Zusammenfassung 1. Semester LA1

Vektoren - X-Achse = Abszisse, Y-Achse = Ordinate

- Drei Vektoren heissen komplanar, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen.
- Der Nullvektor ist zu jedem Vektor orthogonal und kollinear.
- Wenn die Vektoren $\vec{v_1}\,\vec{v_2}$ kollinear sind, dann sind die beiden Vektoren $\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$ und $4\vec{v_1} + \vec{v_2}$ auch kollinear.

Skalarmultiplikation

Durch Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar λ entsteht ein neuer Vektor $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ mit Eigenschaften:

1. Der Betrag von $\vec{b}$ ist das |λ|-fache des Betrages von $\vec{a}$: $|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.
2. Der Vektor $\vec{b}$ ist parallel oder anti-parallel zu $\vec{a}$ orientiert:
   - $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, wenn λ > 0
   - $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, wenn λ < 0
   - $\vec{b} = \vec{0}$, wenn λ = 0

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear ⇔ Es existiert λ ∈ R, so dass $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht-kollinear ⇔ Es gibt kein λ ∈ R, so dass $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ Dreiecksungleichung: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Skalarprodukte $((\vec{a}, \vec{b}), < \vec{a} \mid \vec{b} >$ oder $\vec{a}^T\vec{b})$

Das Skalarprodukt $\vec{a}\,\vec{b}$ zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren kann nur verschwinden, wenn cos(ϕ) = 0, d.h. ϕ = 90° (oder π2) ist. In diesem Fall sind die Vektoren orthogonal.

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ kann aus dem Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{a}$ berechnet werden: $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

Normierung

Durch Normierung erhält man aus einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{a}$ einen Einheitsvektor gleicher Richtung und Orientierung. Er lautet wie folgt:

$\vec{a} = (2, -1, 2)$ $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + -1^2 + 2^2} = 3$ $\vec{e}_a = \frac{1}{3}\vec{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Orthogonale Projektion

Durch Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ entsteht der Vektor:

$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = (\vec{e}_a * \vec{b})\vec{e}_a \ \ wobei\ \ \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

$\vec{b} = (4, -1, 7)$ $\vec{a} = (3, 0, 4)$ $\vec{b} * \vec{a} = 12 - 0 + 28 = 40$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$ $\vec{b}_a = \frac{40}{25}(3, 0, 4) = (4.8, 0, 6.4)$

Vektor-/Kreuzprodukt/äusseres Produkt ($\vec{a} \wedge \vec{b}$ oder $[\vec{a}\,\vec{b}]$)

Das Vektorprodukt erzeugt **nur** in R^3 einen neuen Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Der Betrag des Vektorproduktes entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. $\vec{c}$ ist zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal $\vec{c} * \vec{a} = 0$ und $\vec{c} * \vec{b} = 0$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander parallel (ϕ = 0°) oder anti-parallel (ϕ = 180°), d.h. kollinear, wenn das Vektorprodukt verschwindet.

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.2.12. *Wir bestimmen den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des von den beiden Spaltenvektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *aufgespannten Parallelogramms.*

Zunächst wird das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 0 - (-5)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{A} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-15)^2 + 1^2 + 10^2} = \sqrt{326} \simeq 18,06.$$

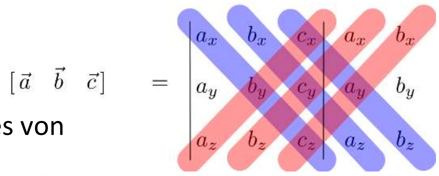
Der Vektor $\vec{a}$ vom Betrag 6 und der Vektor $\vec{b}$ vom Betrag 5 sind so, dass der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von 30° ist. Berechnen Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|$ → $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(ϕ) = 6 * 5 * \sin(30) = 15$

$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,sin(\varphi)$

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Spatprodukt



$a_xb_yc_z + a_zb_xc_y + a_yb_zc_x - a_zb_yc_x - a_xb_zc_y - a_yb_xc_z$

Das Spatprodukt besteht aus drei Vektoren in R^3.
Das Spatprodukt ist eine **skalare** Grösse und entspricht dem Volumen des von $[\vec a\,\vec b\,\vec c]$ aufgespannten Parallelepipeds/Spats.
Sind die Vektoren $\vec a$, $\vec b$ und $\vec c$ komplanar, dann lässt sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen, z.B.: $\vec a = r\vec b + s\vec c$ mit r, s ∈ R. Das Spatprodukt dieser 3 Vektoren verschwindet.

