Zusammenfassung 1. - 3. Semester AN1 - AN3

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	→	$\mathbb{N}^*_0$	→	$\mathbb{Z}$	→	$\mathbb{Q}$	→	$\mathbb{R}$	→	$\mathbb{C}$
{0, 1, 2, 3, ...}		{1, 2, 3, ...}		{... -2, -1, 0, 1, 2,...}		$\{\frac{p}{q} = p \in Z, q \in N *\}$		vollständige		komplexe

$3 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin Q$ $\in$ = enthalten, $\notin$ = nicht enthalten

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, da jedes Element von $\mathbb{Z}$ auch ein Element von $\mathbb{Q}$ ist.

Äquivalente Umformungen: Getreu dem Motto, Kleinvieh macht auch Mist!

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} = \frac{2}{3x^{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{4}}$

$10^{n+1} = 10^n + 10^1$

$-2^1 = -2, \ -2^2 = -4$

$(-2)^1 = -2, (-2)^2 = +4$

$\frac{x^{6n+2} * x^{3-n}}{(x^2)^n * (x^{n+3})^2} = \frac{x^{6n+2+3-2}}{x^{2n} * x^{2n+6}} = \frac{x^{5n+5}}{x^{4n+6}} = x^{5n+5-4n-6} = x^{n-1}$

$3^{n+3} = 3^n * 3^3$

$4 = \frac{4}{1} = \frac{1}{1} * \frac{4}{1} = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} = \frac{1}{\frac{1}{4}}$

$(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! = \boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (3+1) \Leftrightarrow 24 = 24$

Funktionen

Achsenschnittpunkte berechnen

f (x) = 4x + 8

Schnitt mit der y-Achse: 0 einsetzen für x f (0) = 4 * 0 +8 = 8 S_y (0| 8)

Schnitt mit der x-Achse: f (x) = 0 setzen f (x) = 4x +8 → x = -2 Sx (-2| 0)

Nullstellen berechnen - Newtonsches Näherungsverfahren

Verfahren ist anzuwenden, sofern die anderen nichts ergeben (Binome, Polynomdivision). Dabei wird mit dem Wert für x begonnen, vor dem der Wechsel der Vorzeichen erfolgt (siehe Tabelle unten):

$f(x) = -x^3 - 4x + 10 = 0$

$f'(x) = -3x^2 - 4$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n1} = \mathbf{1} - \frac{-1^3 - 4*1+10}{-3*1^2-4} = 1.71428$

$x_{n2} = 1.714 - \frac{-1.714^3 - 4*1.714+10}{-3*1.714^2-4} = 1.5676$

$x_{n3} = 1.5676 - \frac{-1.5676^3 - 4*1.5676+10}{-3*1.5676^2-4} = 1.5535$

Dies solange durchführen, bis der Wert auf zwei Nachkommastellen gleich bleibt!

x	-2	-1	0	**1**	2	3
y	26	15	10	**5**	-6	-29

Von der Sekantensteigung zu Tangentensteigung

Sekante = gerade, die durch zwei Punkte geht

Tangente = berührt die Funktion nur an einem Punkt, lat. tangere = berühren

Überall wo x in der untenstehenden Formel steht, die Funktion einsetzen.

$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$

$f(x) = x^2 - 4x = \lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h)^2-4(x_0+h)-(x_0{}^2-4x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} = \frac{2x_0h + h^2 - 4h}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} = \frac{h(2x_0 + h^1 - 4)}{h} \Leftrightarrow$

$\lim_{h\to 0} = 2x_0 + h^1 - 4 = 2x_0 - 4 = f'(x) = 2x^1 - 4$

$f(x) = x^3 + 4x = \lim_{h\to 0} = \frac{(x_0+h)^3+4(x_0+h)-(x_0{}^3+4x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+4x+4h-x^3-4x}{h} \Leftrightarrow$

$\lim_{h\to 0} = \frac{h(3x^2+3xh^1+h^2+4)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} = 3x^2 + 3xh^1 + h^2 + 4 = 3x^2 + 4 = f'^{(x)} = 3x^2 + 4$

Steigung $m_s(h)$ der Sekante durch die beiden Punkte P(0,f(0)) und Q(h,f(h)) angeben: in die Funktion h respektive 0 für x einsetzen:

$f(x) = \frac{2}{x+2}$

$m_s(h) = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{2}{h+2} - \frac{2}{0+2}}{h} = \frac{\frac{2}{h+2} - \frac{2}{2}}{h} = \frac{\frac{2}{h+2} - 1}{h}$

Vereinfachen des Ausdrucks $m_s(h)$ und den Grenzwert $\lim_{h\to 0} m_s(h)$ bilden:

$m_s(h) = \frac{1}{h} * \frac{2}{h+2} - 1 = \frac{1}{h} * \frac{2-(h+2)}{h+2} = \frac{1}{\cancel{h}} * \frac{\cancel{2} - (\cancel{h}+\cancel{2})}{h+2} = \frac{-1}{h+2} \Rightarrow \lim_{h\to 0} = -\frac{1}{2}$

Polynomfunktionen

Eine konstante Funktion hat als Graph eine zur x-Achse parallele Gerade. Dieses ist ein Polynom vom Grade 0 oder auch Grad -∞.

Ein Polynom vom Grade 1 ist von der Form y = mx + b

Vertikale Geraden parallel zur y-Achse sind keine Graphen von Funktionen. Sie werden x = a dargestellt.

Fundamentalsatz der Algebra:

- Ein Polynom in ℝ besitzt höchstens so viele reelle Nullstellen, wie es der höchste Grad angibt.
- Aus der Zerlegung in Linearfaktoren gewinnen wir reelle Nullstellen.
- Zu jeder reellen Nullstelle gehört ein Linearfaktor.
- Der Faktor vor der höchsten Potenz heisst Leitkoeffizient
  Beispiel: $4x^3 + 5x^2 + 5x + 12$ → der Leitkoeffizient ist 4, da die höchste Potenz x^3 die Zahl 4 davor hat.

Horner Schema

X = -1 in p(x) $x^3 – 3x^2 + 0x + 4$

1	-3	0	4
	-1	4	-4
1	-4	4	0

Blauer Pfeil = Summe von oben nach unten

Roter Pfeil = Multiplikation mit der Nullstelle (-1)

$(x^3 – 3x^2 + 0x + 4) : (x + 1) = 1x^2 - 4x + 4$

Koeffizienten-Gleichungen aufstellen

Stellen Sie die Koeffizienten-Gleichungen auf für ein Polynom vom Grad 5, welches in x = 2 eine doppelte Nullstelle besitzt und dessen Graph durch die Punkte Q_1 (-2, 176), Q_2 (0, 4), Q_3 (1, -1) und Q_4 (3, -29) geht.

Ansatz ⇒ $p(x) = (x-2)^2 * (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ da $(x-2)$ als doppelte Nullstelle fungiert.

Danach anschliessend die x-Werte einsetzten und ein LGS bilden:

$$Q_1 \;\; p(-2) = (-2-2)^2 * (a{-}2^3 + b{-}2^2 + c - 2 + d) = 176 \Leftrightarrow 16(-8a + 4b - 2c + d) = 176$$
$$\Leftrightarrow -8a + 4b - 2c + d = 11$$
$$Q_2 \;\; p(0) = (0-2)^2 * (d) = 4 \Leftrightarrow 4d = 4 \Leftrightarrow d = 1$$
$$Q_3 \;\; p(1) = (1-2)^2 * (a1^3 + b1^2 + c1 + d) = -1 \Leftrightarrow 1(a + b + c + d) = -1 \Leftrightarrow a + b + c + d = -1$$
$$Q_4 \;\; p(3) = (3-2)^2 * (a3^3 + b3^2 + c3 + d) = -29 \Leftrightarrow 1(27a + 9b + 3c + d) = -29$$

Umkehrfunktion

Eine Funktion heisst Injektiv wenn aus $x_1 \neq x_2 stets f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. In diesem Fall gibt es für f eine Umkehr-funktion: $y = f(x) = \frac{3}{2x-5} \Rightarrow y = \frac{3}{2x-5} \Rightarrow y(2x-5) = 3 \Rightarrow 2xy - 5y = 3 \Rightarrow 2xy = 3 + 5y \Rightarrow x = \frac{3+5y}{2y}$

Nun noch die Variablen vertauschen: $g(x) = \frac{3+5x}{2x}$

Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = x^3 \Leftrightarrow \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \left(\frac{1}{4} * 2^4\right) - \left(\frac{1}{4} * 1^4\right) = 3\frac{3}{4}$$

Rechenregel

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (Intervalladditivität)$$
$$\int_a^b k * f(x)dx = k * \int_a^b f(x)dx \qquad (Faktorregel)$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad (Summenregel)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (gibt die Ø-Höhe der Y-Werte im Intervall a bis b an)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Differenzfunktion

$$d(x) = f(x) - g(x)$$
$$f(x) = x^3, \;\; g(x) = 2x$$
$$d(x) = x^3 - 2x$$
$$\int_2^7 (f(x) - g(x))dx$$

Arithmetische Folge und Reihe (Summe)

Eine Folge heisst arithmetisch, wenn die Differenz d zweier Nachbarglieder konstant ist.

Nächster Wert der Folge bilden: $a_n = a_{n-1} + d$

Irgendein n-ten Wert bestimmen: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) * d \ mit \ n \geq 1}$

Wert zwischen zwei Werten bestimmen: $a_n = \frac{1}{2} * (a_{n+1} + a_{n-1})$

Direkte Bildungsgesetz der Reihe (Summe): $S_n = (n+1) * \frac{a_0 + a_n}{2}$ (Start a_0) oder $n * \frac{a_1 + a_n}{2}$ (Start a_1)

Arithmetische Reihe $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} * n = n * a_1 + \frac{(n-1)*n}{2} * d$

Summe eines Intervalls $S_n = \frac{n}{2}(2 * a_1 + (n-1) * d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

n! = Fakultät = n*(n-1) $\boldsymbol{S_n = n * a_1 + \frac{(n-1)*n}{2} * d}$

Konvergente/Divergente Folge

Konvergent = es existiert einen Grenzwert

$a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$a_n = \frac{n-1}{n} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 1$

Divergent = es existiert KEINEN Grenzwert

$a_n = n \quad \lim_{n \to \infty} a_n = existiert\ nicht!$

$a_n = (-1)^n \quad \lim_{n \to \infty} a_n = existiert\ nicht!$

Explizite/rekursive Folgen

Explizite Folge = a_n für n-ten Wert direkt erkennbar

$(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n \Rightarrow n = 100 \Leftrightarrow a_{100} = \frac{1}{100}$

Rekursive Folge = a_n ergibt sich aus den vorherigen Gliedern der Rekursionsvorschrift

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (a_n)_{n=1,2,3,.} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, ..]$

Geometrische Folge und Reihe (Summe)

Eine Folge, bei welcher der Quotient q ≠ 0 zweier Nachbarglieder konstant ist, heisst geometrische Folge.

Berechnung des Quotienten: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Berechnung eines n-ten Wertes: $a_n = a_1 * q^{n-1}, \ n \geq 1$

Berechnung eines n-ten Wertes ohne q: $a_n = \sqrt{a_{n+1} * a_{n-1}}$

Summe eines Intervalls: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}} \Rightarrow q \neq 1, \quad a_0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Monotonie

Eine reelle Zahlenfolge a_n heisst monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n ∈ ℕ gilt. Falls hingegen $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n ∈ ℕ gilt, dann heisst diese Folge monoton fallend.

Folgende zwei Strategien, um das Monotonieverhalten festzustellen (wenn erfüllt = **wachsend**, sonst fallend):

1. $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n \geq 0}$
2. $\boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1}$

Bsp.: $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \ mit \ n = 1,2,3, ...$

Wir zeigen mit der 1. Strategie, dass unsere Folge a_n monoton wachsend ist:

$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{2(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \geq 0 \ für \ alle \ natürlichen \ Zahlen \ n$

Dabei haben wir die Gesetze der Bruchrechnung verwendet. Im Resultat sind Zähler und Nenner positiv, egal welche Werte die natürliche Zahl n annimmt. In unserer Analyse haben wir also keine speziellen Zahlenwerte eingesetzt. Sie ist allgemein gültig!

Bsp.: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ mit \ n \geq 1$ Beweis nun mit Strategie 2!

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

Nun verwenden wir die Ungleichung von Bernoulli. Sie lautet: $(1+h)^n \geq 1 + n * h \ für \ reelle \ Zahlen \ h \ > 1$

Mit $h = -\frac{1}{(n+1)^2} \ und \ n + 1 \ anstelle \ von \ n \ erhalten \ wir \ mit \ der \ Hilfe \ dieser \ Ungleichung:$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) * \left(1 - (n+1) * \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$$

Beschränktheit

Eine Folge a_n ist nach oben beschränkt, falls es eine Zahl M gibt, mit:

$a_n \leq M \; für \; alle \; n = 1,2,3, \dots$ (Grosses M)

Trick → Zähler grösser machen und Nenner gleich behalten!

$a_n = \frac{2n+1}{n} \leq \frac{2n+n}{n} \leq \frac{3n}{n} = 3$ (1 durch n ersetzten, da n = 1, 2, 3,... ist, ist der zweite Term sicher grösser als erster)

Analog definieren wir eine nach unten beschränkte Folge a_n:

$a_n \geq m \; für \; alle \; n = 1,2,3, \dots$ (kleines m)

Trick → Zähler etwas weglassen und Nenner gleich behalten!

$a_n = \frac{2n+1}{n} \geq \frac{2n}{n} = 2$ (1 weglassen, somit ist der zweite Term sicher kleiner als der erste)

Konvergenz

Eine Folge an (n=1,2,3…) konvergiert gegen den **Grenzwert a**, wenn es zu jeder Toleranz ε > 0 einen Index N(ε) gibt, so dass alle Glieder mit grösserem Index als N(ε) das ε-Toleranzband um a nicht mehr verlassen.

$a_n = \frac{2n+1}{n} \quad n = 1,2,3, \dots$

$a = 2$ Vermutung, da bei immer grösseren n die +1 keine grosse Rolle mehr spielt und n gekürzt werden kann.

$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon}$ → aufrunden auf nächste grössere ganze Zahl

$\frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$

Grenzwerte der Konvergenten Folgen berechnen

Intuitiv für Große n gilt $a_n \approx \frac{n^2}{n^3} \lim_{n \to \infty} = 0$ Intuitiv für Große n gilt $a_n \approx \frac{n^3}{n^2} \lim_{n \to \infty} = \infty$

Zähler darf gegen Null gehen, der Nenner jedoch nicht, da nicht durch 0 geteilt werden darf!!! Dementsprechend mit dem Kehrwert der höchsten respektive zweithöchsten Potenz erweitern! Siehe unten Beispiel e_n und f_n:

Erweitern mit höchster Potenz, da Nenner höhere Potenz als Zähler hat : $\frac{1}{n^3}$

$e_n = \frac{5n^2+n-12}{2n^3+2n^2-3n+1} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{12}{n^3}}{2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$ der Zähler strebt gegen null, also $\lim_{n \to \infty} e_n = 0$

Erweitern mit 2. höchster Potenz, da der Zähler höhere Potenz als der Nenner hat: $\frac{1}{n^2}$

$f_n = \frac{3n^3 - n^2+2n-7}{2n^2+4n-1} = \frac{3n-1+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}$ der Zähler strebt gegen ∞, also $\lim_{n \to \infty} e_n = \infty$ unbeschränkt&divergent

---

$$d_n = \sqrt[n]{d} = d^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} d^{\frac{1}{n}} = d^0 = 1$$

$$z_n = n - 5 - \frac{n^3}{n^2-5} = \frac{n(n^2-5)}{n^2-5} - \frac{5(n^2-5)}{n^2-5} - \frac{n^3}{n^2-5} = \frac{n^3-5n-5n^2+25-n^3}{n^2-5}$$

$$= \frac{-5n-5n^2+25}{n^2-5} = \frac{-5-\frac{5}{n}+\frac{25}{n^2}}{1-\frac{5}{n^2}} \lim_{n \to \infty} zn = -5$$

$$x_n = \frac{2*3^n}{3^{n+3}-2^n} = \frac{(2*3^n)\frac{1}{3^n}}{(3^{n+3}-2^n)\frac{1}{3^n}} = \frac{2}{3^3-(\frac{2}{3})^n} = \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{2}{27}$$

$$p_n = \left(1+\frac{4}{3n}\right)^{\frac{2}{3}n} = \left(1+\frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{2}{3}n} = \left(1+\frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{2}{3}n*\frac{3}{4}*\frac{4}{3}} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{2}{3}*\frac{4}{3}=\frac{8}{9}} \quad \lim_{n \to \infty} x_p = e^{\frac{8}{9}}$$

$$w_p = \frac{8^n}{6*2^{3n-1}+1} = \frac{2^{3n}}{6*2^{3n}*2^{-1}+1} = \frac{2^{3n}}{3*2^{3n}+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{2^{3n}}} \lim_{n \to \infty} w_p = \frac{1}{3}$$

Liste von Elementaren Grenzwerten

Harmonische Folge $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Geometrische Folge $\lim_{n\to\infty} q^n = 0\ für\ |q| < 1$

n-te Wurzeln $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \ für\ a \in \mathbb{R}+\ \ und \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Eulerzahl $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Grenzwertsätze: Liste mit Rechenregeln

Die Folgen a_n und b_n besitzen die reellen Zahlen a und b als Grenzwerte und λ ist eine reelle Zahl. Dann gelten die Folgenden Rechenregeln:

Multiplikation mit Konstanten $\lim_{n\to\infty} \lambda * a_n = \lambda * a_n$

Summe $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

Differenz $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

Produkt $\lim_{n\to\infty} (a_n * b_n) = a * b$

Quotient $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}\ für\ b \neq 0$

Stetige Funktionen $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

Eine Funktion ist dann stetig, wenn ihr Graph weder einen Sprung noch eine Lücke besitzt.

Beispiel I $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$ Die Grenzwerte von Zähler und Nenner existieren nicht. Wir können nicht die Regel für den Quotienten anwenden, weil dort vorausgesetzt wird, dass diese beiden Grenzwerte existieren. Erweitern $\frac{1}{n^2}$
$\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} \underset{GWS}{\rightarrow} \frac{3}{5}\ für\ n \to \infty$ Erst an dieser Stelle sind die Voraussetzungen für die Anwendungen der GWS erfüllt.

Auch hier existiert weder der Grenzwert des Zählers noch der Grenzwert des Nenners. Wir erweitern:

Beispiel II $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2} = \frac{(3^{n+1} + 2^n) * \frac{1}{3^n}}{(3^n + 2) * \frac{1}{3^n}} = \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3^n}} \underset{GWS}{\rightarrow} \frac{3}{1}\ für\ n \to \infty$

Beispiel III $\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2n - 1}\} = \frac{\{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2n-1}\} * \{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n-1}\}}{\{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n-1}\}} = \frac{(n^2+1)-(n^2-2n-1)}{\{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n-1}\}} =$
$\frac{2n+2}{\{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n-1}\}} = \frac{2+\frac{2}{n}}{\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right\}} \underset{GWS}{\rightarrow} \frac{2}{\{\sqrt{1}+\sqrt{1}\}} \underset{GWS}{\rightarrow} 1\ für\ n \to \infty$

Beispiel IV $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{3n+2}{n+1}} = \sqrt[5]{\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}} \underset{GWS}{\rightarrow} \sqrt[5]{3}\ für\ n \to \infty$ Zuerst Grenzwert vom Radikanden berechnen!

Beispiel V $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{5}} = \left(\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{5}} \underset{GWS}{\rightarrow} e^{\frac{1}{5}}\ für\ n \to \infty$

Summenzeichen - Σ

$a_k = \frac{1+k}{k}\ für\ k\ \geq 1$

$\sum_{k=3}^{5} a_k = a_3 + a_4 + a_5 = \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{6} = \frac{227}{60}$

$b_{m,n} = (m-n)^2\ für\ m,n\ \geq 1$

$\sum_{m=2}^{3}\ (\sum_{n=4}^{5} b_{m,n}) = \sum_{m=2}^{3}\ (b_{m,4} + b_{m,5})$

$= (b_{2,4} + b_{2,5}) + (b_{3,4} + b_{3,5})$

$= ((2-4)^2 + (2-5)^2) + ((3-4)^2 + (3-5)^2) = 18$

Eigenschaften

Homogenität $\sum_{i=1}^{n} \lambda\ *\ a_i = \lambda\ * \sum_{i=1}^{n} a_i\ mit\ \lambda\ \in \mathbb{R}$

Additivität $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Konstanter Summand $\sum_{i=1}^{n} a = n\ *\ a$

Teleskopsumme $\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} -\ a_i) = a_{n+1} - a_1$

Werte für Reihen spezieller Summen

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} * n * (n+1)$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} * n * (n+1)(2n+1)$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2$

$\sum_{i=1}^{n} 2i - 3 = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 3 = 2\frac{n(n+1)}{2} - 3n = n^2 - 2n$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} i^2\ - \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n$

$\sum_{i=1}^{n} 3i^2 + 2i + 4 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 4 = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 * \frac{n(n+1)}{2} + 4n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n^2 + 5n$

Bsp: $a_1 = 10, d = 8$ Berechne den Summenwert von $\sum_{k=50}^{150} a_k$

$a_{50}\ = a_1 + 49 * d = 402$

$a_{150} = a_1 + 149 * d = 1202$

$\sum_{k=50}^{150} a_k = 101 * \frac{402+1202}{2} = 81'002$

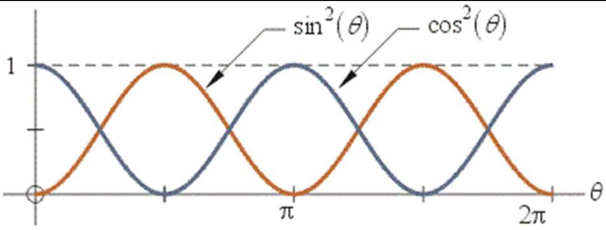
Bsp: Gegeben ist die Folge $a_m = \frac{3m}{m-1}$. Berechnen Sie $\sum_{m=6}^{18}\ (a_{m+1} - a_m)$:

$\sum_{m=6}^{18}\ (a_{m+1} - a_m) = a_{19} - a_6 = \frac{3*19}{18} - \frac{3*6}{5} = -\frac{13}{30}$

Berechnen Sie die Teleskop-Summe

$$\sum_{k=9}^{96} (a_{k+1} - a_k)\ mit\ a_k = \frac{2k+1}{k-1}$$

$$\sum_{k=9}^{96} (a_{k+1} - a_k) = a_{97} - a_9 = \frac{2*97+1}{97-1} - \frac{2*9+1}{9-1} = -\frac{11}{32}$$



Gegeben ist die arithmetische Folge $a_k = \boldsymbol{a_1 + (k-1) * d}\ für\ k \geq 1\ mit\ n \geq 1$ $\quad a_4 = 7\ und\ S_{10} = 115$

$a_4 = 7 = a_1 + 3d$

$S_{10} = 115 = n * a_1 + \frac{(n-1)n}{2} * d = 10a_1 + \frac{9*10}{2} * d$

$115 = 10a_1 + 45d$

$7 = \quad a_1 + \ 3d \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2\ und\ d = 3$

$* \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$

$** \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n*(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=10}^{20} a_k^2 = (-2 + (k-1) * 3)^2 = (3k-5)^2 = (9k^2 - 30k + 25) = 9\sum_{k=10}^{20} k^2 - 30\sum_{k=10}^{20} k + 25\sum_{k=10}^{20} 1$$

$$9\left(\sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2\right) =_{**} 9\frac{(20*(20+1))*(2*20+1)}{6} - 9\frac{(9*(9+1))*(2*9+1)}{6} = 23'265$$

$$-30\left(\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{9} k\right) =_{*} -30\frac{20(20+1)}{2} - \frac{9*(9+1)}{2} = -30(210-45) = -4950$$

$$25\left(\sum_{k=10}^{20} 1\right) = 25 * 11 = 275$$

$$\boxed{Summe = 23'265 - 4'950 + 275 = 18'590}$$

Ableitung – Liste elementarer Regeln $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Funktion	**Ableitung**
$f(x) = u(x) * v(x)$	$f`(x) = u`(x) * v(x) + u(x) * v`(x)$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f`(x) = \frac{u`(x) * v(x) - u(x) * v`(x)}{(v(x))^2}$
$f(x) = \sin(x)$	$f`(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f`(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f`(x) = 1 + \tan^2(x)$
$f(x) = e^x$	$f`(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f`(\mathrm{x}) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f`(x) = \ln(a) * a^x$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f`(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$f`(x) = \mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arctan(x)$	$f`(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * sin(\beta)$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(\lambda \mathrm{f}(\mathrm{x}))' = \lambda \mathrm{f}'(\mathrm{x}), \lambda \in \mathbb{R}$
Summenregel	$(\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x}))' = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) + \mathrm{g}'(\mathrm{x})$
Produkteregel	$(\mathrm{f}(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x}))' = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) * \mathrm{g}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(\mathrm{x}) * \mathrm{g}'(\mathrm{x})$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$
Inversenregel	$\frac{d}{dx} g * f(x) = \frac{dg}{dy}(f(x)) * \frac{df}{dx}(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x)) = f'(x) = u'(v(x)) * v'(x)$

Beispiele für Ableitungen – Struktur erkannt, Gefahr gebannt!

$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{x^4}{3} = x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-3} + \frac{1}{3}x^4$	$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 6x^{-4} + \frac{4}{3}x^3$
$f(x) = 3(sin(x) + x)^7$	$f'(x) = 21(sin(x) + x)^6 * (cos(x) + 1)$
$f(x) = (sin(2x))^3$	$f'(x) = 3(sin(2x))^2 * [sin(2x)]'$ $f'(x) = 3(sin(2x))^2 * cos(2x) * 2$
$f(x) = cos(x^2 - 4x)$	$f'(x) = -sin(x^2 - 4x) * (2x - 4)$
$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln(x^2 - 4)$	$f'(x) = \frac{1}{x^2-4} * 2x = \frac{2x}{x^2-4}$
$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 20 * \ln(3 - x^4) + 304$	$f'(x) = 20 * \frac{1}{3-x^4} * (-4x^3) = \frac{-80x^3}{3-x^4}$
$f(x) = \frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{3x^2-2} = \frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x+\sqrt{2})}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x+\sqrt{2})^2}$ Quotientenregel
$f(x) = e^{2x}$ $f(x) = e^{x^2}$	$f(x) = 2 * e^{2x}$ $f(x) = 2x * e^{x^2}$
$f(x) = 2x + e^{-4x^3}$	$f(x) = 2 - 12x^2e^{-4x^3}$
$f(x) = (x^2 - x)e^{1-x^2}$	$f(x) = (2x - 1) * e^{1-x^2} + (x^2 - x) * -2xe^{1-x^2}$ $= e^{1-x^2}\left((2x - 1) + (x^2 - x) * (-2x)\right)$ $= e^{1-x^2}(-2x^3 + 2x^2 + 2x - 1)$
$f(x) = 20 * sin(x^2 - 1)$	$f'(x) = 20 * cos(x^2 - 1) * 2x$
$f(x) = x * sin(x)$	$f'(x) = 1 * sin(x) + x * cos(x)$

Kurvendiskussion, Tangente und Normale Extremalwert-Probleme, Kurven-Anpassung

Definitionsbereich bei Funktionen – Was darf ich für x einsetzen?

$f\ (x) = \sqrt{x},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

$f\ (x) = \sqrt{x\ -\ 2}\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 2}$

$f\ (x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$f\ (x) = \frac{1}{x}\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\neq 0}$

$f\ (x) = \frac{7}{x-3}\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\neq 3}, \mathbb{D} = \mathbb{R}\{0\}$

$f\ (x) = ln(x)\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$

$f\ (x) = ln(x-2)\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>2}$

$f\ (x) = e^{\frac{1}{x}}\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\neq 0}$

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\ |\ x \neq 0 \wedge x \neq 2\}$

Wertebereich bei Funktionen – Was kann für y rauskommen?

$f(x) = x^2,\ \mathbb{D} = \mathbb{R};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}^{\geq 0}$ $f(x) = x^3 -\ 4x,\ \mathbb{D} = \mathbb{R};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}$ $f(x) = x^4 -\ 4x^2,\ \mathbb{W} = \mathbb{R}^{\geq -2}$

Symmetrie – Punkt- (ungerade Funktion) und Achsensymmetrie (gerade Funktion)

Für die Variable x überall ein **-x** einsetzen. Kommt dabei die gleiche Funktion heraus, ist diese Achsensymmetrisch (bei geraden Potenzen). Kommt dabei etwas anderes heraus, ist sie nicht Achsensymmetrisch! Anschließend wird das ausgerechnete auf beiden Seiten noch mit (-1) multipliziert. Erhalten wir dann wieder die Ursprungsfunktion, ist diese Punktsymmetrisch. Erhalte ich etwas anderes, keine Symmetrie – Ende!

$f\ (x) = x^4 + x^2$ $f\ (-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f\ (x) = AS$

$f\ (x) = x^3 + 2x^1$ $f\ (-x) = (-x)^3 + 2 * (-x)^1 = -x^3\ -\ 2x \neq f(x)$

$-f\ (-x) = -1 * (-x^3 -\ 2x)\ \ = x^3 + 2x = f\ (x) = PS$

$f\ (x) = x\ *\ e^{-x^2}$ $f(-x) = -x * e^{-(-x)^2} = -x * e^{-x^2}$

$-f(-x) = x * e^{-x^2} = f(x) = PS$

Extrem- und Wendepunkte

Die erste Ableitung gibt die Steigung der Funktion an.

$f\ \ (x) = 3x^2\ -\ 6x$ $f'\ \ (x) = 6x\ -\ 6$ $f''\ (x) = 6$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ setzen. → 6x – 6 = 0 ⇔ $x_E = 1$ → Mögliche Extremstelle

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0 \wedge f''\ (x_E) \neq 0$ müssen beide erfüllt sein

$f''\ (x_E) <\ 0\ Maxmimum$ (Hochpunkt) $f''\ (x_E) >\ 0\ Minimum\ (Tiefpunkt)$

$f''\ (1) =\ 6 > 0$ $f\ (1) =\ 3\ *\ 1^2\ -\ 6\ *\ 1\ =\ -3$ T (1|-3)

Vorzeichenwechselkriterium mit Hilfe der Monotonietabelle

x	0	**1**	2
$f'\ (x)$	-6	0	6
	-		+

Mit Hilfe der Monotonietabelle wird ein x-Wert auf dem Zahlenstrahl vor und nach dem herausgefundenen x-Wert, hier 1, berechnet. Dafür setzen wir die Zahlen, welche auf dem Zahlenstrahl, davor respektive danach liegen in $f'(x)$ ein. Danach wird der Wert von $f'(x)$ in die Ursprungsfunktion $f(x)$ eingesetzt, sodass wir den y-Wert erhalten. S. oben.

Sattelpunkt/Terrassenpunkt

x	-1	**0**	1
$f'\ (x)$	3	0	3
	↗	→	↗

$f(x) = x^3 +\ 2$ $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$

→ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x^2\ \Leftrightarrow\ x = 0$

→ $f''(0) = 6\ *\ 0 = 0$

Wenn die 2. Ableitung eine Null ergibt, haben wir einen Sattelpunkt. Steigung vorher/nachher ist gleich.

<u>**Wendestelle mit Hilfe der**</u>

2. Ableitung

x	0	**1**	2
$f''(x)$	-12	0	12
Drehung	R		L

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x\ -\ 12 = 0 \Leftrightarrow x_W = 1$

Hinreichende Bedingung: Krümmungstabelle. Gleiches Schema wie bei der Monotomietabelle. Errechneten Wert von x in $f''(x)$ einsetzen. Danach wird der Wert von $f''(x)$ in die Ursprungsfunktion $f(x)$ eingesetzt, sodass wir den y-Wert erhalten.

$f(x) = 2x^3\ -\ 6x^2$ $f'(x) = 6x^2\ -\ 12x^1$ $f''(x) = 12x - 12$ $f'''(x) = 12$

3. Ableitung

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x\ -\ 12 = 0 \Leftrightarrow x_W = 1$

Hinreichende Bedingung: $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''\ (x_W) <\ 0\ Linksrechtwendepunkt$ $f'''\ (x_W) >\ 0\ Rechtslinkswendepunkt$

$f'''\ (1) = 12 >\ 0$ $f\ (1) = 2\ *\ 1^3\ -\ 6\ *\ 1^2 = -4$ $W\ (\ 1|\ -4)$

Der Wert von f''' wird anschließend wieder in die Ursprungsfunktion $f(x)$ eingesetzt, für den Erhalt von y.

