

$$W_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{MMP}^2}_{W_{kin,trans,MMP}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot J_{MMP}\cdot\omega^2}_{W_{kin,rot,MMP}}$$

$$\Delta E_{kin_{I\to F}} = \Delta L\cdot\frac{1}{2}(\Delta\omega_I + \Delta\omega_F)$$

$$= J\cdot(w_1 - w_{gleich})\cdot\frac{1}{2}(w_1 - 2_2)$$

10.8.3 Leistung feste Drehachse

$$P_{\vec{\mathcal{M}}} = \frac{dW_{\vec{\mathcal{M}}}}{dt} = \mathcal{M}_{\vec{F}}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \mathcal{M}_{\vec{F}}\cdot\omega$$

10.8.4 Arbeit

Drehung von θ_1 nach θ_2 bei fester Achse

$$W_{\vec{\mathcal{M}}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathcal{M}_{\vec{F}}(\theta)\cdot d\theta$$

des Drehmoments und $E_{kin,rot}$ bei fester Drehachse

$$W_{\vec{\mathcal{M}}} = \Delta W_{kin,rot}$$

10.9 Drehimpuls und Flüssigkeitsmodell

10.9.1 Drehimpulsbilanz

Drehimpuls Änderungsrate im System = Summe über alle Drehimpuls-Zuflüsse und -Abflüsse

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_i \overbrace{\vec{I}_{L,i}(t)}^{Drehimpulsströme} = \sum_i \overbrace{\vec{\mathcal{M}}_i(t)}^{Drehmomente}$$

$$= J\cdot\dot{w}_z \qquad = \vec{M}_{\vec{F}_N} + \vec{M}_{\vec{F}_G} + \vec{M}_{\vec{F}_{HR}} = F_R\cdot r + F_F\cdot$$

10.9.2 Drehimpulsstrom der Energie

$$I_W(t) = I_L(t)\cdot\omega(t)$$

10.9.3 Drehimpulsübertragung

$$P(t) = I_L(t)\cdot\Delta\omega(t)$$

10.9.4 Energieänderung

zwischen zwei Zuständen bei Drehimpulsübertrag

$$\Delta W_{sys,t_1\to t_2} = \Delta L_{t_1\to t_2}\cdot\frac{1}{2}(\Delta\omega(t_1) + \Delta\omega(t_2))$$

10.10 Eigen- und Bahndrehimpuls

10.10.1 Eigendrehimpuls

$$\vec{L}^{Eigen}_{MMP} = J \cdot \vec{\omega}$$

10.10.2 Bahndrehimpuls

$$\vec{L}^{Bahn}_{O} = \vec{r}_{MMP} \times m \cdot \vec{v}_{MMP}$$

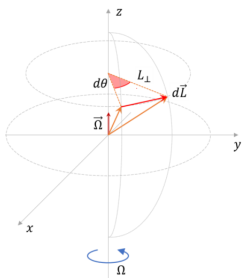
10.10.3 Drehimpuls

$$\vec{L}_0 = \vec{L}^{Bahn}_{O} + \vec{L}^{Eigen}_{MMP}$$

10.11 Schwenkbewegung

10.11.1 Präzessionsgeschwindigkeit des Kreisels

$$\Omega = \frac{\overbrace{d\theta}^{\frac{dL}{L\cdot\sin\phi}}}{dt} = \frac{\overbrace{\mathcal{M}_G}^{m\cdot g\cdot r\perp}}{L\cdot\sin\phi}$$
$$= \frac{m\cdot g\cdot r_{MMP}\cdot\sin\phi}{L\cdot\sin\phi}$$
$$= \frac{m\cdot g\cdot r_{MMP}}{L}$$



10.11.2 Drehmoment

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$$\mathcal{M} = \frac{dL}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot L \cdot \sin\phi = \Omega \cdot L \cdot \sin\angle(\vec{\Omega}, \vec{L})$$

11 Umwucht

11.1 Statische Umwucht

Rotationsachse geht durch den Mittelpunkt
Im Falle einer statischen unwucht wirkt iene gleich grosse, und quer zur Drehachse gerichtete Kraft auf beide Lager. Der Betrag dieser Kraft steigt quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit.