$$[\vec a\,\vec b\,\vec c] = \vec a * (\vec b \times \vec c)$$
$$[\vec a\,\vec b\,\vec c] = [\vec c\,\vec a\,\vec b] = [\vec b\,\vec c\,\vec a]$$
$$[\vec a\,\vec b\,\vec c] = -[\vec b\,\vec a\,\vec c] = -[\vec a\,\vec c\,\vec b] = -[\vec c\,\vec b\,\vec a]$$
$$[\vec a + \vec d\,\vec b\,\vec c] = [\vec a\,\vec b\,\vec c] + [\vec d\,\vec b\,\vec c]$$
$$\lambda[\vec a\,\vec b\,\vec c] = [\lambda\vec a\,\vec b\,\vec c] = [\vec a\,\lambda\vec b\,\vec c] = [\vec a\,\vec b\,\lambda\vec c]$$
$$[\vec a\,\vec a\,\vec c] = [\vec a\,\vec b\,\vec a] = [\vec a\,\vec c\,\vec c] = 0$$

$$\begin{aligned}[3\vec a + 2\vec b \quad -2\vec b - \vec c \quad -3\vec a + \vec c] &= 3[\vec a \quad -2\vec b - \vec c \quad -3\vec a + \vec c] + 2[\vec b \quad -2\vec b - \vec c \quad -3\vec a + \vec c] \\ &= -6[\vec a \quad \vec b \quad -3\vec a + \vec c] - 3[\vec a \quad \vec c \quad -3\vec a + \vec c] - 4[\vec b \quad \vec b \quad -3\vec a + \vec c] - 2[\vec b \quad \vec c \quad -3\vec a + \vec c] \\ &= 18[\vec a \quad \vec b \quad \vec a] - 6[\vec a \quad \vec b \quad \vec c] + 9[\vec a \quad \vec c \quad \vec a] - 3[\vec a \quad \vec c \quad \vec c] - 4\cdot 0 + 6[\vec b \quad \vec c \quad \vec a] - 2[\vec b \quad \vec c \quad \vec c] \\ &= 18\cdot 0 - 6[\vec a \quad \vec b \quad \vec c] + 9\cdot 0 - 3\cdot 0 + 6[\vec a \quad \vec b \quad \vec c] - 2\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\vec a + \vec b) \times (\vec a + 2\vec b) &= 2(\vec a \times \vec a) + 4(\vec a \times \vec b) + (\vec b \times \vec a) + 2(\vec b \times \vec b) \\ &= \vec 0 + 4(\vec a \times \vec b) - (\vec a \times \vec b) + \vec 0 = 3\,(\vec a \times \vec b), \\ (\vec a + 3\vec b) \times (3\vec a + \vec b) &= 3(\vec a \times \vec a) + (\vec a \times \vec b) + 9(\vec b \times \vec a) + 3(\vec b \times \vec b) \\ &= \vec 0 + (\vec a \times \vec b) - 9(\vec a \times \vec b) + \vec 0 = -8\,(\vec a \times \vec b).\end{aligned}$$

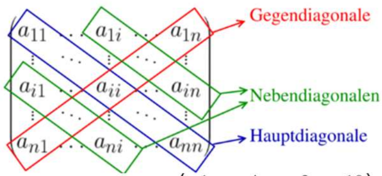
Kollinearität/Komplanarität

Eine Familie von Vektoren ist linear abhängig, wenn wenigstens einer von ihnen als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann.
Vektoren sind linear unabhängig, wenn keiner von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt.
Der Nullvektor ist linear abhängig, $\lambda\vec 0 = \vec 0$ Vektor $\vec a$ ist linear unabhängig, denn für alle $\vec a \neq \vec 0$
Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind.
Es gibt in $\mathbb{R}^n$ maximal n linear unabhängige Vektoren, mehr als n Vektoren sind immer linear abhängig.