Das Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ besitzt einen Wendepunkt im Punkt W(1, 4). Die Tangente an den Graphen von $f(x)$ besitzt im Punkt W(1, 4) die Steigung -6. Berechnung der Werte der Parameter a, b, c:
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx^1$ → erste Ableitung gibt die Steigung an
$f''(x) = 6ax^1 + 2b$ → zweite Ableitung ergibt den Wendepunkt

$f(x) = a * 1^3 + b * 1^2 + c = 4$
$f'(1) = 3a * 1^2 + 2b * 1^1 \Leftrightarrow 3a + 2b = -6$ da Steigung im Punkt W(1, 4) -6 beträgt
$f''(1) = 6a * 1^1 + 2b = 0$ da das Nullsetzen der zweiten Ableitung den Wendepunkt ergibt

Daraus lässt sich ein LGS aufstellen mit der Lösung a = 2, b = - 6 und c = 8. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$
Nun können wir das Maximum und Minimum wie folgt berechnen:
$f'(x) = 6x^2 - 12x^1 = 6x(x-2)$ Nullstellen → 0 und 2 → diese wieder in $f(x)$ einsetzen und man erhält M_1 (0, 8) und M_2 (2, 0)

Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich?
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade), Periode?
3. Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen?
4. Randpunkte bzw. Verhalten, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
5. Kandidaten für Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch nötig)

Tangenten- und Normalengleichung

Tangente

$\boldsymbol{y = m * x + n}$ Bsp. Funktion = $f(x) = x^3 + 4x$ an der Stelle x = 2 aufstellen
→ $\boldsymbol{m = f'(x)} = 3x^2 - 4$ $f'(2) = 3 * 2^2 - 4 = 8 \Rightarrow 8 = m$
$f(2) = 2^3 - 4 * 2 \Rightarrow 0 = y$
Nun alles Bekannte in Tangentengleichung $\boldsymbol{y = m * x + n}$ einsetzen!
→ $\boldsymbol{0 = 8 * 2 + n \Rightarrow 0 = 16 + n \Rightarrow -16 = n}$ → $\boldsymbol{y_t = 8x - 16}$

Tangentengleichung

$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

Normalengleichung

Verläuft senkrecht/orthogonal zur Tangente
$m_t * m_n = -1$ $8 * m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{8}$
$y = m * x + n \Longrightarrow \boldsymbol{0 = -\frac{1}{8} * 2 + n \Longrightarrow \frac{1}{4} = n}$ → x- und y-Koordinate bleiben gleich!
$-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

Zusammenfassung 2. Semester AN2

Stammfunktion bilden → „Aufleiten“

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^3	$\frac{1}{4}x^4$
$c * x^n$	$\frac{1}{n+1} * c * x^{n+1}$	$7x^3$	$\frac{7}{4}x^4$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x)$	$x^3 + x^2$	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)} + C$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(\|x\|)$ → Sonderfall!
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{1}{-1}x^{-1} = -x^{-1}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$\frac{x^{-2}}{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$	$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$
$7 \cdot (2x - 3)^5$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (2x - 3)^6$ (funktioniert nur für x^1!!!)
$3e^{2x} + 4x$	$\frac{3e^{2x}}{2} + \frac{4x^2}{2}$
$30 + 4 \cdot e^{-3t}$	$30t + \frac{4 \cdot e^{-3t}}{-3}$
$20e^{-4t} - 5e^{0.5t}$	$\frac{20e^{-4t}}{-4} - \frac{5e^{0.5t}}{0.5} = -5e^{-4t} - 10e^{0.5t}$

Ansatzmethode

1. Ansatz → Aufleitung der äusseren Funktion verkettet mit der inneren Funktion
2. Ansatz ableiten → Ansatz mit der Kettenregel ableiten
3. Korrektur → Terme vergleichen und um Zahlenfaktor korrigieren

Ableitung	Ansatz	Ableitung vom Ansatz	Korrektur
$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$	$A(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$	$A'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$	$f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$
$f'(x) = x^2 \cdot e^{-2x^3}$	$A(x) = e^{-2x^3}$	$A'(x) = -6x^2 \cdot e^{-2x^3}$	$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 \cdot e^{-2x^3}$
$f'(x) = x \cdot \cos(x^2)$	$A(x) = -sin(x^2)$	$A'(x) = -2x \cdot \cos(x^2)$	$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sin(x^2)$
$f'(x) = x^{-3} \cdot \cos(x^{-2})$	$A(x) = sin(x^{-2})$	$A'(x) = -2x^{-3} \cdot \cos(x^{-2})$	$f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x^{-2})$
$f'(x) = x^3 \cdot \sin(5x^4)$	$A(x) = -cos(5x^4)$	$A'(x) = 20x^3 \cdot \sin(5x^4)$	$f(x) = -\frac{1}{20}\cos(5x^4)$
$f'(x) = x^2 \cdot \sin(3x^3)$	$A(x) = -cos(3x^3)$	$A'(x) = 9x^2 \cdot \sin(3x^3)$	$f(x) = -\frac{1}{9}\cos(3x^3)$

Partielle-/Produktintegration (PI) Faktor ∗ Faktor → Die Formel kann man auch Tanzen! (es hilft)

Reminder Produktregel: $(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'} dx$ $\quad\quad$ $\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

Bei Funktionen mit e^x wird immer dieser gleich der Ableitung → v' oder u' gesetzt. (siehe Beispiel III)

Bei Funktionen mit $ln(x)$ wird immer **der andere Teil** gleich der Ableitung → v' oder u' gesetzt. (siehe IV)

I $\int 2x * e^x\,dx = [2x * e^x] - \int 2 * e^x\,dx = [2x * e^x] - [2 * e^x]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

II $\int 4x * e^{-2x}\,dx = \left[4x * \frac{e^{-2x}}{-2}\right] - \int 4 * \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = \left[4x * \frac{e^{-2x}}{-2}\right] - \left[\frac{-2e^{-2x}}{-2}\right]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

III $\int 7x * e^x\,dx = [7x * e^x] - \int 7 * e^x\,dx = [7x * e^x] - [7e^x]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

IV $\int x^3 * ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 * ln(x)\right] - \int \frac{1}{4}x^4 * \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 * ln(x)\right] - \int \frac{1}{4}x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 * ln(x)\right] - \left[\frac{1}{16}x^4\right]$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'} dx$

V $\int x^{10} * ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{11}x^{11} * ln(x)\right] - \int \frac{1}{11}x^{11} * \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{1}{11}x^{11} * ln(x)\right] - \int \frac{1}{11}x^{10}\,dx$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'} dx \hookrightarrow = \left[\frac{1}{11}x^{11} * ln(x)\right] - \left[\frac{1}{11} * \frac{1}{11}x^{11}\right]$

VI $\int \ln(x)\,dx = \int 1 * \ln(x)\,dx = [x * \ln(x)] - \int x * \frac{1}{x} dx = [x * \ln(x)] - \int 1\,dx = [x * \ln(x)] - [x]$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'} dx$

VII $\int x * cos(x)\,dx = [x * \sin(x)] - \int 1 * \sin(x)\,dx = [x * \sin(x)] - [-\cos(x)] = [x * \sin(x) + \cos(x)]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

VIII $\int \sin(x) * cos(x)\,dx = [\sin(x) * \sin(x)] - \int cos(x) * \sin(x)\,dx \Rightarrow 2\int \sin(x) * cos(x)\,dx = [\sin^2(x)]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx \hookrightarrow \int \sin(x) * cos(x)\,dx = \frac{1}{2}[\sin^2(x)]$

IX $\int 3x * e^{ax}\,dx = \left[3x * \frac{e^{ax}}{a}\right] - \int 3 * \frac{e^{ax}}{a} dx = \left[3x * \frac{e^{ax}}{a}\right] - \left[\frac{\frac{3}{a} * e^{ax}}{a}\right] = \left[3x * \frac{e^{ax}}{a}\right] - \left[\frac{3}{a^2} * e^{ax}\right]$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

X $\int x^2 * e^{-x}\,dx = [x^2 * -e^{-x}] - \int 2x * -e^{-x} dx,$ → $\int -2x * e^{-x} dx = [-2x * -e^{-x}] - \int -2 * -e^{-x} dx$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$ → $\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

$[-2x * -e^{-x}] - \int -2 * -e^{-x} dx = [2xe^{-x}] - \int 2e^{-x} = [2xe^{-x}] - [-2e^{-x}] = [2xe^{-x} + 2e^{-x}]$

$\int x^2 * e^{-x}\,dx = [-x^2 * e^{-x}] - [2xe^{-x} + 2e^{-x}] = [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]$

XI $\int 1 * arctan(x)\,dx = [x * arctan(x)] - \int x * \frac{1}{1+x^2}\,dx$ Verkettung mal innere Ableitung $x * (1 + x^2)^{-1}$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'}\,dx \hookrightarrow A(X) = \ln(1 + x^2)$ $\quad A'(X) = \frac{1}{1+x^2} * 2x$

$f(X) = \frac{1}{2} * \ln(1 + x^2) = \ln\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$ $\quad$ → $[x * arctan(x)] - \ln\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$

XII $\int x^2 * cos(x)\,dx = [x^2 \sin(x)] - \int 2x \sin(x)\,dx \Rightarrow \int 2x \sin(x)\,dx = [-2x\cos(x)] - \int -2\cos(x)\,dx$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx \hookrightarrow = [-2x\cos(x)] - [-2\sin(x)]$

$\int x^2 * cos(x)\,dx = [x^2 \sin(x)] - [-2x\cos(x) + 2\sin(x)] = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

XIII $\int (\ln(x))^2\,dx = \int 1 * (\ln(x))^2\,dx = [x * (\ln(x))^2] - \int x * \frac{1}{x} * 2 * \ln(x)\,dx$

$\int \boldsymbol{u'} * v\,dx = [u * v] - \int u * \boldsymbol{v'} dx \hookrightarrow [x * (\ln(x))^2] - 2[x * \ln(x) - x]$

XIV $\int x^3 * e^{-x}\,dx = [-\boldsymbol{x^3 e^{-x}}] - \int 3x^2 * -e^{-x} dx \Rightarrow [\boldsymbol{3x^2 e^{-x}}] - \int 6xe^{-x}\,dx \Rightarrow [\boldsymbol{-6xe^{-x}}] - \int -6e^{-x}$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$ $\quad \Rightarrow \int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v$

$\Rightarrow \int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v$ $\quad \int -6e^{-x} = [\boldsymbol{6e^{-x}}]$

$\int x^3 * e^{-x}\,dx = \boldsymbol{-x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x}} + C$

XV $\int \sin(2x)\,e^{-x}\,dx = [-\sin(2x)\,e^{-x}] - \int -2\cos(2x)\,e^{-x} dx \Rightarrow [2\cos(2x)\,e^{-x}] - \int -4\sin(2x)\,e^{-x} dx$

$\int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

$\Rightarrow \int u * \boldsymbol{v'}\,dx = [u * v] - \int \boldsymbol{u'} * v\,dx$

$\int 5\sin(2x)\,e^{-x}\,dx = -\sin(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{1}{5}\sin(2x)\,e^{-x} - \frac{2}{5}\cos(2x)\,e^{-x} + C$

Partialbruchzerlegung

Wenn der Nennergrad grösser gleich der Zählergrad des Polynoms ist, muss man zuerst eine Polynomdivision durchführen!

$\int \frac{2x-4}{x^2-2x-8}dx = \frac{2x-4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-4B}{(x-4)(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A-4B}{(x-4)(x+2)}$

I $A + B = 2$ $\quad a$=23I $A + B = 2$ $\quad a = \frac{2}{3}$ $\quad f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{(x-4)} + \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)} = \frac{2}{3} * \frac{1}{(x-4)} + \frac{4}{3} * \frac{1}{(x+2)}$

II $\quad 2A - 4B = -4$ $\quad b = \frac{4}{3}$ $\quad \int f(x)dx = \left[\frac{2}{3}\ln(|x-4|) + \frac{4}{3}\ln(|x+2|)\right] + C$

$\int \frac{1}{x^3-x}dx = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)} \Rightarrow A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$

$(Ax^2 - A) + (Bx^2 - Bx) + (Cx^2 + Cx) \Rightarrow (A + B + C)x^2 + (C - B)x - (A)$

$0 = A + B + C$

$0 = C - B$

$-1 = A \Rightarrow \frac{1}{2} = C = B$ $\quad \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}$ $\quad \int \frac{1}{x^3-x}dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}dx$

$-\ln(|x|) + \frac{1}{2} * \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} * \ln(|x-1|) + C = -\ln(|x|) + \frac{1}{2} * \ln(|x+1| * |x-1|) + C$

$= -\frac{1}{2} * \ln(x^2) + \frac{1}{2} * \ln(|x^2-1|) + C = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2}\right) + C$

$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$ unechte rationale Funktion → Polynomdivision

$(x^2 + 3x - 4) : (x^2 - 2x - 8) = 1 + \frac{5x+4}{x^2-2x-8}$

$\underline{-(x^2 - 2x - 8)}$

$5x + 4$

$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx = \int 1\,dx + \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx = x + \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx$ Partialbruchzerlegung für zweiten Teil

$\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)} \Rightarrow A(x-4) + B(x+2) = (Ax - 4A) + (Bx + 2B)$

$5 = A + B$ $\quad 4 = B \Leftrightarrow 1 = A$ $\quad \frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x-4)}$

$4 = -4A + 2B$ $\quad$ Integral: $x + \int \frac{1}{(x+2)}dx + \int \frac{4}{(x-4)}dx$

$x + 1 * \ln(|x+2|) + 4 * \ln(|x-4|) + C = x + \ln(|x+2| * |x-4|^4) + C$

$\int \frac{x^2-5x+8}{x^4-6x^2+8x-3}dx = \frac{x^2-5x+8}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+3}$

$A(x-1)^2(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x+3) + D(x-1)^3$

$A(x^3 + x^2 - 5x + 3) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x + 3) + D(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

$$\begin{aligned} A \qquad\qquad\quad + D &= 0 \\ A + B \qquad - 3D &= 1 \\ -5A + 2B + C + 3D &= -5 \\ 3A - 3B + 3C - D &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$\int \frac{x^2-5x+8}{x^4-6x^2+8x-3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+3}dx$

$= \frac{1}{2} * \ln(|x-1|) + (x-1)^{-1} - \frac{1}{2} * (x-1)^{-2} - \frac{1}{2} * \ln(|x+3|) + C = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{|x-1|}{|x+3|}\right) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

$f(x) = \frac{2x^3+3x^2-2x-3}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{(Dx+E)}{(x^2+4)}$

$= \frac{A(x-1)^2(x^2+4)}{(x+1)} + \frac{B(x+1)(x-1)(x^2+4)}{(x-1)} + \frac{C(x+1)(x^2+4)}{(x-1)^2} + \frac{(Dx+E)(x+1)(x-1)^2}{(x^2+4)}$

$\frac{7}{x^2*(x-3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-3}$

$\frac{20}{(x-1)*(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

Lineare Substitution

Für die lineare Substitution muss die Funktion $f(x)$ den Charakter einer **linearen** Funktion zwingend vorweisen $f(x) = a(mx+b)^n$ → es dürfen keine Ausdrücke in der Klammer mit $x^{n>1}$ (x^2, x^3, usw. sind verboten)

$f(x) = a(mx+b)^n \rightarrow F(x) = \frac{a}{m*(n+1)} * (mx+b)^{n+1}$

$f(x) = 2*(3x-2)^4 \rightarrow F(x) = \frac{2}{3*5} * (3x-2)^5$

$f(x) = -3*(10+8x)^{10} \rightarrow F(x) = \frac{-3}{8*11} * (10+8x)^{11}$

$f(x) = \frac{7}{(2x-5)^3} = 7*(2x-5)^{-3} \rightarrow F(x) = \frac{7}{2*-2} * (2x-5)^{-2}$

$\int \frac{1}{x-5} dx \rightarrow x-5 = z \rightarrow z' = 1 = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = dz$

$\int \frac{1}{z} dz = [\ln(|z|)] + C = \ln(|x-5|) + C$

$\int e^{-\frac{2}{3}x} dx \rightarrow -\frac{2}{3}x = z \rightarrow z' = -\frac{2}{3} = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}dz$

$\int e^z * -\frac{3}{2}dz = \left[-\frac{3}{2}e^z\right] + C = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + C$

$\int_0^2 \frac{1}{2x-5} dx \rightarrow 2x-5 = z \rightarrow z' = 2 = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}dz$

$\int_{2*0-5}^{2*2-5} \frac{1}{t} * \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} * \int_{-5}^{-1} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} * \left(\ln(|t|)\Big|_{-5}^{-1}\right) = \frac{1}{2} * (\ln(1) - \ln(5)) = -\frac{\ln(5)}{2}$

$\int_1^5 \sqrt{4x+5}\, dx \rightarrow 4x+5 = z \rightarrow z' = 4 = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{4} = \frac{1}{4}dz$

$\int_{4*1+5}^{4*5+5} \sqrt{t} * \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} * \int_9^{25} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25}\right) = \frac{1}{6} * \left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6} * (5^3 - 3^3) = \frac{1}{6} * 98 = \frac{49}{3}$

Substitution

$\int 24x * e^{-3x^2} dx \rightarrow -3x^2 = z \rightarrow z' = -6x = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{-6x}$

$\int 24x * e^z * \frac{dz}{-6x} = \int -4e^z\, dz = [-4e^z] + C = -4e^{-3x^2} + C$

$\int \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} dx \rightarrow 1+e^x = z \rightarrow z' = e^x = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{e^x}$

$\int \frac{4e^x}{z^2} * \frac{dz}{e^x} = \int \frac{4}{z^2} dz = \int 4 * z^{-2} dz = [-4z^{-1}] + C = -4(1+e^x)^{-1} + C$

$\int \frac{4e^x}{1+e^x} dx \rightarrow 1+e^x = z \rightarrow z' = e^x = \frac{dz}{dx} \rightarrow dx = \frac{dz}{e^x}$

$\int \frac{4e^x}{z} * \frac{dz}{e^x} = \int \frac{4}{z} dz = \int 4 * z^{-1} dz = [4*\ln(|z|)] + C = 4*\ln(|1+e^x|) + C$

Variablen Transformationsformel

Berechnen Sie $\int_1^2 \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1} dy$ unter Verwendung der Substitution $y = \varphi(x) = \ln(x)$

Variablen Transformationsformel: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(\varphi(x)) * \varphi'(x) dx$

Überall wo y vorkommt, ersetzen durch ln(x) → $f(\varphi(x)) = \frac{e^{3*\ln(x)}}{e^{2*\ln(x)}-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$ $\qquad \varphi'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$f(\varphi(x)) * \varphi'(x)dx = \frac{x^3}{x^2-1} * \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2-1}$

Grenzen transformieren: $\varphi(a) = 1 \rightarrow \ln(a) = 1 \rightarrow a = e \quad \varphi(b) = 2 \rightarrow \ln(b) = 2 \rightarrow b = e^2$

$\int_1^2 \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1} dy = \int_e^{e^2} \frac{x^2}{x^2-1}$ → Polynomdivision durchführen $x^2 : (x^2-1) = 1$ Rest 1 → $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \rightarrow A + B = 0 \;\; \& \;\; -A + B = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}, \; B = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} * \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} * \frac{1}{x-1}$

$\int_e^{e^2} \frac{x^2}{x^2-1} = \left[1 - \frac{1}{2} * \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} * \frac{1}{x-1}\right] dx = \left(x - \frac{1}{2} * \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} * \ln(|x-1|)\right) \Big|_e^{e^2}$

$= \left(e^2 - \frac{1}{2} * \ln(e^2+1) + \frac{1}{2} * \ln(|e^2-1|)\right) - \left(e - \frac{1}{2} * \ln(|e+1|) + \frac{1}{2} * \ln(|e-1|)\right)$

$= e^2 - \frac{1}{2} * \ln(e^2+1) + \frac{1}{2} * \ln(|e^2-1|) - e + \frac{1}{2} * \ln(|e+1|) - \frac{1}{2} * \ln(|e-1|)$

Berechnen Sie $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{e}} dy$ unter Verwendung der Substitution $y = \varphi(x) = x^2$

Überall wo y vorkommt, ersetzen durch x^2 → $f(\varphi(x)) = \frac{e^x}{x}$ $\varphi'(x) = 2x$

$f(\varphi(x)) * \varphi'(x)dx = \frac{e^x}{x} * 2x = 2e^x$

Grenzen transformieren: $\varphi(a) = 1$ → $a^2 = 1$ → $a = 1\ (x > 0)$ $\varphi(b) = 4$ $b^2 = 4$ → $b = 2$

$\int_1^2 e^x dx = 2e^x |_1^2 = 2(e^2 - e^1)$

$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$ mit der Variablen-Transforamtionsformel durch Subsitution mit $y = \varphi(x) = x^2$

$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} * 2x\, dx = 2 * \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = 2 * (-\cos(x)) |_0^{\pi} = -2(-1-1) = 4$

Bogenlänge von Kurven berechnen

Berechnen der Länge der Kurve gegeben durch: $F(x,y) = 0: 27y^2 = 4(x-2)^3$ von $P(2,0)$ bis $Q(11, 6*\sqrt{3})$

1. Implizite Darstellung auflösen nach y/kartesische Darstellung $y = \pm\sqrt{\frac{4}{27}(x-2)^3} = f(x); a = 2, b = 11$

2. Ableiten der kartesischen Darstellung: $\left(\frac{4}{27}(x-2)^3\right)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{\frac{4}{27}*3*(x-2)^2}{2*\sqrt{\frac{4}{27}(x-2)^3}}$

3. Ableitung quadrieren: $f'^2(x) = \frac{\frac{16}{729}*9*(x-2)^4}{4*\frac{4}{27}*(x-2)^3} = \frac{1}{3}(x-2)$

4. 1 + die quadrierte Ableitung rechnen: $1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x+1)$

5. Von 1 + die quadrierte Ableitung die Wurzel ziehen $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \int_2^{11} \left[\frac{1}{3}(x+1)\right]^{\frac{1}{2}} dx$

6. Nun vom Term die Stammfunktion bestimmen $L(\gamma) = \int_2^{11} \left[\frac{1}{3}(x+1)\right]^{\frac{1}{2}} dx = 3 * \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}(x+1)\right]^{\frac{3}{2}} |_2^{11}$

7. Grenzen einsetzen: $2\left[\frac{1}{3}(x+1)\right]^{\frac{3}{2}} |_2^{11} = 2 * (8-1) = 14$

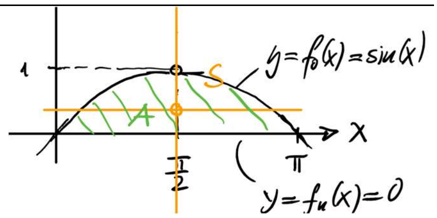
Berechnen der Länge der Kurve gegeben durch: $F(x,y) = 0: 6xy = x^4 + 3$ von $x = 1$ bis $x = 2$

1. $y = \frac{x^4+3}{6x} = \frac{1}{6}(x^3 + 3x^{-1}) = f(x)$ **2.** $f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 3x^{-2}) = \frac{1}{2}(x^2 - x^{-2})$

3. $f'^2(x) = \frac{1}{4}(x^4 + x^{-4} - 2x^2x^{-2}) = \frac{1}{4}(x^4 + x^{-4} - 2)$ **4.** $1 + f'^2(x) = \frac{1}{4}(x^4 + x^{-4} + 2) = \frac{1}{4}(x^2 + x^{-2})^2$

5/6. $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}(x^2 + x^{-2})\right] dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x^{-1}\right] |_1^2$ **7.** Grenzen einsetzen: $\frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{17}{12}$

Flächenschwerpunkt berechnen



$f_O(x)$ = Funktion, die oben liegt, $f_U(x)$ = Funktion, die unten liegt

Berechnung Flächenschwerpunkt für Funktion $y = f_O(x) = \sin(x)$ von 0 bis π und der x-Achse → $S(x_s, y_s)$

1. Anhand einer Skizze Flächenschwerpunkt abschätzen → $S\left(\frac{\pi}{2}, 0.4\right)$

2. Stammfunktion der Funktion bestimmen, um die Fläche zu erhalten

$A = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x) |_0^{\pi} = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2$

3. x_s ausrechnen mit der Formel: $x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x * (f_O(x) - f_U(x))dx$

$x_s = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x * \sin(x)\, dx = \frac{1}{2}[x * -\cos(x)] - \int 1 \ * -\cos(x)\, dx$ $f_U(x)$ = x-Achse somit 0

$\int_0^{\pi} u * \ v' \ dx = \ [u * \ v\ ] - \int u' * \ v \ dx$

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x * \sin(x)\, dx = \frac{1}{2}[x * -\cos(x)] - [-\sin(x)] = \frac{1}{2} * \pi$

4. y_s ausrechnen mit der Formel: $y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b \left(f_O{}^2(x) - f_U{}^2(x)\right) dx$ $y_s = \frac{1}{2*2}\int_0^{\pi}(\sin^2(x) - 0)\, dx$

Trick $2\pi = \int_0^{2\pi} 1\, dx = \int_0^{2\pi}\left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right) dx$, $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)$ → $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) = \pi$

➔ $\int_0^{\pi} \sin^2(x) = \frac{\pi}{2}$ → Deshalb $y_s = \frac{1}{2*2}\int_0^{\pi}(\sin^2(x) - 0)\, dx = \frac{1}{4} * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 0.4$ $S\left(\frac{\pi}{2}, 0.4\right)$ ✓

Berechnung des Flächenschwerpunkt, der durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^3$ eingeschlossener Fläche, auf dem Intervall [0, 1] eine Fläche mit Flächeninhalt $A = \frac{5}{12}$:

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x * \left(f_O(x) - f_U(x)\right)dx = \frac{1}{\frac{5}{12}}\int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \frac{12}{5}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^4 dx = \frac{12}{5}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}x^5\right]\Big|_0^1 =$$

$$x_s = \frac{12}{5}\cdot\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{25}$$

$$y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b \left({f_O}^2(x) - {f_U}^2(x)\right)dx = \frac{6}{5}\int_0^1 (x - x^6)dx = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7\right]\Big|_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$$

Berechnung des Flächenschwerpunkt, der durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{x^2}{8}$ eingeschlossener Fläche:

$f_O = \sqrt{x}, \quad f_U = \frac{x^2}{8}$ → Nullstellen berechnen: $\sqrt{x} = \frac{x^2}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = 8$

$8^{\frac{3}{2}} = 4 = N_1, \quad N_2 = 0$

Fläche berechnen: $A = \int_0^4 f_O - f_U dx = \int_0^4 \sqrt{x} - \frac{x^2}{8}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}x^3\right]\Big|_0^4 = \left[\frac{16}{3} - \frac{64}{24}\right] = \frac{128}{24} - \frac{64}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$

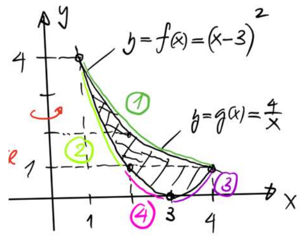
$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x * \left(f_O(x) - f_U(x)\right)dx = \frac{1}{\frac{8}{3}}\int_0^4 x\left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)dx = \frac{3}{8}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^3 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{32}x^4\right] =$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{64}{5} - 8\right] = \frac{3}{8} * \frac{24}{5} = \frac{72}{40} = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b \left({f_O}^2(x) - {f_U}^2(x)\right)dx = \frac{1}{2*\frac{8}{3}}\int_0^4 \left(x - \frac{1}{64}x^4\right)dx = \frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{320}x^5\right] = \frac{3}{16}\left[8 - \frac{1024}{320}\right] =$$

$$= \frac{3}{16}\left(\frac{40}{5} - \frac{16}{5}\right) = \frac{3}{16} * \frac{24}{5} = \frac{72}{80} = \frac{9}{10} = 0.9 \qquad x_s = 1.8, y_s = 0.9$$

Volumeninhalt von Rotationskörpern



Rotation um X-Achse: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

Berechnung des Volumeninhalt durch Rotation um y-Achse der Funktionen $y = \frac{4}{x}$ und $y = (x-3)^2$

Schnittpunkte berechnen: $\frac{4}{x} = (x-3)^2 \Leftrightarrow 0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ → 1 und 4

Umstellen nach x, da Rotation um y-Achse

1. $x = \frac{4}{y}, V_1 = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = \pi\int_1^4 16y^{-2}\,dy = \pi\left[\frac{16}{-1}y^{-1}\right]\Big|_1^4 = \pi\left[-\frac{16}{y}\right]\Big|_1^4 = \pi\left[-\frac{16}{4} - -16\right] = 12\pi$
2. $x = 3 - \sqrt{y}, V_2 = \pi\int_1^4 \left(3 - \sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_1^4 y - 6\sqrt{y} + 9dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 + 9y - 4(y)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^4 = \frac{13}{2}\pi$
3. $x = 3 + \sqrt{y}, V_3 = \pi\int_0^1 \left(3 + \sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y + 6\sqrt{y} + 9dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 + 9y + 4(y)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1 = \frac{27}{2}\pi$
4. $x = 3 - \sqrt{y}, V_4 = \pi\int_0^1 \left(3 - \sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y - 6\sqrt{y} + 9dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 + 9y - 4(y)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^4 = \frac{11}{2}\pi$

$$V = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) = \left(12\pi - \frac{13}{2}\pi\right) + \left(\frac{27}{2}\pi - \frac{11}{2}\pi\right) = \frac{27}{2}\pi$$

Mantelflächeninhalt von Rotationskörpern

Rotation um X-Achse: $M = 2\pi\int_a^b f(x) * \sqrt{1 + {f'}^2(x)}\,dx$

Berechnung Mantelflächeninhalt des Körpers Rotation von $8y^2 = x^2(1-x^2)$ für 0 ≤ x ≤ 1 um die x-Achse:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{8}x^2(1-x^2)} \qquad f'(x) = \frac{\frac{1}{8}(2x-4x^3)}{2\sqrt{\frac{1}{8}x^2(1-x^2)}} = \frac{x(1-2x^2)}{8\sqrt{\frac{1}{8}x^2(1-x^2)}} \qquad \rightarrow {f'}^2(x) = \frac{x^2(1-2x^2)^2}{8x^2(1-x^2)} = \frac{1}{8}\frac{(1-2x^2)^2}{(1-x^2)}$$

$$1 + {f'}^2(x) = \frac{8(1-x^2)}{8(1-x^2)} + \frac{(1-2x^2)^2}{8(1-x^2)} = \frac{8(1-x^2)+(1-2x^2)^2}{8(1-x^2)} = \frac{8-8x^2+1-4x^2+4x^4}{8(1-x^2)} = \frac{9-12x^2+4x^4}{8(1-x^2)} = \frac{(3-2x^2)^2}{8(1-x^2)}$$

$$M = 2\pi\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{8}x^2\cancel{(1-x^2)} * \frac{(3-2x^2)^2}{8\cancel{(1-x^2)}}} = \sqrt{\frac{1}{8}x^2 * \frac{(3-2x^2)^2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{64}x^2 * (3-2x^2)^2} = \frac{1}{8}x(3-2x^2)$$

$$M = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{8}x(3-2x^2)\,dx = \frac{2\pi}{8}\int_0^1 x(3-2x^2)\,dx = \frac{2\pi}{8}\int_0^1 (3x - 2x^3)\,dx = \frac{\pi}{4} * \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right]\Big|_0^1$$

$$M = \frac{\pi}{4} * \left[\frac{3}{2} * 1 - \frac{1}{2} * 1\right] = \frac{\pi}{4} * 1 = \frac{\pi}{4}$$

Bernoulli de l'Hôspital-Regel – Grenzwerte von Quotienten (Brüchen)

Folgende Punkte müssen erfüllt sein, dass die Regel angewendet werden kann: $\frac{f(x)}{g(x)}$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ → Zähler geht beim Einsetzen von einem bestimmten Wert für x gegen Null
   $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ → Nenner geht beim Einsetzen von gleichen bestimmten Wert für x gegen Null
2. x_0 einzige Nullstelle in $U_\varepsilon(x_0)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ der Grenzwert der einzelnen Ableitungen von Zähler und Nenner existiert

---

$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}, x_0 = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ $\quad f'(x) = 2x + 1$ $\quad g(x) = x^2 - 4$ $\quad g'(x) = 2x$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{2x+1}{2x} \xrightarrow[GWS]{x \to 2} = \frac{2*2+1}{2*2} = \frac{5}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{4}$

$\frac{x^2}{e^x}, x \to \infty$

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$ $\quad f''(x) = 2$

$g(x) = e^x$ $\quad g'(x) = e^x$ $\quad g''(x) = e^x$ $\qquad \frac{f''(x)}{g''(x)} \xrightarrow[GWS]{x \to \infty} = \frac{2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

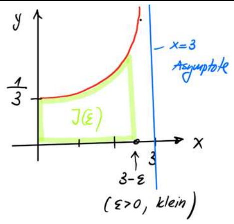
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{\sqrt{x}}$

$f(x) = x - \sin(x)$ $\quad f'(x) = 1 - \cos(x)$

$g(x) = \sqrt{x}$ $\quad g'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{f''(x)}{g''(x)} \xrightarrow[GWS]{x \to \infty} = \frac{2}{e^x} = 0$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = (1 - \cos(x)) : \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1-\cos(x)}{1} * \frac{2\sqrt{x}}{1} = 2\sqrt{x}(1 - \cos(x)) \xrightarrow[GWS]{x \to 0} = 0$

Uneigentliches Integral



Entweder ist der Integrand oder der Integrationsbereich unbeschränkt.