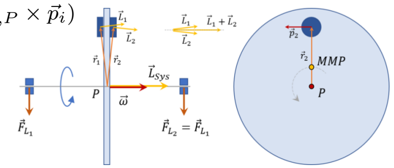
$$\vec{F}_{res} = \underbrace{\vec{F}_G + \vec{F}_{L,G}}_{=0} + \vec{F}_{L,rot}$$

$$F_{L,rot} = F_{res} = m \cdot a_{MMP} = m \cdot \frac{v^2_{MMP}}{r_{MMP}} = m \cdot r_{MMP} \cdot \omega^2$$

$$\vec{L}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{i,P} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{i,P} \times \vec{p}_i)$$

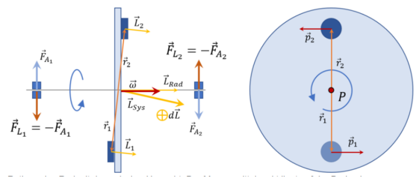
$$\vec{L}_{Sys} = \vec{L}_{Rad} + \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L}_{1,2} = \vec{r}_{1,2} \times \vec{p}_{2,1}$$



11.2 Dynamische Umwucht

Drehimpuls- und der Winkelgeschwindigkeitsvektor zu jeder Zeit kollinear
Das äussere Drehmoment, welches ein System mit dynamischer Umwucht stabil auf einer Rotationsache hält, steht senkrecht auf der Rotationsachse.



Die Rotationsachse stimmt nicht mit einer der stabilen Hauptträgheitsachsen des Körpers übereinstimmt, sondern ist im Schwerpunkt gegenüber den Hauptträgheitsachsen gekippt.

12 Anhang

12.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

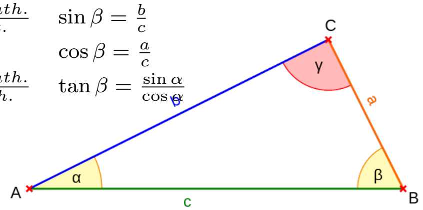
Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $= \frac{Gegenkath.}{Hypot.}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $= \frac{Ankath.}{Hypot.}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $= \frac{Gegenkath.}{Ankath.}$ $\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



12.2 Flächenformel

Kugel:
Oberfläche $4\pi r^2$, *Volumen* $\frac{4}{3}\pi r^3$
Kreis:
Umfang $2\pi r$, *Fläche* πr^2
Zylinger:
$O_{mantel}\ 2\pi r h$, $O_{Deckel} 2\cdot\pi r^2$, Volumen $\pi r^2 h$
Kegel:
Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

12.3 Umrechnungen

1km/h=3.6 m/s
$1\frac{U}{min} = 1rpm = \frac{1\cdot 2\pi}{60}\frac{rad}{s}$
1Bar=$1\cdot 10^5$Pascal
1rad= $180°\pi \approx 57,29578$
$1kWH = 10^3 W \cdot (60\cdot 60)s = 3.6\cdot 10^6 W \cdots = 3.6\cdot 10^6 J$
$1W = 1\frac{J}{s}$ $\quad 1PS \approx 735.5W$
$1cm^2 = 10^{-4}m^2$ $\quad 1\frac{Liter}{min} = \frac{10^{-3}m^3}{60s}$

12.4 Einheiten

$1\frac{m}{s}$	Geschw.	$1\frac{m}{s^2}$	Beschleunigung
$\frac{kg\cdot m}{s} = \frac{N}{s}$	Impuls	1Pa= $1\frac{N}{m^2}$	Druck
1N	Kraft	1Nm=1J=1Ws	Arbeit/Energie
$1\frac{NM}{s} = 1\frac{J}{s} = 1W$	Leistung		
$1/s\cdot 2\pi = \frac{rad}{s}$	Kreisfrequenz	s^{-1}=Hz	Frequenz
$1/s\cdot 2\pi$	Federkonst.		