$\vec a, \vec b, \vec c$ sind komplanar ⇔ $\vec a, \vec b, \vec c$ sind linear abhängig ⇔ das Spatprodukt $[\vec a \;\; \vec b \;\; \vec c] = 0$ ⇔ $\det(\vec a, \vec b, \vec c) = 0$

$\vec a, \vec b, \vec c$ sind nicht komplanar ⇔ $\vec a, \vec b, \vec c$ sind linear unabhängig ⇔ das Spatprodukt $[\vec a \;\; \vec b \;\; \vec c] \neq 0$ ⇔ $\det(\vec a, \vec b, \vec c) \neq 0$

Matrizen



Quadratische Matrix

Eine quadratische n × n Matrix, die oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält, heisst untere Dreiecksmatrix. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen null, so heisst sie obere Dreiecksmatrix. Bei einer symmetrischen Matrix sind die Elemente spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -10 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 8 & 5 \\ -10 & -1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix heisst Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle i ≠ j. Eine spezielle Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix/Identität. Die Diagonalmatrix ist Sonderfall der Dreiecksmatrix.
Besondere Matrix: Eine Matrix, bei der alle Elemente den Wert Null haben, bezeichnet man als Nullmatrix 0.

Multiplikation von Matrizen

Die Anzahl Spalten in A muss gleich der Anzahl Zeilen in B sein, damit die Multiplikation funktioniert.

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$
$$A * (B + C) = A * B + A * C$$
$$(\lambda * A) * B = \lambda * (A * B)$$

Beispiel 2.2.12. *Gegeben sei die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9+0 & -8-24-0 \\ -8-24-0 & 16+64+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -32 \\ -32 & 89 \end{pmatrix}$$

$$(A * B)^T = B^T * A^T$$
$$A * B \neq B * A$$

Inverse Matrix (umkehrbar oder regulär)

Eine **quadratische** Matrix heisst invertierbar, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie singulär.

➔ Die Inverse einer invertierbaren Matrix ist eindeutig bestimmt.

Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sind zueinander invers*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-2 \\ -3+3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{und } BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

➔ Die Inverse einer invertierbaren Matrix A ist invertierbar und es gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.
➔ Das Produkt AB zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar. Die Inverse zu AB lautet: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Transponieren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

- Ist A eine m× n Matrix, so ist ihre Transponierte AT eine n ×m Matrix.
- Durch 2-maliges Transponieren erhält man wieder die Ausgangsmatrix: $(A^T)^T = A$.
- Es gilt für eine symmetrische Matrix A stets: $A^T = A$.

Aus jeder beliebigen Matrix kann man eine symmetrische Matrix konstruieren:
Sei A eine beliebige m × n Matrix. Dann sind die Matrizen A^TA und AA^T symmetrische Matrizen, es gilt:
$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ und $(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$ Die Matrizen AA^T und A^TA sind symmetrisch.

Orthogonale Matrix

Eine n × n Matrix A heisst orthogonal, falls gilt:
$A^TA = AA^T = I_n$.
Damit ist die Inverse einer orthogonalen Matrix gleichzeitig ihre Transponierte.

Beispiel 2.2.13. *Die folgende Matrix* $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *ist orthogonal:*

$$A^TA = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^T \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2.$$

a) $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

b) $XA = B \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -8\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

c) $ABX = C \Leftrightarrow (AB)^{-1}ABX = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = B^{-1}A^{-1}C = \begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

d) $AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 7\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

$$AX = 2BX - C \Leftrightarrow AX - 2BX = -C \Leftrightarrow (A-2B)X = -C \Leftrightarrow X = -(A-2B)^{-1}C$$

$$BXA + 2AC = O \Leftrightarrow BXA = -2AC \Leftrightarrow X = -2B^{-1}ACA^{-1}$$

$$XB = 5A + 3X \Leftrightarrow XB - 3X = 5A \Leftrightarrow X(B - 3I_n) = 5A \Leftrightarrow X = 5A(B-3I_n)^{-1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A(I_n - B(AB)^{-1}A)B = AB - AB(AB)^{-1}AB = AB - AB = O,$$