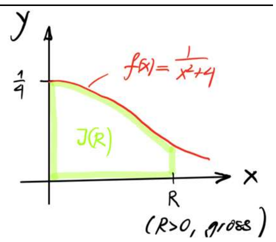
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$\int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{9(1-(\frac{x}{3})^2)}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$ Verkettung mal innere Ableitung arcsin

$A(x) = \arcsin(\frac{x}{3})$ $\quad A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} \frac{1}{3}$ ✓

.. $\int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) |_0^{3-\varepsilon} = \arcsin\left(\frac{3-\varepsilon}{3}\right) = \arcsin\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \xrightarrow[GWS]{\varepsilon \to 0} = \frac{\pi}{2}$



$f(x) = \frac{1}{x^2+4} dx$

$J(R) = \int_0^R \frac{1}{x^2+4} dx$

$\frac{1}{4} \int_0^R \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx$

$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) |_0^R$ $\qquad \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R}{2}\right) \xrightarrow[GWS]{R \to \infty} = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^\infty x^2 * e^{-2x^3} dx = \int_0^R x^2 * e^{-2x^3} dx = -\frac{1}{6} e^{-2x^3} |_0^R = -\frac{1}{6}\left(e^{-2R^3} - 1\right) = \frac{1}{6}\left(1 - e^{-2R^3}\right) \xrightarrow[GWS]{R \to \infty} = \frac{1}{6}$

$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-2x^3} dx$ → $\int_0^R x^2 \cdot e^{-2x^3} dx = -\frac{1}{6} e^{-2x^3} |_0^R = -\frac{1}{6}\left(e^{-2R^3} - 1\right) \Rightarrow \xrightarrow[GWS]{R \to \infty} = \frac{1}{6}$

Integral Kriterium (IK)

Konvergiert? Ja, drei Methoden gibt es.

Vorgehen

1. Vermutung formulieren (konvergent oder divergent?)
2. Orientierung — Summanden fallen mind. So schnell ab wie $1/k^2$ / Summanden fallen höchstens so schnell ab wie $1/\mathrm{k}$
3. Strategie wählen — konvergente Majorante / Divergente Minoraten
4. Vergleichsfunktion und Summanden als Balken qualitativ skizzieren (gemäss Punkt 2. / Orientierung)

Konvergente Majorante (grösser)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{n^2}$$
$$\leq 1 + \int_1^n x^{-2}\,dx = 1 - x^{-1}|_1^n = 1 - \left(\frac{1}{n} - 1\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Divergente Minorante

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$
$S_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(x)\,|_1^{n+1} = \ln(n+1)$ → wächst somit unbeschränkt in n

Der Grenzwert von S_n für n → ∞ existiert nicht.

Quotienten Kriterium (QK)

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ mit $a_k \neq 0$

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$
- $r < 1$: S_n konvergiert absolut
- $r > 1$: S_n divergiert absolut
- $r = 1$: S_n QK liefert keinen Entscheid

Eine Reihe $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert **absolut**, wenn $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ einen Grenzwert besitzt.
Konvergiert $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{n}$. Die Umkehrung ist falsch: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.konvergiert, aber $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert.

Beispiel $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$

Direktes Bildungsgesetz für Summanden: $a_k = \frac{k}{3^k}$ für k = 1,2,3,... $a_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{3^{k+1}} * \frac{3^k}{k} = \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[GWS]{k\to\infty} r = \frac{1}{3} < r$ Entscheid: S_n konvergiert

---

Die Taylor-Entwicklungen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Ursprung lauten:
$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + O(x^4)$ und $g(x) = 1 + \frac{1!}{1}x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^3}x^3 + O(x^4)$

Bestimmung der offenen Konvergenz-Bereiche der Reihen:

$$a_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot x^k \ (k \geq 0),\ a_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} \cdot x^{k+1}$$
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{k+1}{(-1)^k \cdot x^k} = \frac{(-1)^{\cancel{k+1}} \cdot x^{\cancel{k+1}}}{k+2} \cdot \frac{k+1}{\cancel{(-1)^k} \cdot \cancel{x^k}} = \frac{k+1}{k+2} \cdot |x| = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} \cdot |x| \xrightarrow[GWS]{k\to\infty} |x| < 1 \ \ : I = (-1,1)$$
$$b_k(x) = \frac{k!}{k^k} \cdot x^k \ (k \geq 0),\ b_{k+1}(x) = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot x^{k+1}$$
$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{(k+1)! \cdot x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k! \cdot x^k} = \frac{\cancel{(k+1)!} \cdot x^{\cancel{k+1}}}{(k+1)^{k\cancel{+1}}} \cdot \frac{k^k}{\cancel{k!} \cdot \cancel{x^k}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} \cdot |x| = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot |x| = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k \cdot |x|$$
$$= \xrightarrow[GWS]{k\to\infty} \frac{1}{e}|x| < 1 \ \ : I = (-e, e)$$
→ $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})! = \boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (3+1)$

Berechnen der Koeffizienten a_0 und a_1 in der Entwicklung $f(x) \cdot g(x) = a_0 + a_1 x + O(x^2)$
$$\left(1 - \frac{1}{2}x + 0(x^2)\right) \cdot \left(1 + x + 0(x^2)\right) = 1 + \frac{1}{2}x + 0(x^2))$$

Berechnen der Koeffizienten b_0 und b_1 in der Entwicklung $\frac{f(x)}{g(x)} = b_0 + b_1 x + O(x^2)$

$\left(1 - \frac{1}{2}x + 0(x^2)\right) : \left(1 + x + 0(x^2)\right) = 1 - \frac{3}{2}x + 0(x^2)$ → Polynomdivision
$$-(1 + x) = -\frac{3}{2}x$$

Die Taylor-Entwicklung der Funktionen $f(x)$ im Ursprung lautet: $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + O(x^4)$

Bestimmung des offenen Konvergenz-Bereiches der Reihe:

$a_k(x) = (-1)^k \cdot (k+1)x^k \ \ (k \geq 0),\ \ a_{k+1}(x) = (-1)^{(k+1)} \cdot (k+2)x^{(k+1)}$

$\left|\frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{(k+1)}\cdot(k+2)x^{(k+1)}}{(-1)^k\cdot(k+1)x^k}\right| = \left|\frac{\cancel{(-1)^{(k+1)}}\cdot(k+2)x^{\cancel{(k+1)}}}{\cancel{(-1)^k}\cdot(k+1)\cancel{x^k}}\right| = \frac{(k+2)}{(k+1)}|x| = \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}}|x| \xrightarrow[GWS]{k\uparrow\infty} |x| < 1 \ :\ I = (-1,1)$

Berechnen der Koeffizienten a_0 und a_1 in $f'(x) = a_0 + a_1x + O(x^2)$ $\qquad f'(x) = -2 + 6x + O(x^2)$

Berechnen der Koeffizienten b_0 und b_1 in $F(x) = b_1x + b_2x^2 + O(x^3)$ $\qquad F(x) = x - x^2 + O(x^3)$

Berechnen der Koeffizienten c_0 und c_1 in der Entwicklung $\frac{F(x)}{f'(x)} = c_1x + c_2x^2 + O(x^3)$

$$
\begin{aligned}
&\left(x - x^2 + O(x^3)\right):\left(-2 + 6x + O(x^3)\right) = -\tfrac{1}{2}x - x^2 + O(x^3)\\
&-(x - 3x^2)\\
&\qquad 2x^2 + O(x^3)
\end{aligned}
$$

Die Taylor-Entwicklung der Funktionen $f(x)$ im Ursprung lautet: $f(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + O(x^4)$

Bestimmung des offenen Konvergenz-Bereiches der Reihe:

$a_k(x) = (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^k \ \ (k \geq 0),\ \ a_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1} \cdot x^{k+1}$

$\left|\frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2^{k+1}\cdot x^{k+1}}{(-1)^k\cdot 2^k\cdot x^k}\right| = \left|\frac{(-1)^{\cancel{k+1}}\cdot 2^{\cancel{k+1}}\cdot x^{\cancel{k+1}}}{\cancel{(-1)^k}\cdot\cancel{2^k}\cdot\cancel{x^k}}\right| = 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \quad : \quad I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Berechnen der Koeffizienten a_0 und a_1 in $f'(x) = a_0 + a_1x + O(x^2)$ $\qquad f'(x) = -2 + 8x + O(x^2)$

Berechnen der Koeffizienten b_0 und b_1 in $f(x) \cdot f'(x) = b_0 + b_1x + O(x^2)$

$f(x) \cdot f'(x) = \left(1 - 2x + O(x^2)\right)\left(-2 + 8x + O(x^2)\right) = -2 + (8+4)x + O(x^2)$

Berechnen der Koeffizienten c_0 und c_1 in der Entwicklung $\frac{f(x)}{f'(x)} = c_0 + c_1x + O(x^2)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)}{f'(x)} = \left(1 - 2x + O(x^2)\right):\left(-2 + 8x + O(x^2)\right) = -\tfrac{1}{2} - x + O(x^2)\\
&\qquad -(1 - 4x)\\
&\qquad\qquad 2x
\end{aligned}
$$

Vergleichskriterium (VK)

Vergleich mit den beiden bekannten Vergleichsreihen: $\frac{1}{k^2}$ → konvergent | Vergleichsreihe $\frac{1}{k}$ → divergent

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-1}$	$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-1} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$	für k ≥ 2	Vergleichsreihe $\frac{1}{k^2}$ → konvergent
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)} \geq \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}$		Vergleichsreihe $\frac{1}{k}$ → divergent
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+3k)^2}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+3k)^2} \leq \frac{1}{9k^2} \leq \frac{1}{k^2}$	für k ≥ 1	Vergleichsreihe $\frac{1}{k^2}$ → konvergent
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-3}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-3} \geq \frac{1}{4k} \leq \frac{1}{k}$	für k ≥ 1	Vergleichsreihe $\frac{1}{k}$ → divergent
$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$	$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$	für k ≥ 3	Vergleichsreihe $\frac{1}{k}$ → divergent

Potenzreihen - Konvergenz Intervall

Potenzreihen sind Funktionen, die als Grenzwerte von Polynomen entstehen, deren Koeffizienten schnell genug abfallen. Ihre Eigenschaften sind:

1. Innerhalb ihres Konvergenzintervalls ist eine Potenzreihe eine stetige Funktion. Ihr Graph zeigt also weder Sprünge noch Lücken.
2. Innerhalb ihres Konvergenzintervalls lassen sich Summanden einer Potenzreihe beliebig umstellen.
3. Im Durchschnitt der Konvergenzintervalle zweier Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt kann man diese Potenzreihen addieren und multiplizieren.
4. Auch eine Polynomdivision funktioniert ausserhalb einer Nullstelle des Nenners.
5. Identische Potenzreihen besitzen dieselben Koeffizienten, was einen Koeffizientenvergleich ermöglicht und ausserdem zeigt, dass Potenzreihen durch ihre Koeffizienten bestimmt sind.
6. Potenzreihen können gliedweise differenziert und integriert werden.

$\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{3^2}+\frac{(x-2)^4}{4^2}+\cdots \qquad \sum_{i\geq 1}\frac{(x-2)^i}{i^2} \qquad a_i(x)=\frac{(x-2)^i}{i^2}, \qquad a_{i+1}(x)=\frac{(x-2)^{i+1}}{(i+1)^2}$

$\left|\frac{a_{i+1}(x)}{a_i(x)}\right|=\left|\frac{(x-2)^{i+1}}{(i+1)^2}\cdot\frac{i^2}{(x-2)^i}\right|=\left|\frac{(x-2)^{\cancel{i+}1}}{(i+1)^2}\cdot\frac{i^2}{\cancel{(x-2)^i}}\right|=\frac{i^2}{(i+1)^2}\cdot|x-2|=\left(\frac{i}{i+1}\right)^2\cdot|x-2|=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{i}}\right)^2\cdot|x-2|$

$\xrightarrow[GWS]{i\to\infty} r=|x-2|<1 \qquad \mathbb{I}=(1,3)$ Konvergenz-Intervall $\mathbb{I}$

$\boldsymbol{T_nf(x,a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k}, \quad \boldsymbol{f^{(0)}(x)=f(x)}$ $\qquad a$ = Entwicklungszentrum (Bspw. $a=0$)

Beispiel: $f(x)=e^x, \quad a=0, \quad \mathbb{I}=\mathbb{R}, \quad n=3 \qquad e^{(0)}$ = Funktion selbst, $e^{(1)}$ = 1. Ableitung, usw.

$T_3f(x,0)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k=\frac{e^{(0)}(0)}{0!}\cdot(x-0)^0+\frac{e^{(1)}(0)}{1!}\cdot(x-0)^1+\frac{e^{(2)}(0)}{2!}\cdot(x-0)^2+\frac{e^{(3)}(0)}{3!}\cdot(x-0)^3=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3$

$f(x)=\sin(x), \quad a=0, \quad \mathbb{I}=\mathbb{R}, \quad n=5$

$sin^{(0)}=\sin(x), \; sin^{(1)}=\cos(x), sin^{(2)}=-sin(x), sin^{(3)}=-cos(x), sin^{(4)}=sin(x), sin^{(5)}=\cos(x)$

$T_5f(x,0)=\sum_{k=0}^{5}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k=$

$\frac{sin(0)}{0!}\cdot(x-0)^0+\frac{cos(0)}{1!}\cdot(x-0)^1+\frac{-sin(0)}{2!}\cdot(x-0)^2+\frac{-cos(0)}{3!}\cdot(x-0)^3+\frac{sin(0)}{4!}\cdot(x-0)^4+\frac{cos(0)}{5!}\cdot(x-0)^5=0+x+0-\frac{1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$

$f(x)=\cos(x), \quad a=0, \quad \mathbb{I}=\mathbb{R}, \quad n=4$

$cos^{(0)}=\cos(x), \quad cos^{(1)}=-\sin(x), \quad cos^{(2)}=-cos(x), \quad cos^{(3)}=sin(x), \quad cos^{(4)}=cos(x)$

$T_4f(x,0)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k=$

$\frac{cos(0)}{0!}\cdot(x-0)^0+\frac{-sin(0)}{1!}\cdot(x-0)^1+\frac{-cos(0)}{2!}\cdot(x-0)^2+\frac{sin(0)}{3!}\cdot(x-0)^3+\frac{cos(0)}{4!}\cdot(x-0)^4=$

$1+0-\frac{1}{2!}x^2+0+\frac{1}{4!}x^4=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$

Taylor Formel mit Restglied

$f(x)=T_n(x,a)+R_nf(x,a) \qquad R_nf(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$ für eine Zwischenstelle $\xi\in(x,a)$

Für Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktionen geht das Restglied für alle $x\in\mathbb{R}$ gegen Null.

Eulerformel: $e^{ix}=cos(x)+i\cdot sin(x) \qquad i^2=-1 \qquad e^x=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$

$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+O(x^6)=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\cdot\frac{x^5}{5!}+O(x^6)$

$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)\right)+i\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)$

$= \qquad cos(x) \qquad +i\cdot \qquad sin(x)$

Lösen von Ungleichungen

$\frac{1}{5}|3x-2|<1, \;\; |3x-2|<5$

Fall 1: $3x-2\geq 0, \;\; 3x\geq 2, \;\; x\geq\frac{2}{3}$ → $3x-2<5, \;\; 3x<7, \; x<\frac{7}{3}$

Fall 2. $3x-2<0, \;\; 3x<2, \;\; x<\frac{2}{3}$ → $|3x-2|<5=-(3x-2)<5, \; -3x+2<5, \; -3x<3, \;\; x>-1$

$\mathbb{I}=\left(-1,\frac{7}{3}\right)$

$1-\frac{3x-2}{5}+\frac{(3x-2)^2}{5^2}-\frac{(3x-2)^3}{5^3}+\cdots \qquad \boldsymbol{|x-a|<r} \quad , \boldsymbol{\mathbb{I}=(a-r, \; a+r)}$

$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\frac{(3x-2)^k}{5^k}, \quad a_k(x)=\frac{(3x-2)^k}{5^k}, \qquad a_{k+1}(x)=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(3x-2)^{k+1}}{5^{k+1}}$

$\left|\frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)}\right|=\left|\frac{(3x-2)^{k+1}}{5^{k+1}}\cdot\frac{5^k}{(3x-2)^k}\right|=\left|\frac{(3x-2)^{\cancel{k+}1}}{5^{\cancel{k+}1}}\cdot\frac{\cancel{5^k}}{\cancel{(3x-2)^k}}\right|=\left|\frac{3x-2}{5}\right|=\frac{1}{5}|3x-2|\xrightarrow[GWS]{x\to\infty}\frac{1}{5}|3x-2|<1$

$=\frac{3}{5}\left|x-\frac{2}{3}\right|<1, \;\; =\left|x-\frac{2}{3}\right|<\frac{5}{3} \qquad \frac{2}{3}-\frac{5}{3}\; und \;\frac{2}{3}+\frac{5}{3}, \;\; \mathbb{I}=\left(-1,\frac{7}{3}\right)$

$\frac{x^2}{(\ln(2))^2}+\frac{x^3}{(\ln(3))^3}+\frac{x^4}{(\ln(4))^4} \qquad a_k(x)=\frac{x^k}{(\ln(k))^k}, \qquad a_{k+1}(x)=\frac{x^{k+1}}{(\ln(k+1))^{k+1}}$

$\left|\frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)}\right|=\left|\frac{x^{k+1}}{(\ln(k+1))^{k+1}}\cdot\frac{(\ln(k))^k}{x^k}\right|=|x|\cdot\left(\frac{\ln(k)}{\ln(k+1)}\right)^k\cdot\frac{1}{\ln(k+1)}\xrightarrow[GWS]{x\to\infty}=0 \qquad \mathbb{I}=\mathbb{R}$

Bleibt x selbst, $0\leq k\leq 1$, konvergiert zu Null

Bestimmung Näherungspolynoms 2. Grades der Funktion $cos^2(x)$ mittels Taylor-Reihe und Entwicklungszentrum $x_0 = 0$. Näherungspolynom $f_2(x) = 3x - 1$

$f(x) = cos^2(x) \Longrightarrow f(0) = 1$ $\quad f'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \Longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 2 \cdot \sin^2(x) - 2 \cdot cos^2(x) \Longrightarrow f''(0) = -2$

Das Taylor Polynom 2. Grades ist $p_2(x) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 = 1 - x^2$

$1 - x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2 - 3x - x^2 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{-2}$

Differentialgleichungen

Differentialgleichung = Gleichung wo eine Ableitung vorkommt → Umstellen nach y'

Beispiele für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$y' = -\sin(x) \cdot y + x^3 e^{\cos(x)}$ $\quad y' = 5y + x^2$ $\quad y' = \frac{6y}{x} - x^6 \cos(x)$

$y' = xe^{-x^2} - xy$ $\quad y' = 3 - 2y$

Homogene Lösung (Trennung der Variablen)

$y' = f(x) \cdot y + g(x)$ $\quad g(x) =$ Störfunktion

$\boldsymbol{y = y_h + y_p}$ $\quad \boldsymbol{y_h}$ = **homogene Lösung** $\quad \boldsymbol{y_p}$ = **partikuläre Lösung**

$\boldsymbol{y_h = c \cdot e^{\int f(x)dx},\ c \in \mathbb{R}}$ $\quad \boldsymbol{y_p = y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h} dx,\ c \in \mathbb{R}}$

$y' = \cos(x) \cdot y + x^3 e^{\sin(x)}$ $\quad y_h = c \cdot e^{\int \cos(x)dx} = c \cdot e^{sin(x)}, c \in \mathbb{R}$

$y_p = \cancel{c} \cdot e^{\sin(x)} \cdot \int \frac{x^3 \cancel{e^{\sin(x)}}}{\cancel{c} \cdot \cancel{e^{\sin(x)}}} dx = e^{\sin(x)} \cdot \int x^3 dx = e^{\sin(x)} \cdot \frac{1}{4} x^4$ $\quad y = c \cdot e^{\sin(x)} + \frac{1}{4} x^4 e^{\sin(x)}$

$\frac{d}{dx}$ $\quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f' = \frac{df}{dx}$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

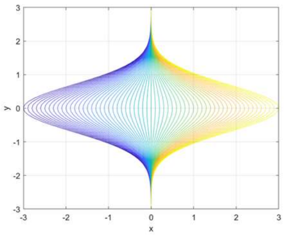
$\frac{d}{dt}$ $\quad f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ $\quad f' = \frac{df}{dt}$ $\quad y' = \frac{dy}{dt}$

Zusammenfassung 3. Semester AN3

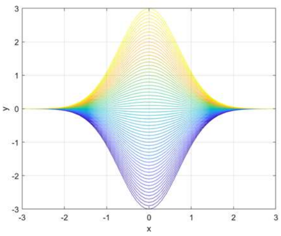
Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Funktionen von mehreren Variablen

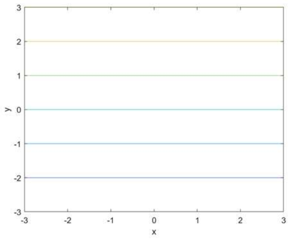
$f(x,y) = \mathrm{e}^{y^2 \cdot \mathrm{x}}$



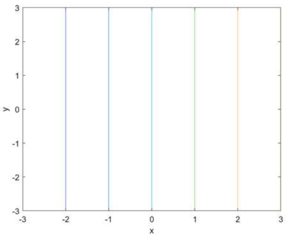
$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 \cdot \mathrm{y}}$



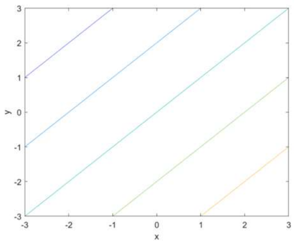
$f(x,y) = y$



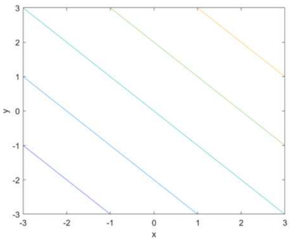
$f(x,y) = x$



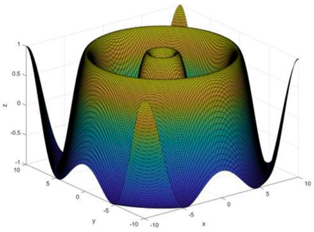
$f(x,y) = x - y$



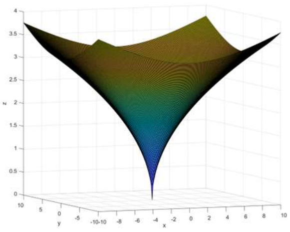
$f(x,y) = x + y$



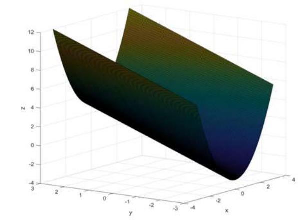
$f(x,y) = \sin\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$



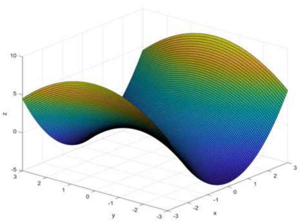
$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}$



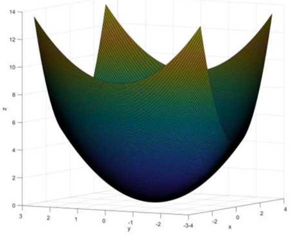
$f(x,y) = x^2 + y$



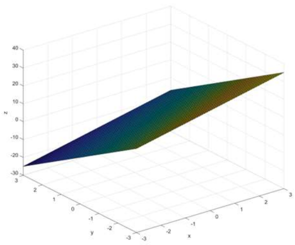
$f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2$



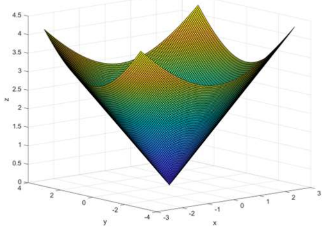
$f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot y^2$



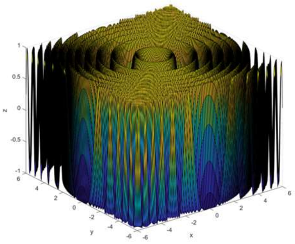
$f(x,y) = 3x - 7y + 5$



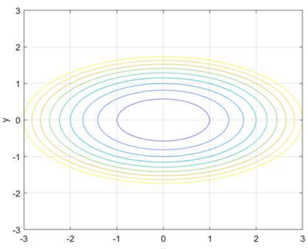
$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$



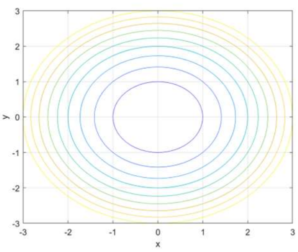
$f(x,y) = \sin\,(x^2 + y^2)$



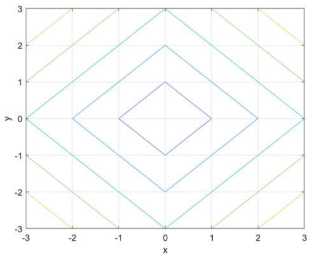
$f(x,y) = x^2 + 3y^2$



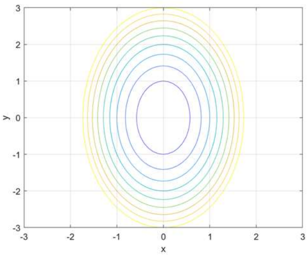
$f(x,y) = x^2 + y^2$



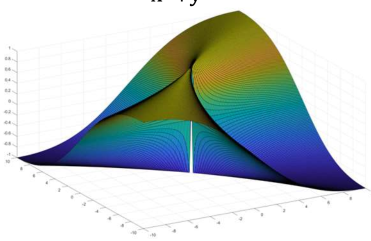
$f(x,y) = |x| + |y|$



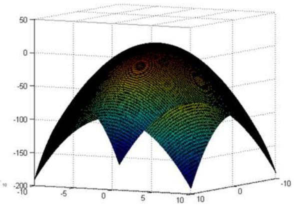
$f(x,y) = 3\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$



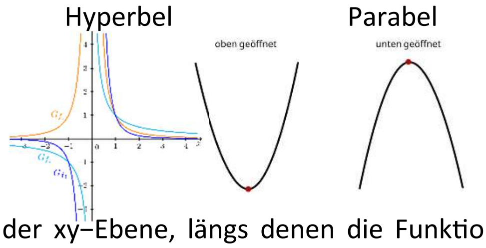
$f(x,y) = \frac{2xy}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$



$f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$



Niveaulinien von zwei Funktionen



Die Niveaulinien sind:

$f(x,y) = y^2 + 2y + x^2 + 4x + 5$ → Kreise
$f(x,y) = -3xy$ → Hyperbeln
$f(x,y) = 0.5y + x$ → Geraden
$f(x,y) = y^2 + 9x$ → Parabeln

Die Niveaulinien einer Funktion $z = f(x,y)$ sind die Kurven in der xy–Ebene, längs denen die Funktion $f(x,y)$ konstant bleibt, sprich den gleichen Wert haben. Die Niveaulinie von f zum Wert $c \in \mathbb{R}$ ist definiert:
$\mathcal{N}_f(\mathrm{c}) = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{c}\}$
Die Niveaulinie zu einem bestimmten Wert c kann auch die leere Menge sein. Beispielsweise sind bei der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ die Niveaulinien zu Werten c < 0 leer (es ist mit dieser Funktion nicht möglich, einen Wert tiefer als Null zu erhalten). Der Graph einer Funktion von zwei Variablen ist also eine Fläche im Raum, während die Niveaulinien Kurven in der Ebene sind.

Untersuchung Niveaulinien: Wir erhalten die Funktionsgleichung der Niveaulinien für einen gegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$, indem wir die Funktionsgleichung $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \boldsymbol{c}$ nach **y** auflösen:

$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = -2x - y + 8$ $\quad -2x - y + 8 = c$ $\quad y = -2x + 8 - c$

Die Niveaulinien zu verschiedenen Werten von c sind also parallele Geraden mit Steigung $\mathrm{m} = -2$

$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 8 - x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 8 - c$	Für c > 8 sind die Niveaulinien die leere Menge.
$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}$	$\sqrt{-\ln(c)}$	Es existieren Niveaulinien nur für 0 < c ≤ 1
$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1 - (x^2 + y^2)$	$x^2 + y^2 = 1 - c$	Es existieren Niveaulinien nur für c ≤ 1

Die Niveaulinie zum Wert c=2 dieser Funktion ist demzufolge die leere Menge!

Niveauflächen von drei Funktionen

Gleiche Definition wie bei zwei Funktionen. Die **Niveaufläche** von f zum Wert $c \in \mathbb{R}$ ist definiert:
$\mathcal{N}_f(\mathrm{c}) = \{(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3 | f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{c}\}$ → vorhandene Funktion wird wieder = c gesetzt.
$f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = c \Leftrightarrow a_1 x + a_2 y + a_3 z = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a_4}$
Beispiel: $f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}$ → N-Fläche konzentrische Kugeln

Partielle Ableitung

Partielle Ableitungen werden berechnet, indem man **alle anderen Variablen** als diejenige, nach der abgeleitet wird, als **Parameter behandelt**. Auf diese Art erhält man aus Funktionen mehrerer Variablen Funktionen einer **einzigen Variablen** (partiellen Funktionen), für die die **gewöhnlichen Ableitungsregeln gelten**.

Ableitung für die Beispiel-Funktion: $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2y + 3y^5 + 10x + 2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 6x^2 + 8\mathrm{x}\mathrm{y} + 10$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 4x^2 + 15y^4$

$f_{(x,y,z)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ Kettenregel! Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$\partial = partielles\ Differential$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{(x,y)} = xy^2 + x^2\sqrt{y} + \frac{x}{y} = xy^2 + x^2y^{\frac{1}{2}} + xy^{-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^2 + 2xy^{\frac{1}{2}} + y^{-1} = y^2 + 2x\sqrt{y} + \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2yx + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}x^2 - xy^{-2} = 2yx + \frac{x^2}{2\sqrt{y}} - \frac{x}{y^2}$$

$$g_{(r,s)} = \ln(r^2 + rs + 1)$$
$$\frac{\partial g}{\partial r} = g_r = \frac{1}{r^2+rs+1} \cdot 2r + s = \frac{2r+s}{r^2+rs+1}$$
$$\frac{\partial g}{\partial s} = g_s = \frac{1}{r^2+rs+1} \cdot r = \frac{r}{r^2+rs+1}$$

$h_{(u,v)} = \arctan\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) \qquad f(x) = \arctan(x) \quad \rightarrow \quad f\grave{}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{\partial h}{\partial u} = h_u = \frac{1}{1+\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^2} \cdot (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \cdot \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u = \frac{u}{(1+u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}$

$\frac{\partial h}{\partial v} = h_v = \frac{1}{1+\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^2} \cdot (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+u^2+v^2} \cdot \frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2v = \frac{v}{(1+u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}$

$F_{(\alpha,\beta)} = \alpha \cdot \sin(\alpha^2-\beta^2) \qquad f(x) = \sin(x) \rightarrow \quad f\grave{}(x) = \cos(x)$

$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = F_\alpha = 1 \cdot \sin(\alpha^2-\beta^2) + \alpha \cdot \cos(\alpha^2-\beta^2) \cdot 2\alpha = \sin(\alpha^2-\beta^2) + 2\alpha^2 \cdot \cos(\alpha^2-\beta^2)$

$\frac{\partial F}{\partial \beta} = F_\beta = 0 \cdot \sin(\alpha^2-\beta^2) + \alpha \cdot \cos(\alpha^2-\beta^2) \cdot (-2\beta) = -2\alpha\beta \cdot \cos(\alpha^2-\beta^2)$

Berechnen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ der Funktion $f(x,y)$ der Stelle $(x_0,y_0) = (3,2)$

$f_{(x,y)} = \frac{x^2}{1+y} = x^2 \cdot (1+y)^{-1}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x \cdot (1+y)^{-1} + x^2 \cdot -(1+y)^{-2} \cdot 0 = 2x \cdot (1+y)^{-1} = \frac{2x}{1+y} \qquad \rightarrow f_x(3,2) = \frac{2 \cdot 3}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \cdot (1+y)^{-1} + x^2 \cdot -(1+y)^{-2} \cdot 1 = x^2 \cdot -(1+y)^{-2} = -\frac{x^2}{(1+y)^2} \rightarrow f_y(3,2) = -\frac{3^2}{(1+2)^2} = -1$

Berechnen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ der Funktion $f(x,y)$ der Stelle $(x_0,y_0) = (3,2)$

$f_{(x,y)} = e^{-x} \cdot \sin(y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -e^{-x} \cdot \sin(y) + e^{-x} \cdot 0 = -e^{-x} \cdot \sin(y) \quad \rightarrow f_x(3,2) = -e^{-3} \cdot \sin(2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \cdot \sin(y) + e^{-x} \cdot \cos(y) = e^{-x} \cdot \cos(y) \rightarrow f_y(3,2) = e^{-3} \cdot \cos(2)$

Gradient – Dann geht die Luzi richtig ab!