$$(BA^{-1}(A+AB)B^{-1})(I_n+B)^{-1} = (BA^{-1}AB^{-1} + BA^{-1}ABB^{-1})(I_n+B)^{-1}$$
$$= (BB^{-1} + BBB^{-1})(I_n+B)^{-1} = (I_n+B)(I_n+B)^{-1} = I_n,$$

$$B^{-1} + ((AC)^{-1})^TC^TA^TB = B^{-1} + ((AC)^T)^{-1}(AC)^TB = B^{-1} + B$$

Lineare Gleichungssysteme

Besitzt ein lineares Gleichungssystem keine Lösung, so sagt man, es ist unlösbar (oder inkonsistent). Hat das System mindestens eine Lösung, so ist es lösbar (oder konsistent).
Sind die rechten Seiten des Gleichungssystems Null, so heisst das System homogen, andernfalls inhomogen.
Ein homogenes Gleichungssystem hat stets die Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Man nennt sie die triviale Lösung.
Zwei Gleichungssysteme sind äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Eine Matrix hat Zeilenstufenform, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Alle **Zeilen**, die nur Nullen enthalten, stehen in den untersten Zeilen der Matrix.
- Wenn eine **Zeile** nicht nur aus Nullen besteht, so ist die erste von Null verschiedene Zahl eine Eins. Sie wird als führende Eins der Zeile bezeichnet.
- In zwei aufeinanderfolgenden **Zeilen**, die nicht verschwindende Elemente besitzen, steht die führende Eins der unteren **Zeile** rechts von der führenden Eins der oberen Zeile.

Besitzt eine Matrix Zeilenstufenform und gilt noch zusätzlich:

- eine Spalte, die eine führende Eins enthält, hat keine weiteren von Null verschiedenen Einträge, dann hat die Matrix reduzierte Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Wir bestimmen die am weitesten Links stehende Spalte, die von Null verschiedene Werte enthält.
2. Ist die oberste Zahl der in Schritt 1 gefundenen Spalte eine Null, dann vertauschen wir die erste Zeile mit einer geeigneten anderen Zeile (1. Zeilenumformung).
3. Ist a das erste Element der in Schritt 1 gefundene Spalte, dann dividieren wir die erste Zeile durch a, um die führende Eins zu erzeugen. Man nennt das Element a das Pivotelement (2. Zeilenumformung).
4. Wir addieren passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen (3. Zeilenumformung).
5. Wir wenden die ersten vier Schritte auf den Teil der Matrix an, den wir durch Streichen der ersten Zeile erhalten, und wiederholen dieses Verfahren, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.
6. Mit der letzten nicht verschwindenden Zeile beginnend, addieren wir geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen (3. Zeilenumformung).

Parameterdarstellung

Bestimmen der Lösung des entsprechenden LGS in Parameterdarstellung. Hinweis: Verwende den Parameter λ für die erste freie Unbekannte und den Parameter µ für die zweite freie Unbekannte.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-9} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{array}\right)$$

$x_1 + (-4)x_2 + (-9)\cdot x_3 = 3$ $x_4 = 9$

Aufgelöst nach x_1: $x_1 = 3-(-4)\cdot\lambda --9\cdot\mu$

$x_2 = \lambda$ $x_3 = \mu$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Ein lineares Gleichungssystem hat genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen. Um den Rang einer Matrix A zu berechnen, bringt man A auf die Zeilenstufenform. Dann kann der Rang wie folgt bestimmt werden:

rang(A) = Anzahl der Nicht-Nullzeilen der Matrix in Zeilenstufenform
= Anzahl der führenden Einsen.

Der Index r ist gleich der Anzahl der führenden Variablen und entspricht dem Rang der Koeffizientenmatrix. Ist r < m, d.h. treten Nullzeilen in der Zeilenstufenform auf, dann müssen die b_k, k = r +1, ... ,m alle Null sein, damit das Gleichungssystem lösbar ist.

Wenn eine dieser rechten Seiten ungleich Null ist, enthält das Gleichungssystem unlösbare Gleichungen.

Für r = n: genau eine Lösung; **Für r < n: unendlich viele Lösungen**

Die Berechnung der Inversen einer Matrix

Inversen einer 2×2 Matrix

Die aus den Elementen von A berechnete Grösse ad − bc wird als 2-reihige Determinante/Determinante 2. Ordnung bezeichnet und durch das Symbol gekennzeichnet:

Die Matrix A ist für det(A) = ad − bc ≠ 0 invertierbar.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Berechnung der Inversen einer quadratischen Matrix

Lösen anhand des Gauss-Jordan Verfahren (siehe unten). Ist der Rang der Matrix A gleich n, dann lässt sich die Inverse A^{-1} direkt an der erweiterten Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform ablesen. Ist der *Rang kleiner als n, dann besitzt die Matrix keine Inverse.*

$$AA^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_n}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn dieses lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$ hat. Hat die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform nur führende Variablen (d.h. ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich n), dann hat das System genau eine Lösung. Dies bedeutet, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform freie Variablen (d.h. ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als n), dann hat das System unendlich viele Lösungen. Somit sind die Vektoren linear abhängig.

Die Variable λ_4 ist eine freie Variable. Das System hat unendlich viele Lösungen. Die Vektoren sind linear abhängig. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist 3, also kleiner als n = 4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Cramersche Regel

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ und } x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

Ist det(A) ≠ 0, dann ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.

Für die Determinante $\det(A_1)$ bzw. $\det(A_2)$ in den Zählern muss man also in der Koeffizientenmatrix die erste bzw. die zweite Spalte durch die rechte Seite des linearen Gleichungssystems ersetzen.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die Determinante det(A) = 3 * (−4) – 2 * 8 = −28 ≠ 0

Somit hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Nun berechnen wir die Determinanten: A_1 = 7·* (−4) − 0 * 8 = −28 A_2 = 3 * 0 − 2 * 7 = −14

$$\det(A) = \left|\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right| \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-28}{-28} = 1 \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-14}{-28} = \frac{1}{2}$$

Sind det(A), $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$ gleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Ist det(A) = 0, aber ist $\det(A_1)$ oder $\det(A_2)$ ungleich Null, so besitzt das lineare System keine Lösung.

Determinanten – Quadratische Matrizen!

Die Matrix A und ihre Transponierte A^T besitzen dieselbe Determinante.

Beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.

Besitzen die Elemente einer Zeile oder Spalte einer Determinante einen gemeinsamen Faktor, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden. Umgekehrt wird eine Determinante mit einem reellen Skalar multipliziert, indem man die Elemente einer Zeile/Spalte mit dieser multipliziert.

$$\lambda \det(A) = \lambda(ad-bc) = \lambda ad - \lambda cb = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$$

Sei A eine n × n Matrix und λ eine reelle Zahl, dann gilt: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda^2 \det(A)$$

Gegeben seien die 4 × 4 Matrizen A und B, so dass det(A) = −1 und det(B) = 2.

a) $\det(2A^TA)$

b) $\det(B^{-1}AB)$

c) $\det(-A^TB^5)$

d) $\det\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}A^3(A^{-1}B)^T\right)$

a) $\det(2A^TA) = 2^4\det(A^T)\det(A) = 16\det(A)\det(A) = 16(-1)(-1) = 16.$

b) $\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \frac{1}{\det(B)}\det(A)\det(B) = \det(A) = -1$

c) $\det(-A^TB^5) = (-1)^4\det(A^T)\det(B^5) = \det(A)(\det(B))^5 = (-1)\cdot 2^5 = -32.$

d) $\det\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}A^3(A^{-1}B)^T\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4(\det(A))^3\frac{1}{\det(A)}\det(B) = \frac{1}{4}(\det(A))^2\det(B) = \frac{1}{2}$

Eine Determinante besitzt den Wert Null, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingung erfüllt:

- Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.
- Zwei Zeilen oder Spalten stimmen überein.
- Eine Zeile oder Spalte ist als Linearkombination der übrigen Zeilen oder Spalten darstellbar.

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile bzw. Spalte eines beliebigen Vielfachen einer anderen Zeile bzw. Spalte elementweise addiert.