Der Gradient ($grad(f)$, ∇f oder $\vec{\nabla} f$) der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist der Vektor, der aus den partiellen Ableitungen von f besteht: $\qquad grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} f x_1 \\ \vdots \\ f x_n \end{pmatrix} \qquad \nabla f = \text{Nabla} - \text{Operator}$

Beispiel (wurde oben bereits gelöst): $f_{(x,y,z)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$|\nabla f| = |grad(f)| = \frac{1}{r^2}$

Berechnen des Gradienten $\nabla f = (x_0, y_0)$ der Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0)

$f(x,y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot e^y, \quad (x_0,y_0) = (1,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 8x - 3y^2 + 1 \cdot e^y + x \cdot 0 = 8x - 3y^2 + e^y \quad \rightarrow f_x(1,0) = 8 \cdot 1 - 3 \cdot 0^2 + e^0 = 8 + 1 = 9$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -6xy + 0 \cdot e^y + x \cdot e^y = -6xy + x \cdot e^y \quad \rightarrow f_y(1,0) = -6 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$

Gradient: $\nabla f(1,0) = \binom{9}{1}$

$f(x,y) = \cos(x-y) - xy, \quad (x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -\sin(x-y) \cdot 1 - y = -\sin(x-y) - y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -\sin(x-y) \cdot (-1) - x = \sin(x-y) - x$

Gradient: $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), mit(x \neq 0)$ Bestimmen des Gradienten in Punkt $(x_0, y_0) = (1,1), (x_1, y_1) = (-1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot (-yx^{-2}) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{\frac{x^2+y^2}{x^2} \cdot x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot (x^{-1}) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x(x^2+y^2)} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$(x_0, y_0) = (1,1)$: $$\nabla f|_{(x_0,y_0)=(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}|_{(x_0,y_0)=(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1^2+1^2} \\ \frac{1}{1^2+1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(x_1, y_1) = (-1,1)$: $$\nabla f|_{(x_1,y_1)=(-1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}|_{(x_1,y_1)=(-1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(-1)^2+1^2} \\ \frac{-1}{(-1)^2+1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Richtungsableitung

1. **Gradient berechnen**
2. $\boldsymbol{D_{\vec{a}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$

Beispiel: $f(x,y) = \mathrm{xy} + \mathrm{x}^2$, Punkt $P = (1,2)$, Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen des Gradienten von f in Punkt P:

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 1 \cdot y + x \cdot 0 + 2x = y + 2x$ → $f_x(1,2) = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \cdot y + x \cdot 1 + 0 = x$ → $f_y(1,2) = 1$ $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in der Richtung von $\vec{a}$: Richtungsableitung = **Zahl/Skalar!!!**

$$D_{\vec{a}} f(P) = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{16}{5} + \frac{3}{5} = \frac{19}{5}$$

Beispiel: $f(x,y,z) = \mathrm{x}^2 \cdot e^{yz} + yz^3$, Punkt $P = (2,0,1)$, Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimmen des Gradienten von f in Punkt P:

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x \cdot e^{yz} + x^2 \cdot 0 + 0 = 2x \cdot e^{yz}$ → $f_x(2,0,1) = 2 \cdot 2 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \cdot e^{yz} + x^2 \cdot ye^{yz} + z^3 = x^2 \cdot ze^{yz} + z^3$ → $f_y(2,0,1) = 2^2 \cdot 1e^0 + 1^3 = 4 + 1 = 5$

$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = 0 \cdot e^{yz} + x^2 \cdot ze^{yz} + 3yz^2 = x^2 \cdot ye^{yz} + 3yz^2$ → $f_z(2,0,1) = 2^2 \cdot 0e^0 + 3 \cdot 0 \cdot 1^2 = 0$

$\nabla f(2,0,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen der Richtungsableitung von f in der Richtung von $\vec{a}$:

$$D_{\vec{a}} f(P) = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ f_z(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Eine Funktion $f(x,y)$ hat an einem Punkt P in die Richtungen $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ die Richtungsableitungen $D_{\vec{v}} f(P) = 5$ und $D_{\vec{w}} f(P) = 2$. Berechnung des Gradienten $\nabla f(P)$ von $f(x,y)$ im Punkt P:

$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5$ $\Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (3f_x + 4f_y) = 5$

$D_{\vec{w}} f(P) = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 5$ $\Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (3f_x - 4f_y) = 5$ Lösen via lineares Gleichungssystem

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 25 \\ 3 & -4 & 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 25 \\ 6 & 0 & 35 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{35}{6} \\ 3 & 4 & 25 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{35}{6} \\ 0 & 4 & 25 - \frac{3 \cdot 35}{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{35}{6} \\ 0 & 4 & \frac{50}{2} - \frac{35}{2} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{35}{6} \\ 0 & 4 & \frac{15}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{35}{6} \\ 0 & 1 & \frac{15}{8} \end{array}\right)$$

$f_x(P) = \frac{35}{6}$ $f_y(P) = \frac{15}{8}$ gesuchte Gradient: $\nabla f(P) = \begin{pmatrix} \frac{35}{6} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}$

Wann ist ein Richtungsvektor senkrecht?
Dann wenn das Skalarprodukt aus dem Gradienten und dem Richtungsvektor null ergibt:

Beispiel: Gradient: $\nabla f = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot a_1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot a_2 = 0$

Eine Möglichkeit ist, wenn $a_1 = 1 \wedge a_2 = 1$ $\quad \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Natürlich geht auch jeder Vektor, der zu $\vec{a}$ kollinear ist!

Tangentialebene

Sei $z = f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion. Die Tangentialebene T an den Graphen von f im Punkt, $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist durch die **Gleichung** $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Bestimmen der Gleichung der Tangentialebene an die Flächen im gegebenen Punkt

$z = \sin(x + y), \qquad (x_0, y_0) = (1, -1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \cos(x + y) \cdot 1 \qquad f_x(x_0, y_0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \cos(x + y) \cdot 1 \qquad f_y(x_0, y_0) = 1$

$f(x_0, y_0) = \sin(1 - 1) = \sin(0) = 0$

$z = 0 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - -1) = x + y$

$z = \ln(2x + y), \qquad (x_0, y_0) = (-1, 3)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1}{2x+y} \cdot 2 = \frac{2}{2x+y} \qquad f_x(x_0, y_0) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{2x+y} \cdot 1 = \frac{1}{2x+} \qquad f_y(x_0, y_0) = 1$

$f(x_0, y_0) = \ln(2x + y) = \ln(2 \cdot (-1) + 3) = \ln(1) = 0$

$z = 0 + 2 \cdot (x - -1) + 1 \cdot (y - 3) = 2x + y - 1$

$f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad (x_0, y_0) = (1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 1 \cdot (x^2 + y^2)^{-1} + x \cdot -(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} =$
$\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_x(x_0, y_0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \cdot (x^2 + y^2)^{-1} + x \cdot -(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y(x_0, y_0) = -0.5$

$f(x_0, y_0) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2} + 0 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (y - 1) = -\frac{1}{2}y + 1$

Bestimmen der Gleichung der Tangentialebene an die Flächen im gegebenen Punkt mit **vorhanden Gradient**.

$f(x, y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot e^y, \qquad (x_0, y_0) = (1, 0) \qquad$ Gradient: $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(x_0, y_0) = 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot e^0 = 4 - 0 + 1 = 5$

$z = 5 + 9 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) = 9x + y - 4$

$f(x, y) = \cos(x - y) - xy, \qquad (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad$ Gradient: $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$f(x_0, y_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi^2}{4}$

$z = -1 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(y - -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y - 1 - \frac{\pi^2}{4}$

Totales Differential

Bestimmen des totalen Differential der Funktion $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ im Punkt (x_0, y_0), approximieren damit den Funktionswert $f(x_1, y_1)$ und vergleichen mit dem exakten Funktionswert an der Stelle (x_1, y_1).

$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$, $\quad (x_0, y_0) = (2, 1) \quad (x_1, y_1) = (1.95, 1.08)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1}{2}(20 - x^2 - 7y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{20-x^2-7y^2}} \qquad f_x(x_0, y_0) = -\frac{2}{\sqrt{20-2^2-7\cdot 1^2}} = -\frac{2}{3}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{2}(20 - x^2 - 7y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-14y) = -\frac{7y}{\sqrt{20-x^2-7y^2}} \qquad f_y(x_0, y_0) = -\frac{7\cdot 1}{\sqrt{20-2^2-7\cdot 1^2}} = -\frac{7}{3}$

$f(x_0, y_0) = \sqrt{20 - 2^2 - 7 \cdot 1^2} = 3$

Das totale Differential ist damit $df = -\frac{2}{3}dx - \frac{7}{3}dy$ Für $(x, y) = (1.95, 1.08)$ gilt also approximativ:

$df(x, y) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (1.95 - 2, 1.08 - 1) = (-0.05,\ 0.08)$

$f(1.95{,}1.08) \approx f(2{,}1) + df(-0.05{,}0.08) = 3 + (-\frac{2}{3}) \cdot (-0.05) - \frac{7}{3} \cdot (0.08) \approx 2.8467$

$f(1.95{,}1.08) = 2.8342$ (eingesetzt in die Ursprungsgleichung $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$)

$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x^2 - xy + 3y^2$, $\quad (x_0, y_0) = (3, -1) \quad (x_1, y_1) = (2.96, -0.95)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x - y \qquad f_x(x_0, y_0) = 2 \cdot 3 - -1 = 7$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -x + 6y \qquad f_y(x_0, y_0) = -3 + 6 \cdot (-1) = -9$

$f(x_0, y_0) = 3^2 - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)\text{^}2 = 15$

Das totale Differential ist damit $df = 7dx - 9dy$ Für $(x, y) = (2.96, -0.95)$ gilt also approximativ:

$df(x, y) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (2.96 - 3, -0.95 - -1) = (-0.04,\ 0.05)$

$f(2.96, -0.95) \approx f(3, -1) + df(-0.04,\ 0.05) = 15 + 7 \cdot (-0.04) + (-9) \cdot 0.05 \approx 14.27$

$f(2.96, -0.95) = 14.2811$ (eingesetzt in die Ursprungsgleichung $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$)

$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 5 \cdot \left(\ln\left(\frac{x-y}{y^2}\right) - \frac{1}{5}\right)$, $\quad (x_0, y_0) = (2, 1) \quad (x_1, y_1) = (2.1,\ 0.95)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 5 \cdot \frac{1}{\frac{x-y}{y^2}} \cdot (1) \cdot (y^{-2}) + (x - y) \cdot (0) = 5 \cdot \frac{\cancel{y^2}}{x-y} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}} = \frac{5}{x-y} \qquad f_x(x_0, y_0) = \frac{5}{2-1} = 5$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 5 \cdot \frac{1}{\frac{x-y}{y^2}} \cdot \frac{d}{dy} \cdot \left[\frac{x-y}{y^2}\right], \qquad \left[\frac{x-y}{y^2}\right] = \frac{(-1)\cdot(y^2)(x-y)\cdot(2y)}{y^4} = \frac{-y^2-2xy+2y^2}{y^4} = \frac{-2xy+y^2}{y^4} = \frac{-2x+y}{y^3}$

$= 5 \cdot \frac{y^2}{x-y} \cdot \frac{-2x+y}{y^3} = \frac{5(-2x+y)}{y(x-y)} \qquad f_y(x_0, y_0) = \frac{5(-2\cdot 2+1)}{1(2-1)} = \frac{5(-3)}{1} - 15$

$f(x_0, y_0) = 5 \cdot \left(ln\left(\frac{2-1}{1}\right) - \frac{1}{5}\right) = -1$

Das totale Differential ist damit $df = 5dx - 15dy$ Für $(x, y) = (2.1,\ 0.95)$ gilt also approximativ:

$df(x, y) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (2.1 - 2, 0.95 - 1) = (0.1, -0.05)$

$f(2.1,\ 0.95) \approx f(2{,}1) + df(0.1, -0.05) = -1 + 5 \cdot (0.1) + (-15) \cdot (-0.05) \approx 0.25$

$f(2.1,\ 0.95) = 0.2117$ (eingesetzt in die Ursprungsgleichung $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$)

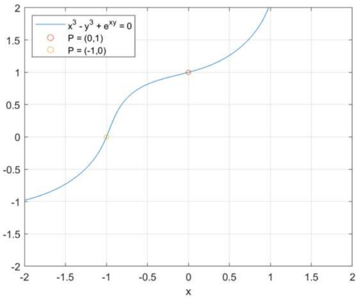
Ableitung impliziter Funktionen - Satz über implizite Funktionen

Idee: Untersuchung der Situation, dass eine ebene Kurve in der Form $F(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ gegeben ist, aber nicht nach y aufgelöst (d.h. als $y = f(\mathrm{x})$ geschrieben) werden kann. Man kann trotzdem die Steigung der Kurve in einem Kurvenpunkt $P = (\mathrm{x},\mathrm{y})$, der auf der Kurve liegt (die Bestimmung solcher Kurvenpunkte ist manchmal approximativ möglich) bestimmen. → Satz über implizite Funktionen

$y = f(\mathrm{x})$: $\qquad y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad f'(x) = -\frac{F_x(x,\ f(x))}{F_y(x,\ f(x))}$

- → Um die Formel zu verwenden, muss man die Koordinaten eines speziellen Punktes (x,y) auf der Kurve $F(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ kennen (oder schätzen).

Berechnen der Tangentensteigung in den Punkten $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (-1, 0)$ an die Kurve mit der Gleichung: $x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$



$F(x, y) = x^3 - y^3 + e^{xy}$

$F_x = 3x^2 + y \cdot e^{xy}$ $\qquad F_y = -3y^2 + x \cdot e^{xy}$

$f'(x) = -\frac{3x^2+y\cdot e^{xy}}{-3y^2+x\cdot e^{xy}}$

$P_1 = (0,1)$: $\quad f'(0) = -\frac{3x^2+y\cdot e^{xy}}{-3y^2+x\cdot e^{xy}}|_{(x,y)=(0,1)} = \frac{1}{3}$

$P_2 = (-1,0)$: $\quad f'(-1) = -\frac{3x^2+y\cdot e^{xy}}{-3y^2+x\cdot e^{xy}}|_{(x,y)=(-1,0)} = 3$

$x = y \cdot \cos(y), \qquad P = (\pi, -\pi)$

$F(x, y) = x - y \cdot \cos(y)$

$F_x = 1$ $\qquad F_y = 0 - 1 \cdot \cos(y) + (-y) \cdot -\sin(y) = -\cos(y) + y \cdot \sin(y)$

$f'(x) = -\frac{1}{-\cos(y)+y\cdot\sin(y)}$

$P = (\pi, -\pi), \quad f'(\pi) = -\frac{1}{-\text{co }(\pi)+(-\pi)\cdot\sin(-\pi)}|_{(x,y)=(\pi,-\pi)} = -\frac{1}{-(-1)} = -1$

$(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2, \qquad P = (-1, -1)$

$F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 8x^2y^2$

$F_x = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 16xy^2$ $\qquad F_y = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 16x^2y$

$f'(x) = -\frac{3(x^2+y^2)^2\cdot 2x-16xy^2}{3(x^2+y^2)^2\cdot 2y-16\ ^2y}$

$P = (-1, -1), f'(-1) = -\frac{3(x^2+y^2)^2\cdot 2x-16xy^2}{3(x^2+y^2)^2\cdot 2y-16x^2y}|_{(x,y)=(-1,-1)} = -\frac{-8}{-8} = -1$

Tangentialebene bei $P = (x_0, y_0, z_0)$ soll parallel zur x/y-Ebene sein: $f(x, y) = 5x^2 - x + 16y^2 + y + 7$

➔ Steigung der beiden Achsen/Funktionen müssen somit Null sein

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 10x - 1$ $\qquad f_x = 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow 10x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 32y + 1$ $\qquad f_x = 32y + 1 = 0 \Leftrightarrow 32y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{32}$

$f\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{32}\right) = 5x^2 - x + 16y^2 + y + 7 = 6.934$ $\qquad P = (x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{10}, -\frac{1}{32}, 6.934)$

Höhere partielle Ableitungen

Die höheren partiellen Ableitung einer Funktion $z = f(x, y)$ sind definiert als partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen:

$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{xyx} \quad f_{yxx} \quad f_{xyy} \quad f_{yxy} \quad f_{yyx} \quad f_{yyy}$

$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ $\qquad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$

Ob zuerst nach x und dann nach y oder umgekehrt abgeleitet wird, spielt keine Rolle!

Berechnen der partiellen Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung der Funktion $z = x \cdot e^y - y \cdot e^x$:

Ableitung 1. Ordnung

$f_x = 1 \cdot e^y + x \cdot 0 - 0 \cdot e^x - y \cdot e^x = e^y - y \cdot e^x$ $\qquad f_y = 0 \cdot e^y + x \cdot e^y - 1 \cdot e^x - 0 \cdot e^x = x \cdot e^y - e^x$

Ableitung 2. Ordnung

$f_{xx} = e^y - y \cdot e^x = 0 - 0 \cdot e^x - y \cdot e^x = -y \cdot e^x$ $\qquad f_{yy} = x \cdot e^y - e^x = 0 \cdot e^y + x \cdot e^y - 0 = x \cdot e^y$

$f_{xy} = f_{yx} = e^y - 1 \cdot e^x - y \cdot 0 = e^y - e^x$

Ableitung 3. Ordnung

$f_{xxx} = 0 \cdot e^x - y \cdot e^x = -y \cdot e^x$ $\qquad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = -1 \cdot e^x - y \cdot 0 = -e^x$

$f_{yyy} = 0 \cdot e^y + x \cdot e^y = x \cdot e^y$ $\qquad f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy} = 1 \cdot e^y + x \cdot 0 = e^y$

Berechnen der partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $\mathrm{H}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{x+y^2}{z^2+1}$:

$H_x = \frac{1\cdot(z^2+1)-(x+y^2)\cdot 0}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z^2+1)}, \quad H_y = \frac{2y\cdot(z^2+1)-(x+y^2)\cdot 0}{(z^2+1)^2} = \frac{2y}{(z^2+1)}, \quad H_z = \frac{0\cdot(z^2+1)-(x+y^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2} = \frac{-2xz-2y^2z}{(z^2+1)^2}$

$H_{xx} = 0 \qquad H_{yy} = \frac{2(z^2+1)-2y\cdot 0}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{(z^2+1)}, \quad H_{xy} = H_{yx} = 0, \quad H_{xz} = H_{zx} = \frac{0\cdot(z^2+1)-1\cdot 2z}{(z^2+1)^2} = \frac{-2z}{(z^2+1)^2}$

$H_{zz} = \frac{(-2x-2y^2)\cdot(z^2+1)^2-(-2xz-2y^2z)\cdot 2(z^2+1)\cdot 2z}{(z^2+1)^4} = \frac{(-2x-2y^2)\cdot(z^2+1)^1-(-2xz-2y^2z)\cdot 2\cdot 2z}{(z^2+1)^3} =$
$\frac{(-2xz^2-2y^2z^2-2x-2y^2)-(-8xz^2-8y^2z^2)}{(z^2+1)^3} = \frac{(-2xz^2-2y^2z^2-2x-2y^2)-(-8xz^2-8y^2z^2)}{(z^2+1)^3} = \frac{6x\ ^2+6y^2z^2-2x-2y^2}{(z^2+1)^3}$

$H_{yz} = H_{zy} = \frac{0\cdot(z^2+1)-2y\cdot 2z}{(z^2+1)^2} = \frac{-4yz}{(z^2+1)^2}$

Berechnen der partiellen Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung der Funktion $u(x,t) = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$:

$u_x = \frac{1\cdot\sqrt[3]{t}-x\cdot 0}{(\sqrt[3]{t})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \qquad u_t = \frac{0\cdot\sqrt[3]{t}-x\cdot\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{t})^2} = \frac{-x}{3(\sqrt[3]{t})^2 t^{\frac{2}{3}}} = \frac{-x}{3t^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}} = \frac{-x}{3t^{\frac{4}{3}}}$

$u_{xx} = 0 \qquad u_{tt} = \frac{0\cdot 3t^{\frac{4}{3}}-(-x)\cdot 4t^{\frac{1}{3}}}{9t^{\frac{8}{3}}} = \frac{4xt^{\frac{1}{3}}}{9t^{\frac{8}{3}}} = \frac{4xt^{\frac{1}{3}}}{9t^{\frac{8}{3}}} = \frac{4x}{9t^{\frac{7}{3}}}, \quad u_{xt} = u_{tx} = \frac{0\cdot\sqrt[3]{t}-1\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{-\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{3t^{\frac{4}{3}}}$

$u_{xxx} = 0 \qquad u_{xxt} = u_{xtx} = u_{txx} = 0, \quad u_{ttt} = \frac{0\cdot 9t^{\frac{7}{3}}-4x\cdot 21t^{\frac{4}{3}}}{81t^{\frac{14}{3}}} = \frac{-84xt^{\frac{4}{3}}}{81t^{\frac{14}{3}}} = \frac{-28x}{27t^{\frac{10}{3}}}$

$u_{ttx} = u_{txt} = u_{xtt} = \frac{4\cdot 9t^{\frac{7}{3}}-4x\cdot 0}{81t^{\frac{14}{3}}} = \frac{36t^{\frac{7}{3}}}{81t^{\frac{14}{3}}} = \frac{4}{9t^{\frac{7}{3}}}$

Hesse-Matrix

Sei $z = f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ eine zweimal differenzierbaren Funktion $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ mit Definitionsbereich $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$. Die Hesse-Matrix von f ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von f,

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ Da $f_{xy} = f_{yx}$ gilt, ist die Hesse-Matrix eine symmetrische Matrix!

Bestimmen der Hesse-Matrix folgender Funktion $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x^2 - y^2$

Ableitung 1. Ordnung

$f_x = 2x \qquad f_y = -2y$

Ableitung 2. Ordnung

$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = -2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

Die Hesse-Matrix ist somit $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Wie viele **echt verschiedene Einträge** hat die Hesse-Matrix einer Funktion von 7 Variablen maximal?

Die Hessematrix ist eine **quadratische symmetrische** Matrix (hier holt uns LA1 wieder ein) der Ableitung 2. Ordnung. Da es um die **echt verschiedenen** Einträge geht, muss lediglich die Elemente des oberen/unteren Dreiecks (Achtung, es ist hier keine Dreiecksmatrix) der Matrix gezählt werden, da der Rest identisch ist.

Eine Hesse-Matrix mit zwei Variablen sieht wie folgt aus: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat drei echt verschiedene Einträge, da $f_{yx} = f_{xy}$.

Somit können die Anzahl Variablen x, von x nach bis 1 nachunten gezählt aufsummiert werden:

Hier $x = 2$, → $2 + 1 = 3$ → $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)$

- → Für sieben Variablen gilt somit $S_7 = \sum_{k=0}^{6}(7-k) = 7+6+5+4+3+2+1 = 28$

Berechnen der partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = x^2 \cdot \cos(y) + y^2 \cdot \sin(x)$

$f_x = 2x \cdot \cos(y) + x^2 \cdot 0 + 0 \cdot \sin(x) + y^2 \cdot \cos(x) = 2x \cdot \cos(y) + y^2 \cdot \cos(x)$

$f_y = 0 \cdot \cos(y) + x^2 \cdot -\sin(y) + 2y \cdot \sin(x) + y^2 \cdot 0 = -x^2 \cdot \sin(y) + 2y \cdot \sin(x)$

$f_{xx} = 2\cos(y) + 2x \cdot 0 + 0 \cdot \cos(x) + y^2 \cdot -\sin(x) = 2\cos(y) - y^2 \cdot \sin(x)$

$f_{yy} = 0 \cdot \sin(y) - x^2 \cdot \cos(y) + 2 \cdot \sin(x) + 2y \cdot 0 = -x^2 \cdot \cos(y) + 2\sin(x)$

$f_{xy} = f_{yx} = 0 \cdot \cos(y) + 2x \cdot -\sin(y) + 2y \cdot \cos(x) + y^2 \cdot 0 = -2x \cdot \sin(y) + 2y \cdot \cos(x)$

Durch $f(x,y) = 0$ wird implizit eine Funktion $y = g(x,y)$ definiert. Der Graph dieser Funktion $y = g(x,y)$ verläuft durch den Punkt $P = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$. Bestimmen der Ableitung $g'(x)$ der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x_0 = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$: totales Differential $f'(x) = -\frac{F_x(x,\ f(x))}{F_y(x,\ f(x))}$

$$g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2x \cdot \cos(y) + y^2 \cdot \cos(x)}{-x^2 \cdot \sin(y) + 2y \cdot \sin(x)} = -\frac{2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{-\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8-\pi}{\pi+8}$$

Extremwertprobleme ohne Nebenbedingungen

1. Funktion partiell ableiten
2. Partielle Ableitungen Null setzten und Gleichungssystem lösen
3. Hesse-Matrix bestimmen
4. Extremstellen in Hesse-Matrix einsetzen und Definitheit bestimmen

Achtung: Ein lineares Gleichungssystem setzt Linearität voraus (was nun nicht gerade besonders überraschend ist)!!! x^2 und ähnliche Übeltäter sind NICHT linear!

Um die Informationen aus $H_f(x,y)$ auf eine einzige Kennzahl zu reduzieren, betrachten wir deren Determinante: $\Delta(x_0,y_0) = det\ H_f(x)|_{(x_0,y_0)} = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - \left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$

Es sei (x_0,y_0) ein kritischer Punkt im Innern des Definitionsbereichs der zweimal differenzierbaren Funktion $f(x,y)$ so ist die Definitheit gegeben durch:

- Ist $\Delta(x_0,y_0) > \mathbf{0}$ und $f_{xx}(x_0,y_0) > \mathbf{0}$, dann besitzt $f(x,y)$ in (x_0,y_0) ein **lokales Minimum**.
- Ist $\Delta(x_0,y_0) > \mathbf{0}$ und $f_{xx}(x_0,y_0) < \mathbf{0}$, dann besitzt $f(x,y)$ in (x_0,y_0) ein **lokales Maximum**.
- Ist $\Delta(x_0,y_0) < \mathbf{0}$, dann besitzt $f(x,y)$ in (x_0,y_0) einen **Sattelpunkt**.
- Ist $\Delta(x_0,y_0) = 0$, dann sind **weitere Untersuchungen notwendig**, es sind immer noch alle Fälle möglich.

Gleichungssysteme können via TR **menu → 3 Algebra → 7 Gleichungssysteme lösen → 1 Gleichungssysteme lösen** gelöst werden

Bestimmen der relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion: $f(x,y) = 2x^2 + 8y^2 - 2xy^2$

Ableitung 1. Ordnung

$f_x = 4x - 2y^2$ $\quad f_y = 16y - 4xy$

Die beiden ersten Ableitungen müssen gegen Null gesetzt und gelöst werden:

$4x - 2y^2 = 0$ und $16y - 4xy = 0$

$4x = 2y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2 \quad 16y - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot y = 0 \Leftrightarrow 16y - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 8 - y^2 = 0 \Leftrightarrow 8 = y^2$

Lösungen für y: $y_1 = 0$, $\quad y_2 = \sqrt{8}$, $\quad y_3 = -\sqrt{8}$ $\quad$ nun y Werte in Ableitung einsetzen

Daraus folgt x: $x_1 = 0$, $\quad x_2 = 4$, $\quad x_3 = 4$

Ableitung 2. Ordnung

$f_{xx} = 4 \quad f_{yy} = 16 - 4x \quad f_{xy} = f_{yx} = -4y \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -4y \\ -4y & 16-4x \end{pmatrix}$

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \cdot 0 \\ -4 \cdot 0 & 16 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\Delta(0,0) = 64 - 0 \cdot 0 = 64$ und $f_{xx} = 4$ $\quad \Rightarrow P_1 =$ **lokales Minimum**

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \cdot \sqrt{8} \\ -4 \cdot \sqrt{8} & 16 - 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4\sqrt{8} \\ -4\sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta(4,\sqrt{8}) = 4 \cdot 0 - \left(-4\sqrt{8}\right)^2 = -128$ $\quad \Rightarrow P_2 =$ **Sattelpunkt**

$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \cdot -\sqrt{8} \\ -4 \cdot -\sqrt{8} & 16 - 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{8} \\ 4\sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta(4,-\sqrt{8}) = 4 \cdot 0 - \left(4\sqrt{8}\right)^2 = -128$ $\quad \Rightarrow P_3 =$ **Sattelpunkt**

Welche Bedingung muss die Konstante $B \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion $f(x, y) = x^2 + Bxy + 3y^2$ einen Sattelpunkt besitzt?

Ableitung 1. Ordnung **Ableitung 2. Ordnung**

$f_x = 2x + By$ $f_y = Bx + 6y$ $f_{xx} = 2$ $f_{yy} = 6$ $f_{xy} = B$

Die beiden ersten Ableitungen müssen gegen Null gesetzt und gelöst werden:

$2x + By = 0$ und $Bx + 6y = 0$

$2x + By = Bx + 6y \Leftrightarrow 2x - 6y = Bx - By \Leftrightarrow 2x - 6y = B(x - y) \Leftrightarrow \frac{2x-6y}{x-y} = B$

Lösungen für y: $y_1 = 0$, x: $x_1 = 0$ → Ursprung einziger kritischer Punkt

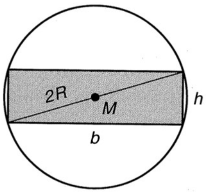
$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & B \\ B & 6 \end{pmatrix}$

➔ Ist $\Delta(x_0, y_0) < \mathbf{0}$, dann besitzt $f(x, y)$ in (x_0, y_0) einen **Sattelpunkt**.

$\Delta(x_0, y_0) = 2 \cdot 6 - B^2 < 0 \Leftrightarrow 12 - B^2 < 0 \Leftrightarrow 12 < B^2 \Leftrightarrow \sqrt{12} < |B|$

Der Betrag von B muss grösser sein als die Wurzel von 12.

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen



Einführendes Beispiel: Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so herausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ maximal wird.

Wir bestimmen zunächst b_{max}, h_{max} und W_{max}, indem wir aus der Zielfunktion eine Variable eliminieren und anschliessend ein Extremwertproblem für eine Funktion einer einzigen Variablen lösen.

Zielfunktion: $W = \frac{1}{6}bh^2$

Nebenbedingung: $b^2 + h^2 = 4R^2$ → $h^2 = 4R^2 - b^2$

Einsetzen in die Zielfunktion: $W = \frac{1}{6}\mathrm{b}(4R^2 - b^2) = \frac{2}{3}R^2 b - \frac{1}{6}b^3, 0 \leq b \leq 2R$

$W'(b) = \frac{2}{3}R^2 - \frac{3}{6}b^2 = \frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{2}b^2$ Umstellen nach b $b^2 = \frac{4}{3}R^2 \Leftrightarrow b = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{R}$ $b_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{R}$

Nur $+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{R}$ kommt in Frage, da es keine negativen Längen gibt! $h_{max} = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}R$

$W_{max} = W(b_{max}, h_{max}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{R} \cdot \frac{8}{3}R^2 = \frac{8}{9\sqrt{3}}\mathrm{R}^3$

Lagrange-Multiplikator

Die möglichen Lösungen des Extremwertproblems von $F(x, y)$ unter der Nebenbedingung $G(x, y) = 0$ liegen in den Punkten mit $\nabla L(x, y, \lambda) = \vec{0}$, wobei $L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y)$

- Wir müssen das Gleichungssystem $\frac{\partial L}{\partial x} = 0,$ $\frac{\partial L}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ nach x, y, λ auflösen.
- Der Parameter λ heisst Lagrange-Multiplikator, ist aber nur eine Hilfsgrösse.
- Die Klassifikation der durch Lösen dieses Gleichungssystem gefundenen Punkte erfolgt am besten durch Vergleich der Funktionswerte von $F(x, y)$ an den gefundenen Punkten.

Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen

$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$ $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$

$\nabla L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(x + y + z - 1)$

$L_x = 2x + 2x\lambda + \mu,$ $L_y = 2y + 2y\lambda + \mu,$ $L_z = 2z + \mu,$ $L_\lambda = x^2 + y^2 - 1,$ $L_\mu = x + y + z - 1$

$L_x = 2x + 2x\lambda + \mu = 0$ $\Rightarrow 2x + 2x\lambda - 2z = 0 \Leftrightarrow 2x(1 + \lambda) - 2z = 0$ $\Rightarrow x(1 + \lambda) = y(1 + \lambda)$

$L_y = 2y + 2y\lambda + \mu = 0$ $\Rightarrow 2y + 2y\lambda - 2z = 0 \Leftrightarrow 2y(1 + \lambda) - 2z = 0$ $(x - y)(1 + \lambda) = 0$

$L_z = 2z + \mu = 0$ $\Rightarrow \mu = -2z$

$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$L_\mu = x + y + z - 1 = 0$

Gleichungssystem (auch hier ist es kein lineares Gleichungssystem) darf hier mit einem Rechner gelöst werden. Aus dem Gleichungssystem ergeben sich folgende kritische Punkte als Möglichkeiten:

$P_1 = (0,1,0)$ $P_2 = (1,0,0)$ $P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right)$, $P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2}\right)$

$f(P_1) = f(0,1,0) = 1$

$f(P_2) = f(1,0,0) = 1$

$f(P_3) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^2 \approx 2.172$

$f(P_4) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 \approx 7.828$

Minimum bei P_1, P_2 mit minimalen Wert $f(P_1) = f(P_2) = 1$

Maximum bei P_4 mit maximalen Wert $f(P_4) \approx 7.828$

Bestimmen für beliebige $p > 0$ den min. Abstand zwischen der Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ und dem Punkt $M = (4p, p)$

Minimieren des quadrierten Abstandes (quadrierter Abstand rechnet sich einfacher) zwischen beliebigen Punkt $P = (x, y)$ und dem Punkt M: $f(x,y) = d^2(M,P) = (x-4p)^2 + (y-p)^2$ unter der Nebenbedingung $y = \frac{x^2}{2p}$. Zielfunktion ist der quadrierter Abstand zwischen Punkt P und M. Dass P auf der Parabel liegt, wird dann also als Nebenbedingung zusätzlich angenommen.

Entweder mit lagrangeschen Prinzipalfunktion lösen oder aber Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzten:

$g(x) = f\left(x, \frac{x^2}{2p}\right) \Rightarrow g(x) = (x-4p)^2 + \left(\frac{x^2}{2p} - p\right)^2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 8xp + 16p^2 + \frac{x^4}{4p^2} - \frac{2x^2p}{2p} + p^2$

$g(x) = x^2 - 8xp + 16p^2 + \frac{x^4}{4p^2} - x^2 + p^2 = \frac{x^4}{4p^2} - 8xp + 17p^2$

Wir lösen nun die Gleichung $g'(x) = 0$ $g'(x) = \frac{4x^3}{4p^2} - 8p = \frac{x^3}{p^2} - 8p$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{p^2} - 8p = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{p^2} = 8p \Leftrightarrow x^3 = 8p^3 \Leftrightarrow x = 2p$

Der gesuchte minimale Abstand ist somit $\sqrt{g(x)} = \sqrt{\frac{x^4}{4p^2} - 8xp + 17p^2}$

$\sqrt{g(2p)} = \sqrt{\frac{(2p)^4}{4p^2} - 8 \cdot (2p) \cdot p + 17p^2} = \sqrt{\frac{16p^4}{4p^2} - 16p^2 + 17p^2} = \sqrt{4\mathrm{p}^2 + 1p^2} = \sqrt{5\mathrm{p}^2} = \sqrt{5}p$

Bestimmen des Punktes P auf der Ebene $E: x + 2y + z - 4 = 0$ der den kürzesten Abstand vom Punkt $Q = (1,0,-2)$ hat.

Die Zielfunktion ist somit: $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z - -2)^2$ (quadratisch ist wiederum einfacher)

Die Ebenengleichung ist die Nebenbedingung: $x + 2y + z - 4 = 0$

$L(x,y,z,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 + \lambda(x + 2y + z - 4)$

Die Ableitung von $L(x,y,z,\lambda)$ liefern das Gleichungssystem:

$L_x = 0$	$2(x-1)^1 \cdot 1 + \lambda = 0$	$\Leftrightarrow 2x - 2 + \lambda = 0$
$L_y = 0$	$2y + 2\lambda = 0$	$\Leftrightarrow 2y + 2\lambda = 0$
$L_z = 0$	$2(z+2)^1 \cdot 1 + \lambda = 0$	$\Leftrightarrow 2z + 4 + \lambda = 0$
$L_\lambda = 0$	$x + 2y + z - 4 = 0$	$\Leftrightarrow x + 2y + z - 4 = 0$

Wir erhalten damit folgende Lösung: $(x,y,z) = (\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6})$

Das «Problem» kann auch mit den bekannten Mittel der linearen Algebra gelöst werden.

In einer Autofabrik besteht eine Fertigungsserie je nach den auftragszahlen aus x Sportwagen, y Mittelklassewagen und z Luxusklassewagen. Insgesamt sollen in einer Serie 45 Wagen gefertigt werden. Der dabei erzielte Gewinn wird durch die Funktion: $T(x,y,z) = 20x + 80y + 10z - 2x^2 - y^2 - z^2$ berechnet.

Für welche Werte von x, y, z wird der Gewinn maximal?

Zielfunktion: $T(x,y,z) = 20x + 80y + 10z - 2x^2 - y^2 - z^2$ Nebenbedingung: $x + y + z = 45$

$L(x,y,z,\lambda) = 20x + 80y + 10z - 2x^2 - y^2 - z^2 + \lambda(x + y + z - 45)$

Die Ableitung von $L(x,y,z,\lambda)$ liefern das Gleichungssystem:

$L_x = 0$	$20 - 4x + \lambda = 0$
$L_y = 0$	$80 - 2y + \lambda = 0$
$L_z = 0$	$10 - 2z + \lambda = 0$
$L_\lambda = 0$	$x + y + z = 45$

Wir erhalten damit folgende Lösung: $(x,y,z,\lambda) = (4,\ 38,\ 3, -4)$

Der Gewinn wird also maximal für die Werte $x = 4,\ \ y = 38,\ \ z = 3$ $T_{max}(4{,}38{,}3) = 1665$

Bestimmen der Länge x, Breite y und Tiefe z eines Schwimmbeckens mit dem Volumen V, das die kleinstmögliche Oberfläche unter allen Schwimmbecken mit Volumen V hat. Hinweis: Unter der Oberfläche verstehen wir den Boden sowie die 4 Seitenwände des Schwimmbeckens.
Wir lösen das Problem mit der Lagrange-Prinzipalfunktion. Seien x, y und z die Länge, Breite und Höhe des Schwimmbeckens.
Die Zielfunktion ist die Oberfläche $F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$
die wir minimieren unter der Nebenbedingung $xyz = V$
$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$
Die Ableitung von $L(x, y, z, \lambda)$ liefern das Gleichungssystem:
$L_x = 0 \qquad y + 2z + \lambda yz = 0$
$L_y = 0 \qquad x + 2z + \lambda xz = 0$
$L_z = 0 \qquad 2x + 2y + \lambda xy = 0$
$L_\lambda = 0 \qquad xyz - V = 0$ Wir erhalten damit folgende Lösung: $x = y = \sqrt[3]{2V}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$

Mehrfache Integrale

Das Resultat des Integrals ist im einfachsten Fall das Volumen unter dem Funktionsgraphen der Funktion.

Doppelintegrale – Als die Welt für viele noch in Ordnung war und dann:

Unter dem Doppelintegral oder Gebietsintegral der Funktion $f(x, y)$ über dem Gebiet $A \subseteq \mathbb{R}^2$ versteht man den Grenzwert $\iint_G f(x, y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$
Abstufung je nach Komplexität des Integrationsgebiets G:

- G ist ein achsenparalleles Rechteck
- G ist ein Gebiet zwischen zwei Funktionskurven
- G ist ein Gebiet eines anderen Typen

Diese Reihenfolge von x-/y-Integrationen kann bei **stetigen Funktion** umgekehrt werden **«Satz von Fubini»**.
$G = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$
Gesamtvolumen: $\iint_G f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$

Durchführung der Berechnung bei achsenparallelem Gebiet

Berechnen des Integrals $\iint_G (x+2y+3)dA$ für das Gebiet $G = \{(x,y)|1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$

Zuerst nach y und dann nach x: $\int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=0}^{3}(x+2y+3)dy\right)dx$

1. Schritt: $\int_{y=0}^{3}(x+2y+3)dy = xy + \frac{2}{2}y^2 + 3y|_0^3 = 3x + 3^2 + 3\cdot 3 = 3x + 18$

2. Schritt: $\int_{x=1}^{2}(3x+18)dx = \frac{3}{2}x^2 + 18x|_1^2 = \frac{3}{2}2^2 + 18\cdot 2 - \left(\frac{3}{2}1^2 + 18\cdot 1\right) = \frac{45}{2}$

Oder in umgekehrter Reihenfolge (zuerst nach x, dann nach y): $\int_{y=0}^{3}\left(\int_{x=1}^{2}(x+2y+3)dx\right)dy$

1. Schritt: $\int_{x=1}^{2}(x+2y+3)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 3x|_1^2 = \frac{1}{2}2^2 + 2\cdot 2\cdot y + 6 - \left(\frac{1}{2} + 2y + 3\right) = 2y + \frac{9}{2}$

2. Schritt: $\int_{y=0}^{3}(2y+\frac{9}{2})dy = \frac{2}{2}y^2 + \frac{9}{2}y|_0^3 = 3^2 + \frac{9}{2}\cdot 3 = \frac{45}{2}$ gibt auf beiden Wegen das gleiche Resultat.

Berechnen folgender Doppelintegrale: $\iint_G (e^{x-y})dA$, für das Gebiet $G = \{(x,y)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

$\iint_G (e^{x-y})dA = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}(e^x \cdot e^{-y})dy\right)dx$

$\int_{y=0}^{1}(e^x \cdot e^{-y})dy = e^x \cdot -e^{-y}|_0^1 = e^x \cdot -e^{-1} - (e^x \cdot -e^{-0}) = e^x \cdot -e^{-1} - -e^x = -e^{-1}\cdot e^x + e^x$

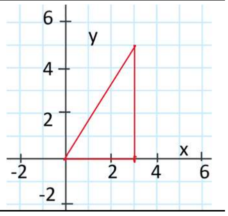
$\int_{x=0}^{2}(-e^{-1}\cdot e^x + e^x)dx = -e^{-1}\cdot e^x + e^x|_0^2 = -e^{-1}\cdot e^2 + e^2 - (-e^{-1}\cdot e^0 + e^0) = -e^{-1}\cdot e^2 + e^2 - (-e^{-1}\cdot 1 + 1) = 4.4708 - 0.6321 = 4.0386$

Berechnen des Doppelintegrals $\iint_G f(x,y)dA$ einer Funktion $f(x,y)$ über das Dreieck G mit Ecken $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (0,5)$. Bestimmen der Integrationsgrenzen in beiden Integrationsreihenfolgen: Punkte bspw. in einem Koordinatensystem eintragen und die Funktion der Graphen bestimmen:

Innere Integration nach y, äussere Integration nach x: $\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{5-\frac{5}{2}x} f(x,y)dy\right)dx$

Innere Integration nach x, äussere Integration nach y: $\int_{y=0}^{5}\left(\int_{x=0}^{2-\frac{2}{5}y} f(x,y)dx\right)dy$

Berechnen der Integrationsgrenzen des Doppelintegrals $\iint_G f(x,y)\,dA$ einer Funktion $f(x,y)$ über das Dreieck G mit Ecken $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (3,0)$, $P_3 = (3,5)$.



Innere Integration nach y, äussere Integration nach x: $\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\frac{5}{3}x} f(x,y)dy\,dx$

Innere Integration nach x, äussere Integration nach y: $\int_{y=0}^{5}\int_{x=\frac{3}{5}y}^{3} f(x,y)dx\,dy$

Berechnen des Doppelintegrals $\iint_G x^2\,dA$ einer Funktion $f(x,y)$ über das Dreieck G mit Ecken $P_1 = (0,-2)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$.

Das gegebene Dreieck liegt zwischen den Geraden $y = -2 + 2x$ (unten) und $y = 1 - x$ (oben), und zwar zwischen den x -Werten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Also ist das gesuchte Integral

$\iint_G x^2\,dA = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=-2+2x}^{1-x} x^2 dy\right)dx$

$\int_{y=-2+2x}^{1-x} x^2 dy = yx^2|_{-2+2x}^{1-x} = (1-x)x^2 - (-2+2x)x^2 = (x^2 - x^3) - (-2x^2 + 2x^3) = 3x^2 - 3x^3$

$\int_{x=0}^{1}(3x^2 - 3x^3)dx = x^3 - \frac{3}{4}x^4|_0^1 = (1 - \frac{3}{4}) - 0 = \frac{1}{4}$

Berechnung bei Gebiet zwischen Funktionskurven

- Wenn die umgekehrte Integrationsreihenfolge gewünscht wird, müssen die Grenzen geändert werden.
- Äusseren Grenzen sind immer konstant, die inneren Grenzen dürfen von äusseren Variable abhängen.

Gebiet zwischen zwei Funktionskurven $y = g(x)$ und $y = h(x)$: $G = \{(x,y)|a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$

$\iint_G f(x,y)dA = \int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx$

Berechnen des Integrals: $\iint_G \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dA$ $G = \{(x,y)|1 \le x \le y^2, 1 \le y \le 2\}$

$\iint_G \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dA = \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=1}^{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dx\right)dy = \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=1}^{y^2}\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)dx\right)dy$

$\int_{x=1}^{y^2}\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)dx = 2x^{\frac{1}{2}} + xy^{-\frac{1}{2}}|_1^{y^2} = 2y + y^{\frac{3}{2}} - \left(2 + y^{-\frac{1}{2}}\right) = 2y + y^{\frac{3}{2}} - 2 - y^{-\frac{1}{2}}$

$\int_{y=1}^{2}\left(2y + y^{\frac{3}{2}} - 2 - y^{-\frac{1}{2}}\right)dy = y^2 + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - 2y - 2y^{\frac{1}{2}}|_1^2 = 2.03$

Berechnen des Integrals: $\iint_G (x^2y^3)dA \;\; G=\{(x,y)|0\le x\le 1, \sqrt{x}\;\le y\le 1\}$

$\iint_G (x^2y^3)dA = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1}(x^2y^3)dy\right)dx$

$\int_{y=\sqrt{x}}^{1}(x^2y^3)dy = \frac{1}{4}x^2y^4|_{\sqrt{x}}^{1} = \frac{1}{4}x^2\cdot 1^4 - \left(\frac{1}{4}x^2(\sqrt{x})^4\right) = \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^2\cdot x^2\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4$

$\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{20}x^5|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} - (0) = \frac{1}{30}$

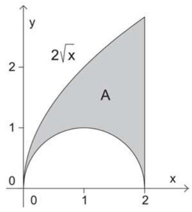
Oder in umgekehrter Reihenfolge (zuerst nach x, dann nach y):

Wichtig = die Grenzen müssen mit transformiert werden und die untere Grenze wird zur oberen und umgekehrt: $y=\sqrt{x} \quad y^2 = x$

$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{y^2}(x^2y^3)dx\right)dy$ $\qquad \int_{x=0}^{y^2}(x^2y^3)dx = \frac{1}{3}x^3y^3|_0^{y^2} = \frac{1}{3}(y^2)^3y^3 - 0 = \frac{1}{3}y^9$

$\int_{y=0}^{1}\left(\frac{1}{3}y^9\right)dy = \frac{1}{30}y^{10}|_0^1 = \frac{1}{30}1^{10} - 0 = \frac{1}{30}$ $\qquad$ Beide Resultate sind wiederum die gleichen!

Berechnen für die Funktion $z = x^2y$ das Doppelintegral über dem Bereich A in der nebenstehenden Skizze, der durch Kreis- und Parabelbogen und durch eine Gerade begrenzt wird.



Der x-Integrationsbereich ist $0 \le x \le 2$.

Der y-Integrationsbereich ist $g(x) \le y \le h(x)$, wobei $h(x)$ der Parabelbogen $y = 2\sqrt{x}$ ist und $g(x)$ die obere Hälfte des Kreisbogens $(x-1)^2 + y^2 = 1$, nach y aufgelöst $y = \sqrt{2x - x^2}$. Das gesuchte Integral ist also

$\iint_G (x^2y)dA = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}}(x^2y)dy\right)dx$

$\int_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}}(x^2y)dy = \frac{1}{2}x^2y^2|_{\sqrt{2x-x^2}}^{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\cdot(2\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\cdot(2x-x^2)\right) = 2x^3 - \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)$

$= x^3 + \frac{1}{2}x^4$

$\int_{x=0}^{2}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 5}x^5|_0^2 = \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{10}2^5 - 0 = \frac{16}{4} + \frac{32}{10} = \frac{36}{5} = 7.2$

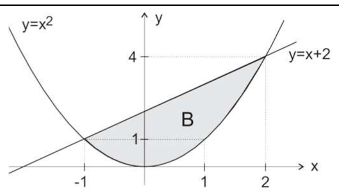
Berechnen des Integrals: $\iint_G (3x^2y)dA$ wobei G das Trapez mit den Eckpunkten $P_1 = (1{,}0), P_2 = (5{,}0), P_3 = (5{,}5), P_4 = (1{,}1)$. (Skizze hilft!)

Das gegebene Trapez liegt zwischen den Geraden $y = 0$ (unten) und $y = x$ (oben), und zwar zwischen den x-Werten $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. Also ist das gesuchte Integral $\iint_G (3x^2y)dA \int_{x=1}^{5}\left(\int_{y=0}^{x}(3x^2y)dy\right)dx$

$\int_{y=0}^{x}(3x^2y)dy = \frac{3}{2}x^2y^2|_0^x = \frac{3}{2}x^2\cdot x^2 - 0 = \frac{3}{2}x^4$

$\int_{x=1}^{5}\left(\frac{3}{2}x^4\right)dx = \frac{3}{2\cdot 5}x^5|_1^5 = \frac{3}{10}5^5 - \frac{3}{10}1^5 = 937.2$

Berechnen des Doppelintegrals der Funktion $f(x,y) = xy$ über den skizzierten Bereich B:



$\iint_G (xy)dA \int_{x=-1}^{2}\left(\int_{y=x^2}^{x+2}(xy)dy\right)dx$

$\int_{y=x^2}^{x+2}(xy)dy = \frac{1}{2}xy^2|_{x^2}^{x+2} = \frac{1}{2}x(x+2)^2 - \frac{1}{2}x{x^2}^2 = \frac{1}{2}x(x^2+4x+4) - \frac{1}{2}x^5$

$= \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^5$

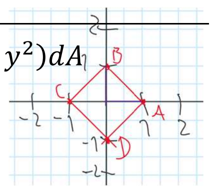
$\int_{x=-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^5\right)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2\cdot 6}x^6|_{-1}^{2} = \frac{45}{8}$

Berechnen des Doppelintegrals $I = \int_{x=0}^{3}\left(\int_{y=0}^{x} x^2y\,dy\right)dx$

$\int_{y=0}^{x} x^2y\,dy = \frac{1}{2}x^2y^2|_0^x = \frac{1}{2}x^4 - 0$ $\qquad \int_{x=0}^{3}\left(\frac{1}{2}x^4\right)dx = \frac{1}{10}x^5|_0^3 = \frac{243}{10}$

Änderung der Integrationsreihenfolge: Integrationsbereich ist ein Dreieck mit Eckpunkten $A = (0{,}0)$, $B = (3{,}0)$ und $C = (3{,}3)$. In der umgekehrten Reihenfolge lautet das Integral:

$I = \int_{y=0}^{3}\left(\int_{x=y}^{3} x^2y\,dx\right)dy$

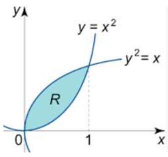


Quadrat K mit Eckpunkten $A = (1{,}0)$, $B = (0{,}1)$, $C = (-1{,}0)$ und $D = (0,-1)$. $\iint_K (x^2+y^2)dA$

Da Symmetrie von Integrationsgebiet und Integrand, Integration über Dreieck (U-A-B)

$\iint_G (x^2+y^2)dA = 4\cdot\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right)dx$ $\qquad \int_{y=0}^{1-x} x^2+y^2\,dy =$

$x^2y + \frac{1}{3}y^3|_0^{1-x} = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}$ $\qquad 4\cdot\int_{x=0}^{1}\left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right)dx = 4\cdot\frac{1}{6}$



Berechnen des Doppelintegrals $\iint_R f(x,y)dA$ einer Funktion f(x, y) über das abgebildete Gebiet R. Bestimmen der Integrationsgrenzen in beiden möglichen Integrationsreihenfolgen:

$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx \qquad \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$

Dreifachintegral

Unter dem Dreifachintegral oder Volumenintegral der Funktion $f(x,y,z)$ über dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ versteht man den Grenzwert $\iiint_G f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta V_k$. $\iiint_G f(x,y,z)dV$ ist das 4-dimensionale Volumen «unter» dem Graphen von $f(x,y,z)$ «über» dem 3-dimensionalen Gebiet G. Es gelten dieselben Regeln wie beim Doppelintegral. $\iiint_G f(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$

Bei einem Dreifachintegral $\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dz\,dy\,dx$ gilt folgendes:

- Die x-Grenzen a und b dürfen von keiner der 3 Variablen abhängen.
- Die y-Grenzen c und d dürfen von x abhängen.
- Die z-Grenzen e und f dürfen von x und y abhängen.

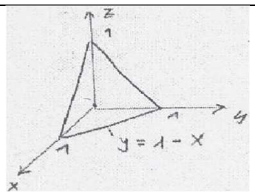
Berechnen des Integrals $\iiint_G (x-y)\cdot z\ \,dz\,dy\,dx$ für $G = \{(x,y,z)|1 \le x \le 2, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x+y\}$

$\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x+y}(xz-yz)\,dz\,dy\,dx$

$\int_{z=0}^{x+y}(xz-yz)\,dz = \frac{1}{2}xz^2 - \frac{1}{2}yz^2|_0^{x+y} = \frac{1}{2}x(x+y)^2 - \frac{1}{2}y(x+y)^2 = \frac{1}{2}x(x^2+2xy+y^2)$
$-\frac{1}{2}y(x^2+2xy+y^2) = \frac{1}{2}x^3 + x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}yx^2 - xy^2 - \frac{1}{2}y^3 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^3$

$\int_{y=0}^{x}(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^3)\,dy = \frac{1}{2}x^3y + \frac{1}{4}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{8}y^4|_0^x = \frac{1}{2}x^3x + \frac{1}{4}x^2x^2 - \frac{1}{6}xx^3 -$
$\frac{1}{8}x^4 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = \frac{11}{24}x^4$

$\int_{x=1}^{2}(\frac{11}{24}x^4)\,dx = \frac{11}{24\cdot 5}x^5|_1^2 = \frac{11}{120}x^5|_1^2 = \frac{11}{120}2^5 - \frac{11}{120}1^5 = \frac{341}{120} = 2.84167$



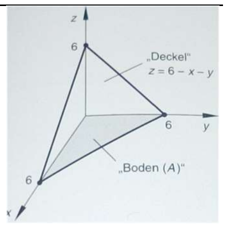
Berechnen des Volumens des folgenden Tetraeders:
Nehmen x, y und z als äussere, mittlere und innere Integrationsvariable.
Der x-Integrationsbereich ist damit $0 \le x \le 1$;
Der y-Integrationsbereich ist $0 \le y \le 1 - x$; die obere y-Grenze ist also die Gerade, die die beiden in der xy-Ebene liegenden Ecken miteinander verbindet.
Die z-Integration verläuft von der xy-Ebene (d.h. z = 0) bis zur Ebene, die die drei Ecken A, B, und C miteinander verbindet. Diese Ebene hat die Gleichung $x + y + z = 1$, also nach z aufgelöst $z = 1 - x - y$.

$V = \iiint_G 1\,dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$

$\int_{z=0}^{1-x-y} 1\,dz = z\,|_0^{1-x-y} = 1-x-y-0 = 1-x-y$

$\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)\,dy = y - xy - \frac{1}{2}y^2|_0^{1-x} = (1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 =$
$= 1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

$\int_{x=0}^{1}(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



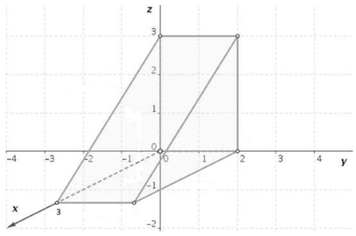
Die Ebene $x + y + z = 6$ bildet mit den drei Koordinatenebenen eine gleichseitige Pyramide. Bestimmen des Volumens dieser Pyramide als Dreifachintegral:
Der gegebene Integrationsbereich lässt sich durch
$0 \le x \le 6, \qquad 0 \le y \le 6 - x, \qquad 0 \le z \le 6 - x - y$ beschreiben.

$\iiint_H 1dV = \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{6-x}\int_{z=0}^{6-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$

$\int_{z=0}^{6-x-y} 1\,dz = z|_0^{6-x-y} = 6-x-y$

$\int_{y=0}^{6-x}(6-x-y)\,dy = 6y - xy - \frac{1}{2}y^2|_0^{6-x} = 6(6-x) - x(6-x) - \frac{1}{2}(6-x)^2 = 36 - 6x - 6x + x^2 -$
$\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) = 36 - 12x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 6x - 18 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 18$

$\int_{x=0}^{6}\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18\right)\,dx = \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 18x|_0^6 = \frac{1}{6}6^3 - 3\cdot 6^2 + 18\cdot 6 - 0 = 36$



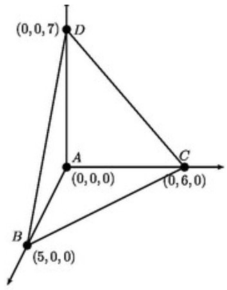
Berechnen des Integrals $V = \iiint_H \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dV$, wenn H der Bereich ist, der durch die Punkte (0, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 2, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) und (0, 2, 3) begrenzt wird (siehe Skizze).
Der gegebene Integrationsbereich lässt sich durch
$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3-x$ beschreiben.

$$\iiint_H \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dV = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dz\, dy\, dx$$

$$\int_{z=0}^{3-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dz = -\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\Big|_0^{3-x} = -\frac{1}{2}(x+y+(3-x)+1)^{-2} - -\frac{1}{2}(x+y+1)^{-2} =$$
$$= -\frac{1}{2(y+4)^2} + \frac{1}{2(x+y+1)^2}$$

$$\int_{y=0}^{2}\left(-\frac{1}{2(y+4)^2} + \frac{1}{2(x+y+1)^2}\right) dy = -\frac{(y+4)^{-1}}{2\cdot(-1)} + \frac{(x+y+1)^{-1}}{2\cdot(-1)}\Big|_0^2 = \frac{(2+4)^{-1}}{2} - \frac{(x+2+1)^{-1}}{2} - \left(\frac{(0+4)^{-1}}{2} - \frac{(x+0+1)^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2x+6} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2x+2}\right) = -\frac{1}{2x+6} + \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{24}$$

$$\int_{x=0}^{3}\left(-\frac{1}{2x+6} + \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{24}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{3}\left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{12}\right) dx = \left(-\ln(|x+3|) + \ln(|x+1|) - \frac{1}{12}x\right)\Big|_0^3$$
$$\frac{1}{2}\left(-\ln(3+3) + \ln(3+1) - \frac{3}{12}\right) - \frac{1}{2}(-\ln(3) + \ln(1)) = -0.3277 - -0.5493 = 0.22157$$



Beschreibung des abgebildeten räumlichen Bereichs durch Ungleichungen in x, y und z.
Die Variable $\boldsymbol{z}$ soll konstante Grenzen haben, und die Grenzen von $\boldsymbol{x}$ sollen nur von $\boldsymbol{z}$ abhängen: → Tipp: gesuchte Achse als y Achse darstellen/hindrehen

$0 \leq \boldsymbol{z} \leq 7 \qquad 0 \leq \boldsymbol{x} \leq 5 - \frac{5}{7}z \qquad 0 \leq \boldsymbol{y} \leq 6 - \frac{6}{5}x - \frac{6}{7}z$

Die Variable $\boldsymbol{z}$ soll konstante Grenzen haben, und die Grenzen von $\boldsymbol{y}$ sollen nur von $\boldsymbol{z}$ abhängen:

$0 \leq \boldsymbol{z} \leq 7 \qquad 0 \leq \boldsymbol{y} \leq 6 - \frac{6}{7}z \qquad 0 \leq \boldsymbol{x} \leq 5 - \frac{5}{6}y - \frac{5}{7}z$

Variablentransformationen

Anwendung auf Doppelintegrale

Bisher haben wir Mehrfachintegrale nur in kartesischen Koordinaten (d.h. x, y, z) berechnet. Bei vielen Gebieten sind kartesische Koordinaten aber nicht geeignet zur Beschreibung (Kreise, Kugeln, Zylinder, Banane, Doppel- und Dreifachbanane, etc.). Vorgehen sieht wie folgt aus:

- $f(x,y) \rightsquigarrow f(\phi(u,v), \psi(u,v))$: Integrand in neuen Variablen ausdrücken, d.h. $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ in den Integranden einsetzen.
- $\int_G \rightsquigarrow \int_{\tilde{G}}$: Integrationsgebiet in neuen Variablen ausdrücken, d.h. ermitteln, welches die Grenzen des gegebenen Gebiets in den neuen Variablen sind. Die Beschreibung des Gebiets in den neuen Variablen (u,v) sollte einfacher sein als in den alten Variablen (x,y), sonst hat die Transformation keinen Sinn!
- Infinitesimales Flächenelement in neuen Variablen ausdrücken:
$$dx\, dy = \left|det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| du\, dv = |x_u y_v - y_u x_v| du\, dv$$

$\iint_G f(x,y)dx\,dy = \iint_{\tilde{G}} f(\phi(u,v), \psi(u,v))|\det(J)|\, du\, dv$, wobei $J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix

Kreis

$B =$ Kreisfläche mit $M = (c,d)$ und Radius. Transformationsformel:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r\cdot\cos(\phi) + c} \\ \boldsymbol{r\cdot\sin(\phi) + d} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0 \leq r \leq R}, \quad \boldsymbol{0 \leq \phi \leq 2\pi}$$

$$\boldsymbol{dx\,dy = r\cdot dr\,d\phi}$$

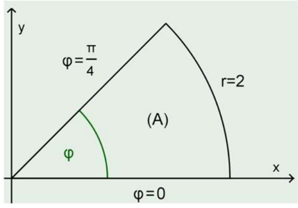
Jacobi-Matrix $J = \begin{pmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\cdot\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cdot\cos(\phi) \end{pmatrix}$

Betrag der Determinante: $|\det(J)| = \cos(\phi)\cdot r\cdot\cos(\phi) - (-r\cdot\sin(\phi)\cdot\sin(\phi))$

$\boldsymbol{|\det(J)|} = r(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = \boldsymbol{r} \qquad (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = 1$

Bestimmen der Integrationsgrenzen, wenn man die **untere Halbebene** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \boldsymbol{y} \leq 0\}$ in Polarkoordinaten beschreiben möchte: $0 \leq r \leq \infty \qquad \pi \leq \phi \leq 2\pi$

Bestimmen der Integrationsgrenzen, wenn man die **rechte Halbebene** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \boldsymbol{x} \geq 0\}$ in Polarkoordinaten beschreiben möchte: $0 \leq r \leq \infty \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$



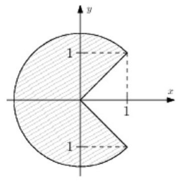
Berechnung des Integrals $\iint_G \ xy \ dA$ für den skizzierten Bereich A.
Integrand in Polarkoordinaten: $xy = r \cdot \cos(\phi) \cdot r \cdot \sin(\phi) = r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)$
Gebiet in Polarkoordinaten: $0 \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

$|\det(J)| = r \qquad xy \qquad |\det(J)|$

$\iint_G \ xy \ dA = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{r=0}^{2} (r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) \cdot r \ dr \right) d\phi$

$\int_{r=0}^{2} (r^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) \ dr = \frac{1}{4} r^4 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \ |_0^2 = 4 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)$

$\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} (4 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) \ d\phi = 1$



Berechnung des Integrals $\iint_A \ (x+y) \ dA$ für den skizzierten Bereich A.

$\iint_A \ (x+y) \ dA = \int_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{2}} (r \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi)) \cdot r \ dr \right) d\phi$

$\int_{r=0}^{\sqrt{2}} (r^2(\sin(\phi) + \cos(\phi))) \ dr = \frac{1}{3} r^3 (\sin(\phi) + \cos(\phi))|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{3} (\sin(\phi) + \cos(\phi))$

$\int_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} \frac{\sqrt{8}}{3} (\sin(\phi) + \cos(\phi)) \ d\phi = \frac{\sqrt{8}}{3} (-\cos(\phi) + \sin(\phi))|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} = -\frac{4}{3}$

Berechnung $\boldsymbol{\iint_G \ (x,y) \ dA}$ wobei das Gebiet $\boldsymbol{G}$ Kreisfläche ist: $\boldsymbol{G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}}$

$\boldsymbol{\iint_G \ f(x,y) \ dA = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} (\hat{f}(r,\phi)) \cdot r \ dr \ d\phi}$

Berechnen des Integrals $\iint_G \ \frac{1}{1+x^2+y^2} \ dA$, wobei der Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ mit Zentrum im Ursprung, d.h. das Integrationsgebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$:

$x^2 + y^2 = (r \cdot \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\phi))^2 = r^2 \cdot \cos^2(\phi) + r^2 \cdot \sin^2(\phi) = r^2(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = r^2$

$\iint_G \ \frac{1}{1+x^2+y^2} \ dA = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\frac{1}{1+r^2} \cdot r \right) \ dr \right) d\phi$

$\int_{r=0}^{R} \left(\frac{r}{1+r^2} \right) \ dr = \frac{1}{2} \ln(1+R^2)$

$\int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln(1+R^2) \right) d\phi = \pi \cdot \ln(1+R^2)$

Berechnen des Integrals $\iint_G \ (3x+4y) \ dA \qquad G = \{(x,y) | y \geq 0 \ und \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$:

$y \geq 0$ → ist die obere Halbebene, da y zwingend positiv oder Null sein muss, daher $0 \leq \phi \leq \pi$

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ → Grenze zwischen 1 und $\sqrt{4}$, daher $1 \leq r \leq 2$

Ursprungsfunktion transformieren: $(3x + 4y) = 3r \cdot \cos(\phi) + 4r \cdot \sin(\phi)$

$\iint_G \ (3r \cdot \cos(\phi) + 4r \cdot \sin(\phi)) \cdot r \ dr \ d\phi = \int_{\phi=0}^{\pi} \left(\int_{r=1}^{2} ((3r \cdot \cos(\phi) + 4r \cdot \sin(\phi)) \cdot r) \ dr \right) d\phi = \frac{56}{3}$

Berechnen des Integrals $\iint_G \ (xy) \ dA$ wobei das Gebiet ein Viertelkreis des Radius 1 ist, d.h. die Menge $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$:

Ursprungsfunktion transformieren: $xy = r \cdot \cos(\phi) \cdot r \cdot \sin(\phi) = r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)$

$\iint_G \ (xy) \ dA = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{1} ((r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)) \cdot r) \ dr \right) d\phi = \frac{1}{8}$

Ellipse

$B =$ Ellipse mit $M = (c,d)$ und Scheiteln bei $(\pm a \cdot R, 0)$, $(0, \ \pm b \cdot R)$. Transformationsformel:

$\binom{x}{y} = \binom{a \cdot r \cdot \cos(\phi) + c}{b \cdot r \cdot \sin(\phi) + d}, \ \begin{matrix} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{matrix}$

$dx \ dy = a \cdot b \cdot r \cdot dr \ d\phi$

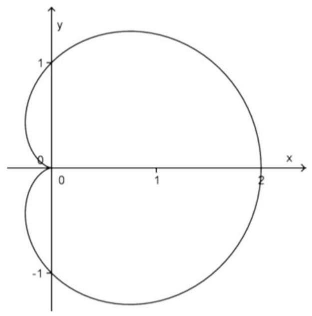
Formel Koordinaten Flächenschwerpunkt

Der Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ eines Gebiets $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Fläche A hat die Koordinaten

$x_s = \frac{1}{A} \iint_G \ x \ dA, \qquad y_s = \frac{1}{A} \iint_G \ y \ dA$

Kardioide Schwerpunkt

Die Kardioide ist die Fläche, welche in Polarkoordinaten von der Kurve $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, umschlossen wird.
Wir berechnen die Fläche A sowie den **Schwerpunkt S** der Kardioide.



$A = \iint_G 1\, dA = \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1+\cos(\phi)} 1 \cdot r\, dr \right) d\phi$

$\int_{r=0}^{1+\cos(\phi)} 1 \cdot r\, dr = \frac{1}{2}(1 + \cos(\phi))^2$

$\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(\phi))^2 d\phi = \frac{3\pi}{2}$

Für den Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ der Kardioide ist aus Symmetriegründen klar, dass $y_s = 0$ gelten muss. Somit können wir die zweite Komponente x_s berechnen:

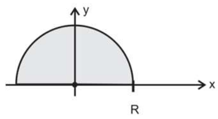
$x_s = \frac{1}{A} \iint_G x\, dA = \frac{2\pi}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1+\cos(\phi)} r \cos(\phi)\, r\, dr \right) d\phi$

$\int_{r=0}^{1+\cos(\phi)} r^2 \cos(\phi)\; dr = \frac{1}{3}\cos(\phi)\,(1 + \cos(\phi))^3$

$\frac{2\pi}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{3}\cos(\phi)\,(1 + \cos(\phi))^3 d\phi = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{6}$ $\qquad S = \left(\frac{5}{6}, 0\right)$

Kreis Schwerpunkt

Betrachten Halbkreisscheibe mit Zentrum im Ursprung und Radius R:



Berechne den Schwerpunkt der Fläche: $\frac{1}{A} \iint_G y\, dA$

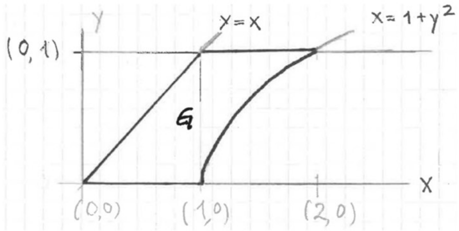
$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2$

$\frac{1}{A} \iint_G y\, dA = \frac{1}{A} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} (r \cdot \sin(\phi)) \cdot r\, dr\, d\phi = \frac{1}{A} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.4244R$

Dies bedeutet, bei bspw. $R = 1$ ist Schwerpunkt durch $S \approx (0; 0.4244)$ gegeben.

Gegeben ist das Gebiet G:

Berechnen des Integrals $\iint_G x^2 y\, dA$
in beiden möglichen Integrationsreihenfolgen.



Berechnung innerer Integration nach y, äussere nach x:

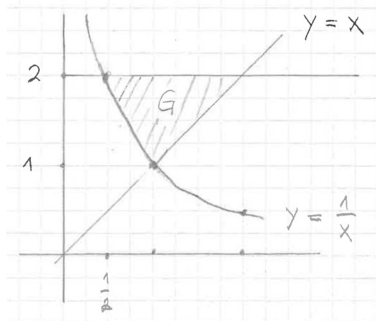
$\iint_G x^2 y\, dA = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x} x^2 y\, dy \right) dx + \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=\sqrt{x-1}}^{1} x^2 y\, dy \right) dx$

$= \int_{x=0}^{1} \frac{x^4}{2}\, dx + \int_{x=1}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2(x-1)}{2} \right) dx = \frac{1}{10} + \left(\frac{7}{3} - \frac{15}{8} \right) = \frac{67}{120}$

Berechnung innerer Integration nach x, äussere nach y:

$\iint_G x^2 y\, dA = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{1+y^2} x^2 y\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{1} \left(\frac{(1+y^2)^3 y}{3} - \frac{y^4}{3} \right) dy = \frac{67}{120}$

Das ebene Gebiet G wird begrenzt durch die Kurven $y = x$, $xy = 1$, $y = 2$
Selbständiges skizzieren des Gebiets G:



Berechnung des Flächeninhalts $\iint_G dA$:

$\int_{y=1}^{2} \left(\int_{x=\frac{1}{y}}^{y} 1\, dx \right) dy = \int_{y=1}^{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{3}{2} - \ln(2)$

Alternativ dazu:

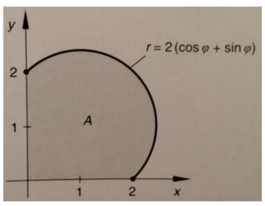
$\int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{y=\frac{1}{x}}^{2} 1\, dx \right) dy + \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=x}^{2} 1\, dx \right) dy = \frac{3}{2} - \ln(2)$

Berechnen von $\iint_G \frac{y^2}{x^2}\, dA$ (Gleiche Grenzen der entsprechenden Integrals, aber anderer Integrand)

$\int_{y=1}^{2} \left(\int_{x=\frac{1}{y}}^{y} \frac{y^2}{x^2}\, dx \right) dy = \int_{y=1}^{2} (-y + y^3)\, dy = \frac{9}{4}$

Berechnen Sie den Flächeninhalt A.

$\iint_G dA = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2(\cos(\phi)+\mathrm{si}\ (\phi))} 1 \cdot r\, dr\, d\phi = \pi + 2$



Anwendung auf Dreifachintegrale

Berechnung von Dreifachintegralen in neuen Koordinaten $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$, die durch

$x = \phi_1(u, v, w), \qquad y = \phi_2(u, v, w), \qquad z = \phi_3(u, v, w)$ gegeben sind:

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\tilde{G}} f(\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w), \phi_3(u, v, w))\, |\det(J)|\, du\, dv\, dw$$

wobei $J = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$ die Jacobi-Matrix der Transformation $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ ist, und $\tilde{G}$ das zu G entsprechende Gebiet im uvw-Raum, $\tilde{G} = (\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)^{-1}(G)$

$$dx\, dy = \left| det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| du\, dv = |x_u y_v - y_u x_v|\, du\, dv$$

$\iint_G f(x, y)dx\, dy = \iint_{\tilde{G}} f\big(\phi(u, v), \psi(u, v)\big)|\det(J)|\, du\, dv$, wobei $J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix

Zylinder

$B =$ Zylinder (Volumen) Transformationsformel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}, \begin{matrix} 0 \le r \le R \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le z \le h \end{matrix} \qquad J = \begin{pmatrix} x_r & x_\phi & x_z \\ y_r & y_\phi & y_z \\ z_r & z_\phi & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \mathrm{r}\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{det(J) = r}$$

$dx\, dy\, dz = r \cdot dr\, d\phi\, dz$

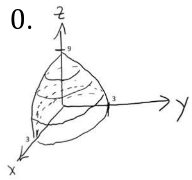
Berechnung Schwerpunkt Volumen

Sei K ein Körper im Raum mit Volumen V. Der geometrische Schwerpunkt bzw. Volumenschwerpunkt $S = (x_s,\ y_s,\ z_s)$ von K hat die Koordinaten

$$x_s = \frac{1}{V}\iint_K x\, dV, \qquad y_s = \frac{1}{V}\iint_K y\, dV, \qquad z_s = \frac{1}{V}\iint_K z\, dV$$

Beispiel: Der Körper B sei begrenzt vom Paraboloid $\mathrm{z} = 9 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2$ und von der Ebene $\mathrm{z} = 0$.

Wir berechnen das Volumen V und den Schwerpunkt $S = (0,\ 0,\ z_s)$ des Paraboloids.



$$V = \iiint_G 1\, dV, \qquad z_s = \frac{1}{V}\iiint_G z\, dV$$

Die **Integrationsgrenzen** in Zylinderkoordinaten sind:

$$9 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 9 - (r \cdot \cos(\phi))^2 - (r \cdot \sin(\phi))^2 = 9 - r^2 \cdot \cos^2(\phi) - r^2 \cdot sin^2(\phi)$$

$= 9 - r^2$ oder direkt: $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = r^2 \qquad 9 - r^2$

$0 \le \phi \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le 3, \qquad 0 \le z \le 9 - r^2$

Volumen:

$$V = \iiint_G 1\, dV = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\int_{z=0}^{9-r^2} 1 \cdot r\, dz\, dr\, d\phi$$

$$\int_{z=0}^{9-r^2} r\, dz = rz|_0^{9-r^2} = r(9 - r^2) = 9r - r^3$$

$$\int_{r=0}^{3}(9r - r^3)\, dr = \frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4|_0^3 = \frac{9}{2}3^2 - \frac{1}{4}3^4 = \frac{81}{4}$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\frac{81}{4}\right) d\phi = \frac{81}{4}\phi|_0^{2\pi} = \frac{81}{2}\pi = V$$

Wenn man die Reihenfolge der r- und z-Integration umkehrt, ändern sich auch die Integrationsgrenzen: Die Integrationsgrenzen sind in diesem Fall $0 \le \phi \le 2\pi, \qquad 0 \le z \le 9, \qquad 0 \le r \le \sqrt{9 - z}$

Schwerpunkt:

$$z_s = \frac{1}{\frac{81}{2}\pi}\iiint_G z \cdot r\, dz\, dr\, d\phi = \frac{2}{81}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\int_{z=0}^{9-r^2} zr\, dz\, dr\, d\phi$$

$$\int_{z=0}^{9-r^2} zr\, dz = \frac{1}{2}z^2 r|_0^{9-r^2} = \frac{1}{2}(9 - r^2)^2 r$$

$$\int_{r=0}^{3}\left(\frac{1}{2}(9 - r^2)^2 r\right) dr = \frac{243}{4}$$

$$\frac{2}{81}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{243}{4}\, d\phi = \frac{2}{81\pi}\left(\frac{243}{4}\phi|_0^{2\pi}\right) = \frac{2}{81\pi}\left(\frac{243}{4}(2\pi)\right) = 3 \qquad \rightarrow S = (0,\ 0,\ 3)$$

Kugel

$B =$ Kugel (Volumen). Transformationsformel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}, \begin{matrix} 0 \le r \le R \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \vartheta \le \pi \end{matrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) & -r\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) & -r\cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) & -r\sin(\theta) \cdot \sin(\phi) & r\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ \sin(\theta) & \mathrm{r}\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$det(J) = -r^2 cos(\theta)$, $\boldsymbol{|det(J)| = r^2 cos(\theta)}$

$dx\, dy\, dz = r^2 \cdot \cos(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi$

Beispiel: Bestätigen der bekannten Volumenformel $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ des Volumens einer Kugel vom Radius R. Die Integrationsgrenzen sind somit: $0 \le r \le R,$ $0 \le \phi \le 2\pi,$ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$V = \iiint_K 1\, dV = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot r^2 cos(\theta)\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 cos(\theta)\, d\theta = r^2 sin(\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \cdot 1 - r^2 \cdot (-1) = 2r^2$$

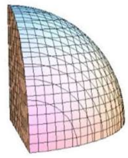
$$\int_{\phi=0}^{2\pi} (2r^2)\, d\phi = 2r^2 \phi\Big|_0^{2\pi} = 4r^2\pi$$

$$\int_{r=0}^{R} (4\pi r^2)\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$

Da die Integrationsgrenzen hier alle konstant sind, kann man die Integrationsreihenfolge beliebig ändern.

Kugeloktanten vom Radius R = 1, d.h. die Menge B= $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad x, y, z \ge 0\}$:

Berechnen des Integrals: $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$

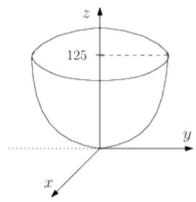


Integrationsgrenzen sind somit: $0 \le r \le 1,$ $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},$ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\iiint_B x\, dx\, dy\, dz = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)) \cdot r^2 cos(\theta)\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\pi}{16}$$

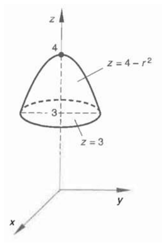
Wir lassen die Kurve $z = x^3$ bis zur Höhe 125 um die z-Achse rotieren, siehe untenstehende Abbildung, und betrachten den zugehörigen Rotationskörper.

Drücken Sie das Volumen V des Rotationskörpers durch ein Dreifachintegral aus. Dabei sollen für alle drei Variablen die Integrationsgrenzen explizit angegeben werden (das Integral muss nicht berechnet werden).



$V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{5} \int_{z=r^3}^{125} r\, dz\, dr\, d\phi$ Oder $V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{125} \int_{r=0}^{\sqrt[3]{z}} r\, dr\, dz\, d\phi$

Ein bezüglich der z-Achse rotationssymmetrischer Körper wird durch die Flächen $z = 3$ und $z = 4 - r^2$ begrenzt $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Berechnen Sie das Volumen des Körpers.



Rechnen in Zylinderkoordinaten:

$$V = \iiint_K 1\, dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=3}^{4-r^2} 1 \cdot r\, dz\, dr\, d\phi = \frac{\pi}{2}$$

Oder $V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=3}^{4} \int_{r=0}^{\sqrt{4-z}} 1 \cdot r\, dr\, dz\, d\phi$

Berechnen des Integrals: $\iiint_K (x^2 + y^2)\, dV$, wobei K die obere Halbkugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 ist, d.h. die Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad z \ge 0\}$

$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(\theta)$

$$\iiint_H (x^2 + y^2)\, dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} (r^2 \cdot \cos^2(\theta)) \cdot r^2 cos(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{4\pi}{15}$$

$\boldsymbol{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1}$

Differentialgleichungen: Repetition

Differentialgleichungen haben Funktion als Lösung!

$y' = 2y + x^2 \iff f'(x) = 2 \cdot f(x) + x^2$

Differentialoperator: $\frac{d}{dx}$

$f(x) = x^3 - 4x \iff$

$f'(x) = 3x^2 - 4 \iff \frac{d}{dx} f(x) = x^3 - 4x = f'(x)$

$f''(x) = 6x \iff \frac{d}{dx} f'(x) = 6x = f''(x) \iff \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x) = f''(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

Lösen einer einfachen Differentialgleichung

$y' = y^2 \cdot x \iff \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y^2 \cdot x \iff \mathrm{dy} = y^2 \cdot x \cdot \mathrm{dx} \iff \frac{1}{y^2}\mathrm{dy} = x \cdot \mathrm{dx} \iff \int \frac{1}{y^2} dy = \int x\, dx$

$\iff -\mathrm{y}^{-1} + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2 \iff -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \iff -1 = \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) y \iff -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c} = y$

Beispiele für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$y' = -\sin(x) \cdot y + x^3 e^{\cos(x)}$ $\quad y' = 5y + x^2$ $\quad y' = \frac{6y}{x} - x^6 \cos(x)$

$y' = x e^{-x^2} - xy$ $\quad y' = 3 - 2y$

Homogene Lösung (Trennung der Variablen)

$y' = f(x) \cdot y + g(x)$ $\quad g(x) =$ Störfunktion

$\boldsymbol{y = y_h + y_p}$ $\quad \boldsymbol{y_h}$ **= homogene Lösung** $\quad \boldsymbol{y_p}$ **= partikuläre Lösung**

$\boldsymbol{y_h = c \cdot e^{\int f(x) dx}, \; c \in \mathbb{R}}$ $\quad \boldsymbol{y_p = y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h} dx, \; c \in \mathbb{R}}$

$y' = \cos(x) \cdot y + x^3 e^{\sin(x)}$ $\quad y_h = c \cdot e^{\int \cos(x) dx} = c \cdot e^{sin(x)}, c \in \mathbb{R}$

$y_p = \cancel{c} \cdot e^{\sin(x)} \cdot \int \frac{x^3 \cancel{e^{\sin(x)}}}{\cancel{c} \cdot \cancel{e^{\sin(x)}}} dx = e^{\sin(x)} \cdot \int x^3 dx = e^{\sin(x)} \cdot \frac{1}{4}x^4$ $\quad \mathrm{y} = c \cdot e^{\sin(x)} + \frac{1}{4}x^4 e^{\sin(x)}$

Beispiel: $y' = \frac{2y}{t} + t^3, t \neq 0$ $\quad y' = \frac{2}{t} \cdot y + t^3$

$y_h = c \cdot e^{\int f(t) dt}, \; c \in \mathbb{R}$ $\quad y_p = y_h \cdot \int \frac{g(t)}{y_h} dt, \; c \in \mathbb{R}$

$y_h = c \cdot e^{\int \frac{2}{t} dt}, \; c \in \mathbb{R}$ $\quad y_p = y_h \cdot \int \frac{t^3}{y_h} dt, \; c \in \mathbb{R}$

$y_h = c \cdot e^{\int \frac{2}{t} dt} = c \cdot e^{2 \int \frac{1}{t} dt} = c \cdot e^{2 \cdot \ln(|t|)} = c \cdot e^{\ln(t^2)} = c \cdot t^2$ $\quad$ Logarithmus-Gesetz $\quad \boldsymbol{y_h = c \cdot t^2}$

$y_p = y_h \cdot \int \frac{t^3}{y_h} dt = c \cdot t^2 \cdot \int \frac{t^3}{c \cdot t^2} dt = t^2 \cdot \int \frac{t^3}{t^2} dt = t^2 \cdot \int t\, dt = t^2 \cdot \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^4$ $\quad \boldsymbol{y_p = \frac{1}{2}t^4}$

$\mathrm{y(t)} = y_h + y_p \iff \boldsymbol{y(t) = c \cdot t^2 + \frac{1}{2}t^4, \; c \in \mathbb{R}}$

Anfangswertproblem: $\mathrm{y}(1) = \frac{3}{2}$ $\quad$ Für jedes vorkommende t eine 1 einsetzen und für $\mathrm{y(t)} = \frac{3}{2}$ somit:

$\frac{3}{2} = c \cdot 1^2 + \frac{1}{2}1^4 \iff \frac{3}{2} = c + \frac{1}{2} \iff 1 = c$ $\quad$ Nun das Erhaltene $c = 1$ in $y(t) = c \cdot t^2 + \frac{1}{2}t^4$ einsetzen:

$\boldsymbol{\mathrm{y(t)} = t^2 + \frac{1}{2}t^4}$

Beispiel: $y'(x) - \frac{1}{x-1} \cdot y(x) = x - 1$ $\quad \iff y' = \frac{1}{x-1} \cdot y + x - 1$

$y_h = c \cdot e^{\int \frac{1}{x-1} dx}, \; c \in \mathbb{R}$ $\quad y_p = y_h \cdot \int \frac{x-1}{y_h} dx, \; c \in \mathbb{R}$

$y_h = c \cdot e^{\int \frac{1}{x-1} dx} = c \cdot \cancel{e^{\ln}}(|x-1|) = c \cdot (x-1), \; c \in \mathbb{R}$

$y_p = y_h \cdot \int \frac{x-1}{y_h} dx = c \cdot (x-1) \cdot \int \frac{x-1}{c \cdot (x-1)} dx = (x-1) \cdot \int 1\, dx = (x-1) \cdot x$

$\boldsymbol{y(x) = c \cdot (x-1) + (x-1) \cdot x, \; c \in \mathbb{R}}$

Bestimmen der Lösung des Anfangswertproblems: $5y' - 5y = 0$ $\quad \mathrm{y}(0) = 1$

$y' = 1 \cdot y$ $\quad y_h = c \cdot e^{\int 1\, dx} = c \cdot e^x, \; c \in \mathbb{R}$ $\quad \boldsymbol{y(x) = c \cdot e^x}$

$1 = c \cdot \boldsymbol{e^0} \iff 1 = 1c$ $\quad \boldsymbol{y = 1 \cdot e^x = e^x}$

Bestimmen der Lösung des Anfangswertproblems: $y' + 5y = e^{4x}$ $\quad \mathrm{y}(0) = 0$ $\quad y' = -5 \cdot y + e^{4x}$

$y_h = c \cdot e^{\int -5 dx} = c \cdot e^{-5x}, c \in \mathbb{R}$ $\quad y_p = c \cdot e^{-5x} \cdot \int \frac{e^{4x}}{c \cdot e^{-5x}} dx = \frac{e^{4x}}{9}, c \in \mathbb{R}$ $\quad \boldsymbol{y(x) = c \cdot e^{-5x} + \frac{e^{4x}}{9}}$

$0 = \boldsymbol{c \cdot e^{-5 \cdot 0} + \frac{e^{4 \cdot 0}}{9}} \iff -\frac{1}{9} = 1c$ $\quad \boldsymbol{y = -\frac{e^{-5x}}{9} + \frac{e^{4x}}{9}}$

Lösungsmethode für inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

Nun haben wir es mit Störfunktionen $g(x) \neq 0$ zu tun! Dafür gibt es je nach vorhandener Störfunktion $g(x)$ einen entsprechenden Lösungsansatz $y_p(x)$ gemäss der rechten Tabelle! Die partikuläre oder spezielle Lösung folgt dieser Notationen $y_p(x) = y_s(x)$

DGL hat Form $y' + ay = g(x)$

Man beachte, dass in denjenigen Fällen, wo die **Störfunktion** eine **Lösung** der **homogenen DGL** ist, der entsprechende **Ansatz** noch mit **x multiplizieren** muss!

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
4. Polynomfunktion vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & b = -a \end{cases}$

$c_0, c_1, \ldots, c_n; C, C_1, C_2$: „Stellparameter“

1. Konstante Funktion

Es sei folgende Funktion gegeben: $y' = y - 7$ → die **Störfunktion** $g(x)$ ist somit **konstanter Natur**

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y' - y = 7$ → $y_h = K \cdot e^x$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $y_p = c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = 0$

Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion $y' = y + g(x)$ ein hier ist es die Gleichung

$y' = y - 7 \Leftrightarrow 0 = c_0 - 7 \Leftrightarrow 7 = c_0$ eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es

$y_p = c_0 \Leftrightarrow y_p = 7$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = K \cdot e^x + 7}$

2. Lineare Funktion

Es sei folgende Funktion gegeben: $y' = -y + x + 1$ mit den Anfangsbedingungen

$y(0) = 3$, $y(0) = 0$, $y(0) = -2$ die **Störfunktion** $g(x)$ ist somit **linearer Natur**

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y' + y = x + 1$ → $y_h = K \cdot e^{-x}$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $y_p = c_1 x + c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = c_1$

Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion $y' = y + g(x)$ ein hier ist es die Gleichung

$y' = -y + x + 1 \Leftrightarrow c_1 = -(c_1 x + c_0) + x + 1$ Nun gilt es die Terme nach Zahl, $x, x^2, \ldots$ zu sortieren

$c_1 = -c_1 x - c_0 + x + 1 \Leftrightarrow (0) \cdot x + (c_1) \cdot 1 = (-c_1 + 1) \cdot x + (-c_0 + 1) \cdot 1$

nun können die Werte links und rechts von der Gleichung anhand des Grades von x $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ verglichen werden (Koeffizientenvergleich) und ein GS aufgestellt werden: $\left| \begin{matrix} 0 = -c_1 + 1 \\ c_1 = -c_0 + 1 \end{matrix} \right|$ gibt $c_1 = 1,\ c_0 = 0$

eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = c_1 x + c_0 \Leftrightarrow y_p = 1 \cdot x + 0 \cdot c_0 \Leftrightarrow y_p = x$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = K \cdot e^{-x} + x}$

Anfangswertprobleme können nun gelöst werden. Der Wert der Anfangsbedingung steht für K:

$y(0) = 3$ → $y = 3e^{-x} + x$, $y(0) = 0$ → $y = x$, $y(0) = -2$ → $y = -2e^{-x} + x$

3. Quadratische Funktion

Es sei folgende Funktion gegeben: $y' + 7y = x^2 - 2x + 3$

→ die **Störfunktion** $g(x)$ ist somit **quadratischer Natur**

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y' + 7y = x^2 - 2x + 3$ → $y_h = K \cdot e^{-7x}$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = 2c_2x + c_1$

Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion $y' = y + g(x)$ ein hier ist es die Gleichung

$y' = -7y + x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow 2c_2x + c_1 = -7(c_2x^2 + c_1x + c_0) + x^2 - 2x + 3$

Nun gilt es die Terme nach Zahl, x, x^2, ... zu sortieren

$2c_2x + c_1 = -7c_2x^2 - 7c_1x - 7c_0 + x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow$

$(0) \cdot x^2 + (2c_2) \cdot x + (c_1) \cdot 1 = (-7c_2 + 1) \cdot x^2 + (-7c_1 - 2) \cdot x + (-7c_0 + 3) \cdot 1$

nun können die Werte links und rechts von der Gleichung anhand des Grades von x $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ verglichen werden und ein Gleichungssystem aufgestellt werden: $\left| \begin{matrix} 0 = -7c_2 + 1 \\ 2c_2 = -7c_1 - 2 \\ c_1 = -7c_0 + 3 \end{matrix} \right|$ gibt $c_2 = \frac{1}{7},\ c_1 = -\frac{16}{49},\ c_0 = \frac{163}{343}$

eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0 \Leftrightarrow y_p = \frac{1}{7}x^2 - \frac{16}{49}x + \frac{163}{343}$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = K \cdot e^{-7x} + \frac{1}{7}x^2 - \frac{16}{49}x + \frac{163}{343}}$

---

4. Polynomfunktion vom Grade n

Gleiche Vorgehensweise wie bei Quadratischer Funktion.

---

5. Sinus

6. Cosinus

7. Sinus + Cosinus

---

8. Euler

Es sei folgende Funktion gegeben: $y' - 4y = e^{2x}$ → die Störfunktion $g(x)$ ist somit eulerscher Natur

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y' - 4y = e^{2x}$ → $y_h = K \cdot e^{4x}$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $\boldsymbol{y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx}, & b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx}, & b = -a \end{cases}}$ somit $y_p = a \cdot e^{2x}$ und bildet erste Ableitung: $y_p' = 2a \cdot e^{2x}$

Es ist darauf zu achten, dass die Störfunktion nicht eine Lösung des homogenen DGL ist! Sonst müsse noch mit x multipliziert werden!

Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion $y' = y + g(x)$ ein hier ist es die Gleichung

$y' = 4y + e^{2x} \Leftrightarrow 2a \cdot e^{2x} = 4 \cdot a \cdot e^{2x} + e^{2x}$ Nun gilt es die Terme nach Zahl, x, x^2, ... zu sortieren

$2a \cdot \cancel{e^{2x}} = 4 \cdot a \cdot \cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{2x}} \Leftrightarrow 2a = 4a + 1 \Leftrightarrow 2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = a \cdot e^{2x} = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x}$

Die Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = K \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x}}$

Spezialfall Euler - Störfunktion ist eine Lösung des homogenen DGL!

Es sei folgende Funktion gegeben: $y' - y = e^x$ → die Störfunktion $g(x)$ ist somit eulerscher Natur

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y' - y = e^x$ → $y_h = K \cdot e^x$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $\boldsymbol{y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx}, & b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx}, & b = -a \end{cases}}$ somit $y_p = a \cdot x \cdot e^x$ und bildet erste Ableitung:

$y_p' = (ax + a) \cdot e^x$ **Störfunktion ist eine Lösung des homogenen DGL**! Deshalb mit x multiplizieren!

Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion $y' = y + g(x)$ ein hier ist es die Gleichung

$y' = y + e^x \Leftrightarrow (ax + a) \cdot e^x = a \cdot x \cdot e^x + e^x$ Nun gilt es die Terme nach Zahl, x, x^2, ... zu sortieren

$(ax + a) \cdot \cancel{e^x} = a \cdot x \cdot \cancel{e^x} + \cancel{e^x} \Leftrightarrow ax + a = ax + 1 \Leftrightarrow a = 1$

eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = 1 \cdot x \cdot e^x = \boldsymbol{x \cdot e^x}$

Die Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = K \cdot e^x + x \cdot e^x}$

Spezialfälle der ersten Ordnung:

$y' = g(x)$ → kein y vorhanden, lässt sich durch das Integrieren von $g(x)$ lösen

Beispiel: $3y' = 5x$ Lösung: $3y' = 5x \Leftrightarrow y' = \frac{5x^2}{3 \cdot 2} + C \Leftrightarrow y' = \frac{5x^2}{6} + C$

Bestimmen der Lösung des Anfangswertproblems: $3y' - 4x = 0,$ $y(0) = 2$

$$3y' - 4x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{4x^2}{3 \cdot 2} \Leftrightarrow y' = \frac{2x^2}{3} + C$$

Allgemeine Lösung $\boldsymbol{y = \frac{2x^2}{3} + C}$

Anfangswertproblem: Für jedes vorhandene x hier eine Null einsetzen und $y' = 2$ setzen. Die konstante reelle Zahl C muss dafür sorgen, dass die Gleichung aufgeht!

Somit $y' = \frac{2x^2}{3} + C \Leftrightarrow 2 = \frac{2 \cdot 0^2}{3} + C \Leftrightarrow 2 = 0 + C \Leftrightarrow 2 = C$

Eingesetzt in die Allgemeine Lösung ergibt sich: $y' = \frac{2x^2}{3} + 2$

DGL zweiter Ordnung – Das macht die Kuh dann auch nicht fett!

Zur Erinnerung:

Homogene DGL: $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ ohne Störfunktion

Inhomogene DGL: $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$ mit Störfunktion $g(x)$

Satz:

- Sind y_1 und y_2 Lösungen der DGL und sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, so ist $C_1 y_1 + C_2 y_2$ auch eine Lösung der DGL.
- Es gibt genau n linear unabhängige reelle Lösungen der DGL. $n =$ höchste vorkommende Ableitung

Lösungsmethode für homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$\boldsymbol{y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$$

$$\boldsymbol{P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 \cdot 1}$$

Wir müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ finden! Fallunterscheidung:

- λ ist eine **einfache reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$
- λ ist eine **doppelte reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$
- λ ist eine **einfache komplexe Nullstelle** von $P(\lambda)$

Mitternachtsformel zur Lösung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$: $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$

$\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)}$ Es können drei Fälle auftreten (Betrachtung des Ausdrucks unter Wurzel!):

- $a_1^2 - 4a_0 > 0$ → zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- $a_1^2 - 4a_0 = 0$ → eine doppelte reelle Nullstellen λ_0
- $a_1^2 - 4a_0 < 0$ → zwei konjugierte komplexe Nullstellen $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$

Diese drei Fälle werden nachfolgende separat behandelt!

Beispiel einfache reelle Nullstelle:

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

Nullstellen: $\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Formel: $\boldsymbol{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

Bestimmen der allgemeinen Lösung von $y'' + 2y' - 3y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -3$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Beispiel doppelte reelle Nullstellen:

$$y'' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 = 0$$

Nullstellen: $\lambda_1 = 0$, doppelt

Allgemeine Lösung der DGL: $y = e^{0 \cdot x} = 1, \ \ y = x \cdot e^{0 \cdot x} = x$ → $y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Formel: $\boldsymbol{y = C_1 e^{\lambda x} + x \cdot C_2 \cdot e^{\lambda x}}$

Bestimmen der allgemeinen Lösung von $y'' + 2y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ Nullstellen: $\lambda_1 = -1$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Bestimmen der allgemeinen Lösung von $y'' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 = 0$ Nullstellen: $\lambda_1 = 0$

$y = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot x \cdot e^0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x \cdot 1 = C_1 + C_2 x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Diese DGL kann man auch durch «Raten» lösen: Gefragt sind Funktionen mit der Eigenschaft, dass ihre zweite Ableitung verschwindet, und demensprechend sind die Lösungen gegeben durch Polynome erster Ordnung.

Wählen Parameter $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Differentialgleichung $y'' + 8y' + ky = 0$ eine Lösung der Form

$y = x \cdot e^{\lambda x}$ → damit wir unten ein x kriegen, muss das Polynom eine doppelte reelle Nullstelle haben

$\lambda = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$, wobei $a_1^2 - 4a_0 = 0$ → $\lambda = \frac{1}{2}\left(-8 \pm \sqrt{8^2 - 4k}\right), \ 8^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 16$

$\lambda = \frac{1}{2}(-8 \pm 0) = -4$

Wählen Parameter $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Differentialgleichung $y'' + 5y' + ky = 0$ eine Lösung der Form $y = xe^{\lambda x}$ → damit wir unten ein x kriegen, muss das Polynom eine doppelte reelle Nullstelle haben

$\lambda = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$, wobei $a_1^2 - 4a_0 = 0$ → $\lambda = \frac{1}{2}\left(-5 \pm \sqrt{5^2 - 4k}\right)$, $5^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{25}{4}$

$\lambda = \frac{1}{2}(-5 \pm 0) = -\frac{5}{2}$

Beispiel einfache komplexe Nullstelle:

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$$

Nullstellen: $\lambda_1 = -2 + 4i$, $\lambda_2 = -2 - 4i$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C_1 e^{-2x} \cdot \cos(4x) + C_2 e^{-2x} \cdot \sin(4x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Formel: Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$, Lösung $y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Bestimmen der allgemeinen Lösung von $y'' + 4y' + 5y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

$y = C_1 e^{-2x} \cdot \cos(x) + C_2 e^{-2x} \cdot \sin(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Bestimmen der allgemeinen Lösung von $y'' + 2y' + 5y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

$y = C_1 e^{-x} \cdot \cos(2x) + C_2 e^{-x} \cdot \sin(2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Lösungsmethode für inhomogene lineare DGL 2. Ordnung

Nun haben wir es mit Störfunktionen $g(x) \neq 0$ zu tun! Dafür gibt es je nach vorhandener Störfunktion $g(x)$ einen entsprechenden Lösungsansatz $y_p(x)$ gemäss der rechten Tabelle! Die partikuläre oder spezielle Lösung folgt dieser Notationen $y_p(x) = y_s(x)$

DGL hat Form $y'' + ay' + by = g(x)$

$g(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ = Polynom n-ten Grades

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbf{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = Be^{cx}$ mit $B, c \in \mathbf{R}$	c **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ae^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **einfache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Axe^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **zweifache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ax^2 e^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
3	$g(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$i\beta$ **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ oder $y_p = C\sin(\beta x + \varphi)$
		$i\beta$ **Lösung** von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x\left(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\right)$ oder $y_p = Cx\sin(\beta x + \varphi)$
		mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbf{R}$

Polynom als Störfunktion: Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + 9y = x^2$

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y'' + 9y = x^2$ → $y_h = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x)$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen. **Achtung: Unterscheidung je nachdem ob a und/oder b gleich Null sind!**

$y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = 2c_2 x + c_1$ und die zweite Ableitung $y_p'' = 2c_2$ Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion

$y'' + 9y = x^2 \Leftrightarrow$ ein

$2c_2 + 9(c_2 x^2 + c_1 x + c_0) = x^2 \Leftrightarrow 2c_2 = -9c_2 x^2 - 9c_1 x - 9c_0 + x^2$

Nun gilt es die Terme nach Zahl, $x, x^2, \ldots$ zu sortieren

$(0) \cdot x^2 + (0) \cdot x + (2c_2) \cdot 1 = (-9c_2 + 1) \cdot x^2 + (-9c_1) \cdot x + (-9c_0) \cdot 1$

nun können die Werte links und rechts von der Gleichung anhand des Grades von x $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ verglichen werden und ein Gleichungssystem aufgestellt werden: $\left| \begin{matrix} 0 = -9c_2 + 1 \\ 0 = -9c_1 \\ 2c_2 = -9c_0 \end{matrix} \right|$ gibt $c_2 = \frac{1}{9}$, $c_1 = 0$, $c_0 = -\frac{2}{81}$

eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \Leftrightarrow y_p = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{81}$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x) + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{81}}$

Polynom als Störfunktion: Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$
Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.
$y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$ → $y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$
Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = 2c_2x + c_1$ und die zweite Ableitung $y_p'' = 2c_2$ Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion
$y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow$ ein
$2c_2 + 1(2c_2x + c_1) - 2(c_2x^2 + c_1x + c_0) = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow$
$2c_2 = -2c_2x - c_1 + 2c_2x^2 + 2c_1x + 2c_0 + x^2 - 4x + 3$
Nun gilt es die Terme nach Zahl, $x, x^2, \ldots$ zu sortieren
$(0) \cdot x^2 + (0) \cdot x + (2c_2) \cdot 1 = (2c_2 + 1) \cdot x^2 + (-2c_2 + 2c_1 - 4) \cdot x + (-c_1 + 2c_0 + 3) \cdot 1$
nun können die Werte links und rechts von der Gleichung anhand des Grades von x $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ verglichen werden und ein GS aufgestellt werden: $\left| \begin{array}{c} 0 = 2c_2 + 1 \\ 0 = -2c_2 + 2c_1 - 4 \\ 2c_2 = -c_1 + 2c_0 + 3 \end{array} \right|$ gibt $c_2 = -\frac{1}{2},\ c_1 = \frac{3}{2},\ c_0 = -\frac{5}{4}$
eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0 \Leftrightarrow y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$
Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}}$

Polynom als Störfunktion: Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + 2y' + y = x^2$
Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.
$y'' + 2y' + y = x^2$ → $y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$
Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$ und davon bildet man die erste Ableitung: $y_p' = 2c_2x + c_1$ und die zweite Ableitung $y_p'' = 2c_2$ Die beiden Funktionen setzt man nun in die Ursprungsfunktion
$y'' + 2y' + y = x^2 \Leftrightarrow 2c_2 = -2(2c_2x + c_1) + (-c_2x^2 - c_1x - c_0)$ ein
$2c_2 = -4c_2x - 2c_1 - c_2x^2 - c_1x - c_0 + x^2 \Leftrightarrow$
$(0) \cdot x^2 + (0) \cdot x + (2c_2) \cdot 1 = (-c_2 + 1) \cdot x^2 + (-4c_2 - c_1) \cdot x + (-2c_1 - c_0) \cdot 1$
nun können die Werte links und rechts von der Gleichung anhand des Grades von x $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ verglichen werden und ein GS aufgestellt werden: $\left| \begin{array}{c} 0 = -c_2 + 1 \\ 0 = -4c_2 - c_1 \\ 2c_2 = -2c_1 - c_0 \end{array} \right|$ gibt $c_2 = 1,\ c_1 = -4,\ c_0 = 6$
eingesetzt in den Lösungsansatz gibt es $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0 \Leftrightarrow y_p = x^2 - 4x + 6$
Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 - 4x + 6}$
Anfangswertproblem: $y(0) = 5,\ y'(0) = 4$
Für $y(0) = 5$ in der allgemeinen Lösung $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 - 4x + 6}$ überall für $x = 0$ einsetzen: $y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 + 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{C_1 + 6 = 5}$ und erste Ableitung der allgemeinen Lösung bilden: $y' = C_1 \cdot -e^{-x} + C_2 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x} + 2x - 4$ somit
$y'(0) = C_1 \cdot -1 + C_2 \cdot (1 - 0) \cdot 1 - 4 = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{-C_1 + C_2 - 4 = 4}$ daraus wird ein GS gebildet:
$\left| \begin{array}{c} C_1 + 6 = 5 \\ -C_1 + C_2 - 4 = 4 \end{array} \right| \quad C_1 = -1,\ C_2 = 7$
Lösung des Anfangswertproblem ist damit: $\boldsymbol{y = -e^{-x} + 7xe^{-x} + x^2 - 4x + 6}$

Störfunktion $= \boldsymbol{B \cdot e^{cx}}$ Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + 9y = e^{-x}$
Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.
$y'' + 9y = e^{-x}$ → $y_h = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x)$
Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: Es muss nun betrachtet werden, ob c in $\boldsymbol{g(x) = B \cdot e^{cx}}$ keine, eine einfache oder doppelte Lösung ist: Oben haben wir gesehen, dass die Lösung $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ ist. Die Störfunktion hat $c = -1$, was nicht die Lösung des homogenen Teils entspricht.
1. Ableitung von $y_p = e^{-x}$ ist $y_p' = -e^{-x}$ und die 2. Ableitung $y_p'' = e^{-x}$ eingesetzt in die Ursprungsgleichung $y'' + 9y = e^{-x}$ ergibt sich: $Ae^{-x} + 9Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A + 9A = 1 \Leftrightarrow 10A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{10}$
Somit ist die spezielle Lösung: $\boldsymbol{\frac{1}{10}e^{-x}}$
Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x) + \frac{1}{10}e^{-x}}$

Aufgrund der Linearität einer DGL können zwei Störfunktionen mit gleicher homogener Funktion addiert werden: Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + 9y = x^2 + e^{-x}$

Wir haben bereits beide Störfunktionen einzeln gelöst. Somit können wir die beiden partikulären Teile addieren und erhalten so direkt die Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x) + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{81} + \frac{1}{10}e^{-x}}$

Störfunktion $= \boldsymbol{B \cdot e^{cx}}$ Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + y' - 12y = e^{4x}$

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y'' + y' - 12y = e^{4x}$ → $y_h = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-4x}$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: Es muss nun betrachtet werden, ob c in $\boldsymbol{g(x) = B \cdot e^{cx}}$ keine, eine einfache oder doppelte Lösung ist: Oben haben wir gesehen, dass die Lösung $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -4$ ist. Die Störfunktion hat $c = 4$, was nicht die Lösung des homogenen Teils entspricht.

1. Ableitung von $y_p = e^{4x}$ ist $y_p' = 4e^{4x}$ und die 2. Ableitung $y_p'' = 16e^{4x}$ eingesetzt in die Ursprungsgleichung $y'' + y' - 12y = e^{4x}$ ergibt sich: $16 \cdot A \cdot e^{4x} + 4 \cdot A \cdot e^{4x} - 12 \cdot A \cdot e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow 8A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{8}$

Somit ist die spezielle Lösung: $\boldsymbol{\frac{1}{8}e^{4x}}$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{8}e^{4x}}$

Störfunktion $= \boldsymbol{B \cdot e^{cx}}$ Es sei folgende Funktion gegeben: $y'' + 7y = e^{-2x}$

Der homogene Teil folgt der bereits bekannten Logik und dabei wird die Störfunktion $g(x)$ ignoriert.

$y'' + 7y = e^{-2x}$ → $y_h = C_1 \cdot \cos(\sqrt{7}x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{7}x)$

Für die Störfunktion respektive die spezielle Lösung $y_p(x) = y_s(x)$ wird nun der Lösungsansatz gemäss Tabelle übernommen: Es muss nun betrachtet werden, ob c in $\boldsymbol{g(x) = B \cdot e^{cx}}$ keine, eine einfache oder doppelte Lösung ist: Oben haben wir gesehen, dass die Lösung $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7}i$ ist. Die Störfunktion hat $c = -2$, was nicht die Lösung des homogenen Teils entspricht.

1. Ableitung von $y_p = e^{-2x}$ ist $y_p' = -2e^{-2x}$ und die 2. Ableitung $y_p'' = 4e^{-2x}$ eingesetzt in die Ursprungsgleichung $y'' + 7y = e^{-2x}$ ergibt sich: $4 \cdot A \cdot e^{-2x} + 0 + 7 \cdot A \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow 11A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{11}$

Somit ist die spezielle Lösung: $\boldsymbol{\frac{1}{11}e^{-2x}}$

Die **Allgemeine Lösung**: $y = y_h + y_p$ ist damit: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot \cos(\sqrt{7}x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{7}x) + \frac{1}{11}e^{-2x}}$

Wählen einer Störfunktion, die keine Partikuläre Lösung der Form der gewählten Störfunktion hat

Wir müssen eine Störfunktion wählen, die selbst schon eine Lösung der homogenen DGL ist:

Bsp.: $g(x) = \cos(\sqrt{7}x)$ oder $g(x) = \sin(\sqrt{7}x)$

Spezielle DGL 2. Ordnung:

Bestimmung der inhomogenen DGL niedrigster Ordnung mit folgender allgemeinen Lösung:

$y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x} + x^3 + 1$

Zuerst Rückführung des homogenen Parts: $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x}$

Lösungen müssen somit sein: $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2$

Charakterische Gleichung: $(\lambda - 2)(\lambda + 2) = \lambda^2 - 4 = 0$ somit **homogene DGL:** $\boldsymbol{y_h = y'' - 4y = 0}$

Partikuläre Lösung ist: $y_p = x^3 + 1$ Ableitungen bilden: $y_p' = 3x^2, \; y_p'' = 6x$

Einsetzen in homogene DGL: $y_h = y'' - 4y$ $\quad y_h = 6x - 4(x^3 + 1) = 6x - 4x^3 - 4$

$= \boldsymbol{-4x^3 + 6x - 4}$

Die gesuchte DGL ist damit: $\boldsymbol{y'' - 4y = -4x^3 + 6x - 4}$

Wählen des Parameters $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Differentialgleichung $y'' - 4y' + cy = e^{2x}$ eine Lösung vom Typ $y = a \cdot \boldsymbol{x^2} \cdot e^{2x}$

Gemäss Tabelle 2.3 muss für den Erhalt von $\boldsymbol{x^2}$ die Störfunktion $g(x) = B \cdot e^{cx}$ eine doppelte Lösung sein. Da in dieser Aufgabe $g(x) = B \cdot e^{cx} \Leftrightarrow g(x) = e^{2x}$ und somit $c = 2$ gilt, muss die reelle Zahl zwei eine doppelte Nullstelle das charakteristischen Polynoms sein: $\lambda^2 - 4\lambda + c = 0$ mit $\lambda_{1,2} = 2$

$2^2 - 4 \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + c = 0 \Leftrightarrow -4 + c = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c = 4}$

$y'' - 4y' + cy = e^{2x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = e^{2x}}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ somit $\lambda_{1,2} = 2$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y'' - 5y' + c \cdot y = e^{2x}$ für $c = -14$
Charakterische Gleichung: $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ Lösungen: $\lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = -2$
Basislösungen: $y_1 = C_1 \cdot e^{7x}, \ y_2 = C_2 \cdot e^{-2x}$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h = C_1 \cdot e^{7x} + C_2 \cdot e^{-2x}}$
Partikuläre Lösung: Gemäss Ansatz Tabelle 2.1 keine Lösung der charakteristischen Lösung
Störfunktion: $g(x) = e^{2x}$, Ansatz $y_s = A \cdot e^{cx} = A \cdot e^{2x}, \ y_s' = 2A \cdot e^{2x}, \ y_s'' = 4A \cdot e^{2x}$,
Einsetzen in Ursprungsfunktion$y'' - 5y' + c \cdot y = e^{2x}$ ergibt:
$4A \cdot e^{2x} - 10A \cdot e^{2x} - 14A \cdot e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow -20A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{20}$
Lösung einsetzen: $y_s = A \cdot e^{cx} = A \cdot e^{2x} = -\frac{1}{20} \cdot e^{2x}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{7x} + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{20} \cdot e^{2x}}$
Für welches c ∈ ℝ hat die Differentialgleichung keine spezielle Lösung der Form $\boldsymbol{y_s = a \cdot e^{2x}}$
Die inhomogene DGL hat genau dann keine spezielle Lösung von der Form der Störfunktion, wenn die Störfunktion schon eine Lösung der homogenen DGL ist. Wir untersuchen also, für welches c ∈ ℝ die Funktion $y_s = e^{2x}$ eine Lösung der homogenen DGL $y'' - 5y' + c \cdot y = 0$ ist. Einsetzen von $y_s = e^{2x}$ in diese homogene DGL ergibt: $4e^{2x} - 10e^{2x} + c \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4 - 10 + c = 0 \Leftrightarrow -6 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6$
Keine spezielle Lösung: $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = e^{2x}}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y'' + 4y' = 3x + 1$
Charakterische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda = 0$ Lösungen: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -4$
Basislösungen: $y_1 = C_1, \ y_2 = C_2 \cdot e^{-4x}$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}}$
Partikuläre Lösung: Störfunktion: $g(x) = 3x + 1$, Ansatz $y_s = a_1 x + a_0, \ y_s' = a_1$, $y_s'' = 0$,
Einsetzen in Ursprungsfunktion $y'' + 4y' = 3x + 1$ ergibt: $0 + a_1 = 3x + 1$
ACHTUNG: a_1 ist eine konstante und kann somit niemals nie $3x$ ergeben. Ansatz ist gescheitert.
Der Ansatz muss nun deshalb gemäss Tabelle mit x multipliziert werden!
Neuer Ansatz: $\boldsymbol{y_s = a_1 x^2 + a_0 x}$, $y_s' = 2a_1 x + a_0$, $y_s'' = 2a_1$
In Ursprungsgleichung $y'' + 4y' = 3x + 1$ einsetzen: $2a_1 + 8a_1 x + 4a_0 = 3x + 1$
GS aufstellen: $\begin{vmatrix} 2a_1 + 4a_0 = 1 \\ 8a_1 = 3 \end{vmatrix}$ $a_1 = \frac{3}{8}, \ a_0 = \frac{1}{16}$ Lösung in NEUEN Ansatz einsetzen:
$\boldsymbol{y_s = a_1 x^2 + a_0 x = \frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{16} x}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x} + \frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{16} x}$

Wählen des Parameters c ∈ ℝ so, dass die Differentialgleichung $y'' + cy = \cos(5x)$ **keine spezielle Lösung** vom Typ $y_s = a \cdot \cos(5x)$ hat. → Störfunktion muss Lösung der homogenen DGL sein!
Wir erhalten $\cos(5x)$ als doppelte komplexe Nullstelle von ± 5i, charakter. Polynom ist damit $\lambda^2 + c = 0$
Mit $\lambda^2 + 25 = 0$ erhalten wir $\lambda_{1,2} = \pm 5$i als Lösungen und damit $y_h = C_1 \cdot \cos(5x) + C_2 \cdot \sin(5x)$

Bestimmen einer homogenen DGL mit reellen Koeffizienten, die die Lösungen $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}$ hat:
Aus den gegebenen Lösungsfunktionen folgt, dass $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein müssen. Dieses Polynom ist also $P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$
Also ist die gesuchte DGL: $y'' + 3y' + 2y = 0$

Bestimmen einer homogenen DGL mit reellen Koeffizienten, die die Lösungen $y_1 = xe^{2x}$ hat:
Aus der gegebenen Lösungsfunktion folgt, dass $\lambda_{1,2} = 2$ eine doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein müssen. Dieses Polynom ist also $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$
Also ist die gesuchte DGL: $y'' - 4y' + 4y = 0$

Bestimmen einer homogenen DGL mit reellen Koeffizienten, die die Lösungen $y_1 = \sin(3x)$ hat:
Aus der gegebenen Lösungsfunktion folgt, dass $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ eine konjugiert-komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein müssen. Dieses Polynom ist also $P(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = \lambda^2 + 9$
Also ist die gesuchte DGL: $y'' + 9y = 0$

Welche inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten niedrigster Ordnung hat als allgemeine Lösung die folgende Funktion? $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x} + x^3 + 1$
Aus den gegebenen Lösungsfunktionen folgt, dass $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein müssen. Dieses Polynom ist also $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = \lambda^2 - 4$
Also ist der gesuchte homogene Teil der DGL: $y'' - 4y = g(x)$

Um jetzt noch die Störfunktion zu finden, beachten wir, dass $y_s = x^3 + 1$ eine partikuläre Lösung der gesuchten DGL sein soll. Eingesetzt in den schon gefundenen homogenen Teil ergibt sich:
$y_s = x^3 + 1,$ $y_s' = 3x^2,$ $y_s'' = 6x$ daraus folgt:
$y'' - 4y = 6x - 4(x^3 + 1) = -4x^3 + 6x - 4$
Die gesuchte Störfunktion ist also $g(x) = -4x^3 + 6x - 4$
und die DGL damit: $y'' - 4y = -4x^3 + 6x - 4$

DGL höherer Ordnung

Lösung der DGL erfolgt wieder anhand homogenen und partikulären Teils.

Lösungsmethode für homogene lineare DGL höherer Ordnung

Gleiche Vorgehensweise wie bei n = 2:

$$\boldsymbol{y^{(5)} + a_4 \cdot y^{(4)} + a_3 \cdot y^{(3)} + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0}$$

$$\boldsymbol{P(\lambda) = \lambda^5 \quad + a_4 \cdot \lambda^4 \quad + a_3 \cdot \lambda^3 \quad + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda \quad + a_0 \cdot 1 = 0}$$

Wir müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ finden! Fallunterscheidung:

- λ ist eine **einfache reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$
- λ ist eine **mehrfache reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$
- λ ist eine **einfache komplexe Nullstelle** von $P(\lambda)$
- λ ist eine **mehrfache komplexe Nullstelle** von $P(\lambda)$

Lösen mit Gleichungssystemlöser.

λ ist eine **einfache reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$

→ $\boldsymbol{y = e^{\lambda x}}$ → wie bis anhin

λ ist eine **mehrfache reelle Nullstelle** von $P(\lambda)$

→ $\boldsymbol{y = e^{\lambda x}, \quad y = x \cdot e^{\lambda x}, \quad y = x^2 \cdot e^{\lambda x}, \quad y = x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}}$

λ ist eine **einfache komplexe Nullstelle** von $P(\lambda)$

→ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta,$ $\quad \boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)}$ → wie bis anhin

---

λ ist eine **mehrfache komplexe Nullstelle** von $P(\lambda)$

Gibt es m-fache konjugiert komplexe Nullstellen, so erhält man $2m$ linear unabhängige Lösungen:

$\boldsymbol{y_1 = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)}$ $\quad \boldsymbol{y_2 = C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)}$

$\boldsymbol{y_3 = C_3 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)}$ $\quad \boldsymbol{y_4 = C_4 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)}$

$\boldsymbol{y_{2m-1} = C_{2m-1} \cdot x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)}$ $\quad \boldsymbol{y_{2m} = C_{2m} \cdot x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)} - 5y'' + 6y' = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = 2, \;\; \lambda_3 = 3$

Basislösungen: $y_1 = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} = C_1, \;\; y_2 = C_2 \cdot e^{2x}, \;\; y_3 = C_3 \cdot e^{3x}$

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_{2,3} = \pm i$

Basislösungen: $y_1 = C_1 \cdot e^{-x}, \;\; y_{2,3} = C_2 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \cos(x) + C_3 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \sin(x) = C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x)$

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x)}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0$

Lösungen: $\lambda_{1,2} = -1, \;\; \lambda_{3,4,5} = 0$

Basislösungen: $y_{1,2} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x},$

$y_{3,4,5} = C_3 \cdot e^{0 \cdot x} + C_4 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} + C_5 \cdot x^2 \cdot e^{0 \cdot x} = C_3 + C_4 x + C_5 x^2$

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 + C_4 x + C_5 x^2}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

Lösungen: $\lambda_{1,2} = 0, \;\; \lambda_{3,4,5} = 1$

Basislösungen: $y_{1,2} = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x,$

$y_{3,4,5} = C_3 \cdot e^x + C_4 \cdot x \cdot e^x + C_5 \cdot x^2 \cdot e^x =$

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot e^x + C_4 \cdot x \cdot e^x + C_5 \cdot x^2 \cdot e^x}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(n)} = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^{(n)} = 0$

Lösungen: $\lambda_{1,\dots,n} = 0$ (n-fach)

Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 \cdot x + \dots + C_n \cdot x^{n-1}}$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblem: $y^{(3)} + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
Anfangswerte $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$, $y''(0) = 14$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$
Lösungen: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$
Basislösungen: $y_1 = C_1 \cdot e^{-x}$, $y_2 = C_2 \cdot e^{-2x}$, $y_3 = C_3 \cdot e^{-3x}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot e^{-3x}}$
Anfangswertproblem: $y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 \cdot e^{-2x} - 3C_3 \cdot e^{-3x}$, $y'' = C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{-2x} + 9C_3 \cdot e^{-3x}$
GS aufstellen, überall für x = 0 in den Gleichungen einsetzen und die Anfangswerte einfügen:

$$\left| \begin{array}{c} C_1 + C_2 + C_3 = 3 \\ -C_1 - 2C_2 - 3C_3 = -6 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 14 \end{array} \right| \qquad C_1 = C_2 = C_3 = 1$$

Lösung Anfangswertproblem: $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot e^{-3x} = \boldsymbol{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x}}$

Bestimmen aller Lösungen der DGL die für $x \longrightarrow \infty$ gegen Null konvergieren: $y^{(3)} = y'$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3 - \lambda = 0$ Lösungen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$
Basislösungen: $y_1 = C_1 \cdot e^{-x}$, $y_{2,3} = C_2 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \cos(x) + C_3 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \sin(x) = C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x)$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h = C_1 + C_2 \cdot e^{x} + C_3 \cdot e^{-x}}$
Der einzige Teil der Lösung der gegen Null konvergiert ist: $\boldsymbol{C_3 \cdot e^{-x}}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = C \cdot e^{-x}}$

Lösungsmethode für inhomogene lineare DGL höherer Ordnung

Gleiches Vorgehen wie bei den beiden Vorgänger-kapitel

Möglichkeit für die Nullstellenberechnung von Polynomfunktionen höherer Ordnung mit TI-nspire CX II-T CAS Taschenrechner inkl. Komplexen Nullstellen und Häufigkeit

menu → 3 Algebra → 8 Polynomwerkzeuge → 3 Komplexe Polynomwurzeln (inkludiert reelle und komplexe Nullstellen)

Beispiel: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$
cPolyRoots(x^3+x^2+x+1, x)

Ausgabe: $\{-\mathbf{1}, -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\}$
$\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=\pm i$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade n $g(x)=P_n(x)$	$y_p=\begin{cases} Q_n(x) & a_0 \neq 0 \\ x^k \cdot Q_n(x) & a_0=a_1=\ldots=a_{k-1}=0 \end{cases}$ für $Q_n(x)$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$
2. Exponentialfunktion $g(x)=e^{cx}$	(1) c ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p=A\cdot e^{cx}$ *Parameter:* A
	(2) c ist eine *r-fache* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p=A\cdot x^r\cdot e^{cx}$ *Parameter:* A
3. Sinusfunktion $g(x)=\sin(\beta x)$ *oder* Kosinusfunktion $g(x)=\cos(\beta x)$ *oder* eine Linear-kombination aus beiden Funktionen	(1) $\mathrm{j}\beta$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p=A\cdot\sin(\beta x)+B\cdot\cos(\beta x)$ *Parameter:* A, B
	(2) $\mathrm{j}\beta$ ist eine *r-fache Lösung* der charakteristischen Gleichung: $y_p=x^r[A\cdot\sin(\beta x)+B\cdot\cos(\beta x)]$ *Parameter:* A, B

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)}+y''+y'+y=2x+5$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$
Lösungen: $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=\pm i$
Basislösungen: $y_1=C_1\cdot e^{-x},\ \ y_{2,3}=C_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(x)+C_3\cdot e^{0\cdot x}\cdot\sin(x)=C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)}$
Partikuläre Lösung: Gemäss Ansatz Tabelle 1.1 keine Lösung der charakteristischen Lösung
Störfunktion: $g(x)=2x+5$ Ansatz $y_s=a_1x+a_0$, $y_s'=a_1$, $y_s''=y_s^{(3)}=0$
Einsetzen in Ursprungsfunktion $y^{(3)}+y''+y'+y=2x+5$ ergibt: $0+0+a_1+a_1x+a_0=2x+5$
GS aufstellen: $\left|\begin{matrix} a_1=2 \\ a_1+a_0=5 \end{matrix}\right|$ $a_1=2,\ a_0=3$ Lösung einsetzen: $y_s=a_1x+a_0 \Leftrightarrow y_s=\mathbf{2x+3}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)+2x+3}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)}+y''+y'+y=e^x$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$ Lösungen: $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=\pm i$
Basislösungen: $y_1=C_1\cdot e^{-x},\ \ y_{2,3}=C_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(x)+C_3\cdot e^{0\cdot x}\cdot\sin(x)=C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)}$
Partikuläre Lösung: Gemäss Ansatz Tabelle 2.1 keine Lösung der charakteristischen Lösung
Störfunktion: $g(x)=e^x$ Ansatz $y_s=A\cdot e^x=y_s'=y_s''=y_s^{(3)}$
Einsetzen in Ursprungsfunktion $y^{(3)}+y''+y'+y=e^x$ ergibt: $A\cdot e^x+A\cdot e^x+A\cdot e^x+A\cdot e^x=e^x$
$\Leftrightarrow A+A+A+A=1\Leftrightarrow 4A=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{4}$ Lösung einsetzen: $y_s=A\cdot e^x\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{4}e^x}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)+\frac{1}{4}e^x}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)}+y''+y'+y=4e^{2x}$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$ Lösungen: $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=\pm i$
Basislösungen: $y_1=C_1\cdot e^{-x},\ \ y_{2,3}=C_2\cdot e^{0\cdot x}\cdot\cos(x)+C_3\cdot e^{0\cdot x}\cdot\sin(x)=C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)}$
Partikuläre Lösung: Gemäss Ansatz Tabelle 2.1 keine Lösung der charakteristischen Lösung
Störfunktion: $g(x)=4e^{2x}$, Ansatz $y_s=A\cdot e^{cx}=A\cdot e^{2x}$, $y_s'=2A\cdot e^{2x}$, $y_s''=4A\cdot e^{2x}$,
$y_s^{(3)}=8A\cdot e^{2x}$ Einsetzen in Ursprungsfunktion $y^{(3)}+y''+y'+y=4e^{2x}$ ergibt:
$8A\cdot e^{2x}+4A\cdot e^{2x}+2A\cdot e^{2x}+A\cdot e^{2x}=4e^{2x}\Leftrightarrow 15A=4\Leftrightarrow A=\frac{4}{15}$
Lösung einsetzen: $y_s=A\cdot e^{cx}=A\cdot e^{2x}=\frac{4}{15}\cdot e^{2x}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot\cos(x)+C_3\cdot\sin(x)+\frac{4}{15}\cdot e^{2x}}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL $y^{(3)}+4y''=3x+1$
Charakterische Gleichung: $\lambda^3+4\lambda^2=0$ Lösungen: $\lambda_{1,2}=0,\ \ \lambda_3=-4$
Basislösungen: $y_{1,2}=C_1+C_2x,\ \ y_3=C_3\cdot e^{-4x}$
Homogene Lösung: $\boldsymbol{y_h=C_1+C_2x+C_3\cdot e^{-4x}}$
Partikuläre Lösung: Störfunktion: $g(x)=3x+1,$ Ansatz $y_s=a_1x+a_0,\quad y_s'=a_1,\quad y_s''=0=y_s^{(3)}$
Einsetzen in Ursprungsfunktion $y^{(3)}+4y''=3x+1$ ergibt: $0+0=3x+1$
ACHTUNG: $0+0$ kann niemals nie $3x+1$ ergeben. Ansatz ist gescheitert.
Der Ansatz muss nun deshalb gemäss Tabelle mit x multipliziert werden!
Neuer Ansatz I: $\boldsymbol{y_s=a_1x^2+a_0x},\quad y_s'=2a_1x+a_0,\quad y_s''=2a_1,\quad y_s^{(3)}=0$
In Ursprungsgleichung $y^{(3)}+4y''=3x+1$ einsetzen: $0+8a_1=3x+1$
ACHTUNG: $0+8a_1$ kann niemals nie $3x+1$ ergeben. Ansatz ist gescheitert. Erneute Multiplikation mit x
Der Ansatz muss nun deshalb gemäss Tabelle mit $\boldsymbol{x^2}$ multipliziert werden!
Neuer Ansatz II: $\boldsymbol{y_s=a_1x^3+a_0x^2},\quad y_s'=3a_1x^2+2a_0x,\quad y_s''=6a_1x+2a_0,\quad y_s^{(3)}=6a_1$
In Ursprungsgleichung $y^{(3)}+4y''=3x+1$ einsetzen: $6a_1+4(6a_1x+2a_0)=3x+1$
GS aufstellen: $\left|\begin{matrix}6a_1+8a_0=1\\ 24a_1=3\end{matrix}\right|\ a_1=\frac{1}{8},\ a_0=\frac{1}{32}$ Lösung in NEUEN Ansatz einsetzen:
$\boldsymbol{y_s=a_1x^3+a_0x^2=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{32}x^2}$
Allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y=C_1+C_2x+C_3\cdot e^{-4x}+\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{32}x^2}$

Systeme linearer Differentialgleichungen

Ein System von DGL hat die Form: $\begin{matrix}y_1'=f_1(x,y_1,\dots,y_n)\\ \vdots\\ y_n'=f_n(x,y_1,\dots,y_n)\end{matrix}$

Wir betrachten hier nur Systeme von expliziten linearen DGL 1. Ordnung, da ein System von DGL höherer Ordnung in ein entsprechendes System von DGL 1. Ordnung (mit einer grösseren Anzahl Gleichungen) übergeführt werden kann.

Ein lineares System von DGL 1. Ordnung hat die Form: $\begin{matrix}y_1'=a_{11}(x)y_1+\dots+a_{1n}(x)y_n+b_1(x)\\ \vdots\\ y_n'=a_{n1}(x)y_1+\dots+a_{nn}(x)y_n+b_n(x)\end{matrix}$

oder in Matrix-Vektor-Form $y'=A(x)y+b(x)$
DGL setzt sich wieder aus dem homogenen System und dem inhomogenen System zusammen

Lösung des homogenen Systems

Homogenes System ist ohne Störfunktion $b_n(x)$ und hat damit die Form $y'=Ay$
Definition:

- Die Lösungswege des homogenen Systems ist ein n-dimensionaler Vektorraum.
- Jede Linearkombination von Lösungen von $y'=Ay$ ist wieder eine Lösung von $y'=Ay$, d.h. sind y_1 und y_2 Lösungen von $y'=Ay$ und sind $C_1,C_2\in\mathbb{R}$, so ist $C_1y_1+C_2y_2$ auch eine Lösung von $y'=Ay$.
- Es gibt genau n linear unabhängige Lösungen $y_1,\dots,y_n$ von $y'=Ay$.

Da die Lösung im skalaren Fall durch $y=c\cdot e^{ax}$ gegeben ist, versuchen wir im vektoriellen Fall einen Ansatz der Form $y=c\cdot e^{\lambda x}=\begin{pmatrix}c_1\cdot e^{\lambda x}\\ \vdots\\ c_n\cdot e^{\lambda x}\end{pmatrix}$, wobei $\lambda\in\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{R}^n$ noch zu bestimmen sind.
Damit ist c ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
Die vektorwertige Funktion $y=c\cdot e^{\lambda x}$ ist genau dann eine L¨osung des homogenen Systems, wenn λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor c ist.

Beispiel: DGL-System $\begin{matrix}y_1'=2y_1-y_2\\ y_2'=-y_1+2y_2\end{matrix}$ daraus ergibt sich die Matrix A: $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren von A: $\lambda_1=1,\lambda_2=3$ $\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \ v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung homogen System: $y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{1x}+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{3x}=\begin{pmatrix}C_1e^x+C_2e^{3x}\\C_1e^x-C_2e^{3x}\end{pmatrix}$

Berechnung Eigenwert/-vektor mit Taschenrechner

Einmalige Anpassung Dokumenteneinstellung: Hauptmenu → 5 Einstellungen → 2 Dokumenteneinstellung → Reell oder Komplex: Kartesisch | oder direkt im Dokument: mit Maus auf Scratchpad klicken → 7 Einstellungen und Status → 2 Dokumenteneinstellungen Reell oder Komplex: Kartesisch

Erstellung Matrix mit TR: **menu → 7 Matrix und Vektoren → 1 Erstellen → 1 Matrix…**

Berechnung **Eigenwert** mit TR: **menu → 7 Matrix und Vektoren → B Erweitert → 4 Eigenwerte**

Berechnung **Eigenvektor** mit TR: **menu → 7 Matrix und Vektoren → B Erweitert → 5 Eigenvektoren**

Achtung: Eigenvektoren werden jeweils «speziell» vom TR zurückgegeben → Betrachtung der Vielfachheit der einzelnen Werte zu den anderen (linear abhängige Vektor) oder erhaltene Matrix mit $\sqrt{2}$ multiplizieren.

Beispiel: Eigenvektor zu Matrix: $m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, Eigenvektor gemäss TR: $\begin{bmatrix} 0.707107 & 0.707107 \\ -0.707107 & 0.707107 \end{bmatrix}$

Multiplikation mit $\sqrt{2}$ ergibt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ als Eigenvektor (Vektor darf mit jeder reellen Zahl multipliziert werden)

Trick geht aber nicht immer auf! Manchmal erhalten wir auch kleine Zahlen, bspw. $-8.20244E-15$ oder $2.88675E-16$. Diese geschehen durch Rundungen und können mit 0 ersetzt werden.

Ausgabe Lösung Taschenrechner: Reihenfolge der Eigenwerte ist gleich der Reihenfolge der Eigenvektoren geschrieben in der Matrixform, sprich der erste Eigenwert gehört zur ersten Spalte der Eigenvektormatrix!

Eigenwerte der Systemmatrix: Fallunterscheidung

Fallunterscheidung bzgl. Eigenwerten und Eigenvektoren:

i) **Alle Eigenwerte** von A sind **reell**, und A hat **n linear unabhängige Eigenvektoren**.
ii) Unter den **Eigenwerten** von A ist **mindestens ein Paar** von **konjugiert komplexen Eigenwerten**, und A hat **n linear unabhängige Eigenvektoren**.
iii) Es gibt **mehrfache Eigenwerte** von A, zu denen **nicht genügend** viele **linear unabhängige Eigenvektoren** vorhanden sind.

Vorgehen in den 3 Fällen:

i) Allgemeine reelle Lösung mit dem Ansatz $y = c \cdot e^{\lambda x}$ gefunden
ii) Allgemeine komplexe Lösung mit dem Ansatz $y = c \cdot e^{\lambda x}$ gefunden, wir müssen daraus noch reelle Lösungen konstruieren.
iii) Nicht alle Lösungen mit dem Ansatz $y = c \cdot e^{\lambda x}$ gefunden, müssen noch weitere reelle Lösungen finden.

Nur Reelle Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren

Beispiel: Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda = \{-1, 2, -2, 1\}$

Die Eigenvektoren von A sind: $v = \begin{pmatrix} -0.57735 & 2.88675E-16 & -0.707107 & -0.57735 \\ -0.57735 & 0.707107 & -8.20244E-15 & -6.48004E-15 \\ 0 & 0 & 0.707107 & -0.57735 \\ -0.57735 & 0.707107 & -6.78823E-15 & -0.57735 \end{pmatrix}$

Umformung der Eigenvektoren zu: $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems der Reihenfolge nach aufsteigend sortiert:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_4 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (C_k \in \mathbb{R})$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 0.4472 & -0.4472 \\ 0.8944 & 0.8944 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems: $C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} \\ y_2 &= 2C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-x} \end{aligned}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 1 & -0.948683 \\ 0 & 0.316228 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems: $C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{3x} \\ 0 + C_2 e^{3x} \end{pmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{3x} \\ y_2 &= C_2 e^{3x} \end{aligned}$

Lösen des **Anfangswertproblems** mit Anfangswert: $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$ ergibt das Gleichungssystem:

$\left| \begin{matrix} C_1 - 3C_2 & = 0 \\ C_2 & = 1 \end{matrix} \right|$ und damit die Lösungen $C_1 = 3$ und $C_2 = 1$ und damit Lösung AWP: $\begin{aligned} y_1 &= 3e^{2x} - e^{3x} \\ y_2 &= e^{3x} \end{aligned}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 2$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems: $C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2x} \\ C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} \\ y_2 &= C_2 e^{2x} \end{aligned}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2, & y_1(0) &= -1 \\ y_2' &= -2y_1, & y_2(0) &= 2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 0.447 & 0.707 \\ 0.894 & -0.707 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems: $C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \\ 2C_1 e^{-x} - C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \\ y_2 &= 2C_1 e^{-x} - C_2 e^{2x} \end{aligned}$

Lösen des **Anfangswertproblems** mit Anfangswert: $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $y_1(0) = -1$ und $y_2(0) = 2$ in Allgemeine Lösung ergibt das GS:

$\left| \begin{matrix} C_1 + C_2 & = -1 \\ 2C_1 - C_2 & = 2 \end{matrix} \right|$ und damit die Lösungen $C_1 = \frac{1}{3}$ und $C_2 = -\frac{4}{3}$ → Lösung des AWP: $\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{4}{3} e^{2x} \\ y_2 &= \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{4}{3} e^{2x} \end{aligned}$

Nur Reelle Eigenwerte und zu wenige linear unabhängige Eigenvektoren

Ist λ ein k-facher ($k \geq 1$) reeller Eigenwert von A, so gibt es Polynome $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{k-1}(x)$, sodass die Funktionen: $y_1(x) = p_0(x)e^{\lambda x}$, $y_2(x) = p_1(x)e^{\lambda x}$, …, $y_k(x) = p_{k-1}(x)e^{\lambda x}$ k linear unabhängige Lösungen. Das Polynom $p_0(x)$ ist dabei gerade der Eigenvektor. Um $p_1(x)$ zu finden, macht man im Allgemeinen den Ansatz: $p_1(x) = x \cdot v + v_1$ wobei v der bereits bekannte Eigenvektor ist und v_1 ein sog. Verallgemeinerter Eigenvektor, d.h. eine Lösung der Gleichung: $(A - \lambda E_2)v_1 = v$

$E_2 =$ Einheitsmatrix (Alle Elemente auf der Hauptdiagonalen haben eine 1, Rest ist 0): $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die allgemeine Lösung des Systems: $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = -1$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 0.4472 & 0.4472 \\ 0.8944 & 0.8944 \end{pmatrix}$

System hat einen doppelten Eigenwert mit einem einzigen linear unabhängigen Eigenvektor!

$(A - \lambda E_2)v_1 = v \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine mögliche Lösung

Dies ergibt dann, wenn man einsetzt: $p_1(x) = x \cdot v + v_1 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ 2x + 1 \end{pmatrix}$

$$y = y_1(x) + y_2(x) = p_0(x)e^{\lambda x} + p_1(x)e^{\lambda x} = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} x + 1 \\ 2x + 1 \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} C_1 + x \cdot C_2 + C_2 \\ 2C_1 + 2x \cdot C_2 + C_2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des Systems somit: $e^{-x} \begin{pmatrix} C_1 + x \cdot C_2 + C_2 \\ 2C_1 + 2x \cdot C_2 + C_2 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die allgemeine Lösung des Systems: $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 \end{aligned}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 0.8944 & -0.8944 \\ 0.4472 & -0.4472 \end{pmatrix}$

System hat einen doppelten Eigenwert mit einem einzigen linear unabhängigen Eigenvektor!

$$(A - \lambda E_2)v_1 = v \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt dann, wenn man einsetzt: $p_1(x) = x \cdot v + v_1 = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ x \end{pmatrix}$

$$y = y_1(x) + y_2(x) = p_0(x)e^{\lambda x} + p_1(x)e^{\lambda x} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2C_1 + C_2(2x - 1) \\ C_1 + x \cdot C_2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des Systems somit: $\begin{aligned} y_1 &= e^x(2C_1 + 2x \cdot C_2 - C_2) \\ y_2 &= e^x(C_1 + x \cdot C_2) \end{aligned}$

Wir bestimmen die allgemeine Lösung des Systems: $\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$ gemäss TR: $\lambda = \{1 \pm 3.94415E - 8i, 2\}$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

System hat einen doppelten Eigenwert mit einem einzigen linear unabhängigen Eigenvektor!

$$(A - \lambda E_3)v_1 = v \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow\Leftrightarrow$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist eine mögliche Lösung

Dies ergibt dann, wenn man einsetzt: $p_1(x) = x \cdot v + v_1 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$

$$y = y_1(x) + y_2(x) = p_0(x)e^{\lambda x} + p_1(x)e^{\lambda x} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} x \\ x \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Allgemeine Lösung des Systems somit: $\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + x \cdot C_2 e^x \\ y_2 &= C_1 e^x + x \cdot C_2 e^x + C_3 e^{2x} \\ y_3 &= -C_2 e^x + C_3 e^{2x} \end{aligned}$

Komplexe Eigenwerte

Ist $\lambda = \mu + \nu i$ ein einfacher echt komplexer Eigenwert (d.h. $\nu \neq 0$) von A und $c = a + bi$ ein zugehöriger Eigenvektor der Systemmatrix A, so ergeben sich aus der komplexen Lösung $y(x) = c \cdot e^{\lambda x} = (a + bi) \cdot e^{(\mu + \nu i)x}$ zwei linear unabhängige reelle Lösungen von $y' = Ay$ durch Trennung in Real- und Imaginärteil: $z_1(x) = e^{\mu x}(c \cdot \cos(\nu x) + c \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(\nu x))$

$z_2(x) = e^{\mu x}(c \cdot \cos(\nu x) + c \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(\nu x))$

Anschliessende Vektoraufteilung in Real- und Imaginärteil

Nachdem man dieses Prozedere für $\lambda = \mu + \nu i$ durchgeführt hat, ist es nicht nötig, dasselbe für $\lambda = \mu - i\nu$ nochmals zu tun; dies würde dieselben reellen Lösungen liefern.

Reminder zur linearen Algebra vom Schweinsgalopp-Udo betreffend der komplexen Zahl $\boldsymbol{i}$:

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i \cdot (-1i) = 1$

Beispiel: Wir bestimmen die allgemeine Lösung des Systems $y' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Komplexe (Fundamental-)Lösung des Systems zu $\lambda_1 = 1 + 2i$

$$y(x) = e^{(1+2i)x} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^x \cdot e^{2i} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2i \cdot e^{2i} \\ 1 \cdot e^{2ix} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2i \cdot \cos(2x) + 2i \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(2x) \\ 1 \cdot \cos(2x) + 1 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(2x) \end{pmatrix}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 2i \cdot \cos(2x) + 2i^2 \cdot \sin(2x) \\ \cos(2x) + i \cdot \sin(2x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2i \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \sin(2x) \\ \cos(2x) + i \cdot \sin(2x) \end{pmatrix}$$ nun sortieren nach Real- und

Imaginärteil: $= e^x \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(2x) + 2\boldsymbol{i} \cdot \cos(2x) \\ \cos(2x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(2x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + e^x \cdot \boldsymbol{i} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$

Nun ergibt sich die allgemeine reelle Lösung des Systems wie folgt:

$$y(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -2C_1 \cdot \sin(2x) + 2C_2 \cdot \cos(2x) \\ C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x) \end{pmatrix}$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\begin{matrix} y_1' = -2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 4y_2 \end{matrix}$ $y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} y$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 1i = 1 \pm i$

Die Eigenvektoren sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \mp i \\ -5 \end{pmatrix}$ TR: $v = \begin{pmatrix} -0.507 + 0.169i & -0.507 - 0.169i \\ 0.845 & 0.845 \end{pmatrix}$

$$y(x) = e^{(1+i)x} \cdot \begin{pmatrix} 3 - i \\ -5 \end{pmatrix} = e^x \cdot e^{ix} \cdot \begin{pmatrix} 3 - i \\ -5 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} (3 - i) \cdot e^{ix} \\ -5 \cdot e^{ix} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} (3 - i) \cdot (\cos(1x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(1x)) \\ -5 \cdot \cos(1x) - 5 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(1x) \end{pmatrix}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} (3 \cdot \cos(x) + 3\boldsymbol{i} \cdot \sin(x)) + (-i \cdot \cos(x) - i \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(x)) \\ -5 \cdot \cos(x) - 5 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(x) \end{pmatrix}, \qquad i \cdot (-1i) = 1$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(x) + 3\boldsymbol{i} \cdot \sin(x) + -i \cdot \cos(x) + \sin(x)) \\ -5 \cdot \cos(x) - 5 \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(x) \end{pmatrix}$$ nun sortieren nach Real- und Imaginärteil: =

$$e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(x) + \sin(x)) \\ -5 \cdot \cos(x) \end{pmatrix} + e^x \cdot \boldsymbol{i} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin(x) - \cos(x) \\ -5 \cdot \sin(x) \end{pmatrix}$$

Nun ergibt sich die allgemeine reelle Lösung des Systems wie folgt:

$$y(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(x) + \sin(x)) \\ -5 \cdot \cos(x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin(x) - \cos(x) \\ -5 \cdot \sin(x) \end{pmatrix}$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung des DGL: $\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 1i = 1 \pm i,$ $\quad \lambda_3 = -2$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \pm i \\ \pm i \end{pmatrix},$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$y(x) = e^{(1+i)x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \\ i \end{pmatrix} = e^x \cdot e^{ix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \\ i \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{ix} \\ (1 + i) \cdot e^{ix} \\ i \cdot e^{ix} \end{pmatrix} =$$

$$e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot (\cos(1x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(1x)) \\ (1 + i) \cdot (\cos(1x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(1x)) \\ i \cdot (\cos(1x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(1x)) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(x) + 2\boldsymbol{i} \cdot \sin(x) \\ (1 \cdot \cos(x) + 1\boldsymbol{i} \cdot \sin(x)) + (i \cdot \cos(x) + i \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(x)) \\ i \cdot \cos(x) + i \cdot \boldsymbol{i} \cdot \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(x) + 2\boldsymbol{i} \cdot \sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) + \boldsymbol{i} \cdot \sin(x) + i \cdot \cos(x) \\ -\sin(x) + i \cdot \cos(x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} = e^x \cdot \boldsymbol{i} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

Nun ergibt sich die allgemeine reelle Lösung des Systems wie folgt:

$$y(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + C_3 e^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung des inhomogenen Systems

Methoden, um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu finden:

i) Elimination einer Variablen bzw. Zurückführen auf eine skalare DGL 2. Ordnung
ii) Wahl eines Ansatzes für y_s vom Typ der Störfunktion
iii) Verwendung von Matrix-Exponentialen/Variation der Konstanten/Entkopplung

Vor- und Nachteile:

i) Erfordert wenig Theorie, viel Rechnen
ii) Wahl eines Ansatzes für y_s vom Typ der Störfunktion: geeignet für einfache Störfunktionen
iii) Verwendung von Matrix-Exponentialen/Variation der Konstanten/Entkopplung: erfordert viel Theorie, Rechnung nur einfach, falls die Berechnung des Matrix-Exponentials einfach ist

---

Wahl eines Ansatzes vom Typ der Störfunktion

Anfangswertproblem: $\begin{matrix} y_1' = 2y_1 - y_2 + 3e^{-x}, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - e^{-x}, & y_2(0) = 0 \end{matrix}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gemäss TR: $v = \begin{pmatrix} 0.707107 & 0.707107 \\ 0.707107 & -0.707107 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung x_h des Systems: $y_h(t) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{3x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{3x} \end{pmatrix}$

Ansatz für y_s von der Form der Störfunktion $b(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$ also $y_s = a \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot e^{-x} \\ a_2 \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$

Ableitung bilden: $y_s' = -\boldsymbol{a} \cdot e^{-x}$ nun y_s und y_s' in das ursprüngliche System der DGL einsetzen:

und Kürzen von e^{-x}: $\begin{vmatrix} -a_1 = 2a_1 - a_2 + 3 \\ -a_2 = -a_1 + 2a_2 - 1 \end{vmatrix}$ $a_1 = -1$, $a_2 = 0$

Spezielle Lösung: $y_s(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung $y_h + y_s$ des inhomogenen Systems: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{3x} \end{pmatrix}$$

Anfangswertproblem: Hier Gleichungssystem gleich Null setzen und überall für x Null einsetzen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{3x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 - 1 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 = C_1 + C_2 - 1 \\ 0 = C_1 - C_2 \end{vmatrix} \qquad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

Lösung des AWP: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{3x} - e^{-x} \\ \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x} \end{pmatrix}$

Anfangswertproblem: $\begin{matrix} y_1' = -2y_1 - 2y_2 + e^x, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 5y_1 + 4y_2, & y_2(0) = 0 \end{matrix}$ ergibt $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 \mp i \\ -5 \end{pmatrix}$ Homogenes DGL wurde bereits weiter oben gelöst.

Allgemeine Lösung x_h des Systems: $y_h(t) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(x) + sin(x) \\ -5 \cdot \cos(x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -\cos(x) + 3 \cdot sin(x) \\ -5 \cdot \sin(x) \end{pmatrix}$

Ansatz für y_s von der Form der Störfunktion $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x$ also $y_s = a \cdot e^x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} a_1 \cdot e^x \\ a_2 \cdot e^x \end{pmatrix} = y_s'$

Einsetzen in das DGL-System und Kürzen von e^{-x}: $\begin{vmatrix} a_1 = -2a_1 - 2a_2 + 1 \\ a_2 = 5a_1 + 4a_2 \end{vmatrix}$ $a_1 = -3$, $a_2 = 5$

Spezielle Lösung: $y_s(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} -3e^x \\ 5e^x \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung $y_h + y_s$ des inhomogenen Systems:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(x) + sin(x) \\ -5 \cdot \cos(x) \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -\cos(x) + 3 \cdot sin(x) \\ -5 \cdot \sin(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3e^x \\ 5e^x \end{pmatrix}$$

$$y_1 = C_1 e^x (3 \cdot \cos(x) + sin(x)) + C_2 e^x (-\cos(x) + 3 \cdot sin(x)) - 3e^x$$

$$y_2 = -5C_1 e^x \cdot \cos(x) - 5C_2 e^x \cdot \sin(x) + 5e^x$$

➔ Siehe nächste Seite für AWP

Anfangswertproblem: Hier Gleichungssystem gleich Null setzen und überall für x Null einsetzen:

$$\binom{y_1}{y_2} = \begin{pmatrix} C_1e^x(3\cdot\cos(x)+\sin(x))+C_2e^x(-\cos(x)+3\cdot\sin(x))-3e^x \\ -5C_1e^x\cdot\cos(x)-5C_2e^x\cdot\sin(x)+5e^x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \binom{0}{0} = \begin{pmatrix} C_1e^x(3)+C_2e^x(-1)-3e^x \\ -5C_1e^x\cdot 1+5e^x \end{pmatrix} \Rightarrow \binom{0}{0} = \begin{pmatrix} 3C_1-C_2-3 \\ -5C_1+5 \end{pmatrix} \left|\begin{matrix} 0=3C_1-C_2-3 \\ 0=-5C_1+5 \end{matrix}\right|, \quad C_1=1, \quad C_2=0$$

Lösung des AWP: $\binom{y_1}{y_2} = \begin{pmatrix} e^x(3\cdot\cos(x)+\sin(x))-3e^x \\ -5e^x\cdot\cos(x)+5e^x \end{pmatrix}$

Anfangswertproblem: $\begin{matrix} y_1' = 2y_1-4y_2-1, & y_1(0)=0 \\ y_2' = y_1-3y_2, & y_2(0)=0 \end{matrix}$ ergibt $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$

Die Eigenvektoren von A sind: $v_1=\binom{4}{1}$, $v_2=\binom{1}{1}$ gemäss TR: $v=\begin{pmatrix} 0.970143 & 0.707107 \\ 0.242536 & 0.707107 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung x_h des Systems: $y_h(t)=C_1e^x\binom{4}{1}+C_2e^{-2x}\binom{1}{1}=\begin{pmatrix} 4C_1e^x+C_2e^{-2x} \\ C_1e^x+C_2e^{-2x} \end{pmatrix}$

Ansatz für y_s von der Form der Störfunktion $b(x)=\binom{-1}{0}$ also $y_s=a=\binom{a_1}{a_2}\binom{-1}{0}=\binom{-a_1}{0\cdot a_2}$, $y_s'=0$

Einsetzen in das DGL-System: $\left|\begin{matrix} 0=2a_1-4a_2-1 \\ 0=a_1-3a_2+0 \end{matrix}\right|$ $a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$ Spezielle Lösung: $y_s(x)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot 1$

Allgemeine Lösung y_h+y_s des inhomogenen Systems: $\binom{y_1}{y_2}=C_1e^x\binom{4}{1}+C_2e^{-2x}\binom{1}{1}+\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 4C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{3}{2} \\ C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Anfangswertproblem: Hier Gleichungssystem gleich Null setzen und überall für x Null einsetzen:

$$\binom{y_1}{y_2}=\begin{pmatrix} 4C_1+C_2+\frac{3}{2} \\ C_1+C_2+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\binom{0}{0} \Rightarrow \left|\begin{matrix} 0=4C_1+C_2+\frac{3}{2} \\ 0=C_1+C_2+\frac{1}{2} \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\begin{matrix} -\frac{3}{2}=4C_1+C_2 \\ -\frac{1}{2}=C_1+C_2 \end{matrix}\right| \qquad C_1=-\frac{1}{3}, \quad C_2=-\frac{1}{6}$$

Lösung des AWP: $\binom{y_1}{y_2}=\begin{pmatrix} 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e^x+\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot e^{-2x}+\frac{3}{2} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e^x+\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgaben aus Probeprüfung

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y}{x+y^2}\right)$

a) Berechnen des Gradienten von $f(x,y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,1)$

$f_x = \frac{x^2+2xy^2-y}{(x^2+y)(x+y^2)}$, $f_x(0,1) = -1$, $f_y = \frac{x-2yx^2-y^2}{(x^2+y)(x+y^2)}$, $f_y(0,1) = -1$

$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Geben Sie im Punkt $(x_1, y_1, z_1) = (e, 0,\ f(e,0))$ die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x,y)$ an. $(e = 2.718)$

Gleichung $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$

$f(x,y) = z = \ln\left(\frac{x^2+y}{x+y^2}\right)$, $f(e,0) = 1$

$f_x(e,0) = e^{-1}$, $f_y(e,0) = e^{-2}$

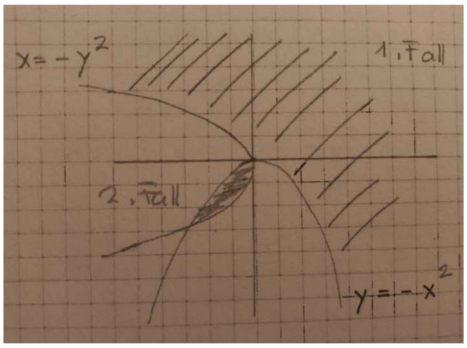
$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$

$= 1 + e^{-1} \cdot (x - e) + e^{-2} \cdot (y - 0) = e^{-1}x + e^{-2}y$

c) Für welche reellen Paare (x,y) ist $f(x,y)$ überhaupt definiert? Skizzieren Sie den Definitionsbereich der Funktion.

$\frac{x^2+y}{x+y^2} > 0$ muss gelten

1. Fall: $x^2 + y > 0$ und $x + y^2 > 0$, bzw. $y > -x^2$ und $x > -y^2$
2. Fall: $x^2 + y < 0$ und $x + y^2 < 0$, bzw. $y < -x^2$ und $x < -y^2$



Gegeben ist die folgende Differentialgleichung mit den konstanten Koeffizienten a und b:

$y'' + ay' + by = 10x$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b so, dass $y_h(x) = A \cdot e^{-2x} \cdot \cos(x) + B \cdot e^{-2x} \cdot \sin(x)$

Aus dem homogenen Part folgt, dass es sich um komplexe Eigenwerte handelt: $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

Deshalb gilt: $(\lambda - (-2+i))(\lambda - (-2-i)) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$

$y'' + 4y' + 5y = 10x$

Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ soll unter der Nebenbedingung $ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0$ optimiert werden. Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass im Punkt $(1,1)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte. Eine Abklärung der Extremstelle ist nicht notwendig.

$\nabla L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(ax^2 + bxy + 5y^2 - 16)$

Damit im Punkt $(1,1)$ eine möglich Extremstelle sein könnte, muss dieser Punkt eine Lösung des Gleichungssytems $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$ sein.

$L_x = 2x + 2\lambda ax + \lambda by$ nun Punkte $L_x = 2 + 2\lambda a + \lambda b$

$L_y = 2y + \lambda bx + 10\lambda y$ $(1,1)$ für x, y $L_y = 2 + \lambda b + 10\lambda$

$L_\lambda = ax^2 + bxy + 5y^2 - 16$ einsetzen $L_\lambda = a + b + 5 - 16 = a + b - 11$

$\begin{vmatrix} 2 + 2\lambda a + \lambda b = 0 \\ 2 + 10\lambda + \lambda b = 0 \\ a + b - 11 = 0 \end{vmatrix}$ $a = 5,$ $b = 6$

Modulauflagen

AN1 → 10 Seiten Zusammenfassung → nicht programmierbarer Taschenrechner
AN2 → 20 Seiten Zusammenfassung → nicht programmierbarer Taschenrechner
AN3 → Open-Book → Taschenrechner, welche Gleichungssysteme lösen, sind erlaubt (TR aus tech. BMS)

Sollte die Zusammenfassung Fehler enthalten, bin ich um eine entsprechende Mitteilung sehr dankbar.

Rechtlicher Disclaimer

- Für die Vollständigkeit und Korrektheit der vorliegenden Zusammenfassung werden weder Garantie noch Verantwortung übernommen.
- Das Anwenden der Zusammenfassung sowie der Analysis beruht auf eigene Gefahr. Sie kann zu spontanen sowie willkürlichen Wutausbrüchen, Unverständlichkeit, Angstzuständen, Panikattacken, Verachtung und Brech- sowie Würgreizen führen.
- Sämtlich verwendete Angaben stammen aus Unterlagen von diversen Dozenten der ZHAW, aus den magischen Tiefen des Internets oder von YouTube Videos. Hier einen besonderen Credit an die Unterlagen, Dokumentationen sowie besonders die Lernvideos von Christoph Zaugg!
- Wo der Dozent versagt, ist Daniel Jung gefragt! Hiermit einen weiteren respektzollenden Credit an Daniel Jung, aber auch an den Mathe Peter, die in jeder mathematischen Notsituation das passende Video in Petto haben! Ohne sie, hätten sich noch mehr Studenten der ZHAW bereits exmatrikulieren lassen…