Für zwei n × n Matrizen A und B gilt stets det(AB) = det(A) * det(B), die Determinante eines Matrizenproduktes AB ist gleich dem Produkt der Determinanten. $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-2-20)(-2+12) = -22\cdot 10 = -220$

Sei A eine quadratische Matrix. Für eine Potenz A^k liefert dies das folgende Ergebnis: $\det(A^k) = (\det(A))^k$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

= 4 * 1 * 12 * (−3) = −144

Ist die Matrix A invertierbar, dann gilt: $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Berechnung von n-reihigen Determinanten

Durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält man eine (n − 1) × (n − 1) Matrix A_{ij}, welche eine Untermatrix von A ist. So geht die Untermatrix A_{12} aus A durch Streichen der 1. Zeile & 2. Spalte hervor:

Zu einer 3×3 Matrix gibt es insgesamt 9x 2-reihige Untermatrizen: A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32} und A_{33}.

Die Determinante det(A) lässt sich in der Form:

$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31})$ darstellen.

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$$

$$\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$$

Der Wert der Determinante ist **un**abhängig von der Entwicklungszeile oder -spalte.

Der Vorzeichenfaktor kann nach der Schachbrettregel bestimmt werden.

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

Laplacescher Entwicklungssatz

Entwicklung nach der i-ten Zeile:, i = 1, 2, n

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\,det(A_{ij}) = (-1)^{i+1}a_{i1}\,det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\,det(A_{i2}) + (-1)^{i+n}a_{in}\,det(A_{in})$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:, j = 1, 2, n

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\,det(A_{ij}) = (-1)^{1+j}a_{1j}\,det(A_{i1}) + (-1)^{2+j}a_{2j}\,det(A_{2j}) + (-1)^{n+j}a_{nj}\,det(A_{nj})$$

Der günstige Fall tritt genau dann ein, wenn alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf ein Element verschwinden. Dann führt die Entwicklung der Determinante nach dieser Zeile (bzw. Spalte) zu einer einzigen (n − 1)-reihigen Unterdeterminante anstatt von n Unterdeterminanten:

1. Alle Elemente einer Zeile/Spalte bis auf eines zu Null umformen.
2. Determinante nach dieser Zeile/Spalte entwickelt. Man erhält eine (n − 1)-reihige Unterdeterminante.
3. Das unter 1. und 2. beschriebene Verfahren wird nun auf die (n − 1)-reihige Unterdeterminante angewandt und führt zu einer einzigen (n− 2)-reihigen Unterdeterminante. Durch wiederholte Reduzierung gelangt man zu einer einzigen 2-reihigen Determinante, deren Wert dann berechnet werden kann.

$$\begin{vmatrix}-1&1&0&-2&0\\0&2&1&-1&4\\1&0&0&-3&1\\1&2&0&0&3\\0&-2&1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&0&-2&0\\0&4&0&-3&2\\1&0&0&-3&1\\1&2&0&0&3\\0&-2&1&2&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&1&-2&0\\0&4&-3&2\\1&0&-3&1\\1&2&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-2&0\\0&4&-3&2\\0&1&-5&1\\0&3&-2&3\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}4&-3&2\\1&-5&1\\3&-2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-3&2\\0&-5&1\\0&-2&3\end{vmatrix}$$
$$=-2\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\-2&3\end{vmatrix}=-2(-15+2)=26$$

Z. 2 – Z. 5 Z. 3 + Z. 1 , Z. 5. + Z. 1.

Es sei A = $(\vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \ \vec{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, und es gelte det(A) = 5.

a) $\det(\overrightarrow{-a_1} \ \ \overrightarrow{2a_2} \ \ \overrightarrow{3a_3})$

b) $\det(\vec{a}_3 \ \ \vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2)$

c) $\det(\overrightarrow{2a_1} \ \ \overrightarrow{-a_3} \ \ \vec{a}_2)$

d) $\det(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \ \ \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \ \ \vec{a}_3)$

e) $\det(\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \ \ \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \ \ 7\vec{a}_3)$

a) $\det(-\vec{a}_1 \quad 2\vec{a}_2 \quad 3\vec{a}_3) = (-1)\cdot 2\cdot 3\cdot \det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = -6\det(A) = -30.$

b) $\det(\vec{a}_3 \quad \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_2) = \det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \det(A) = 5.$

c) $\det(2\vec{a}_1 \quad -\vec{a}_3 \quad \vec{a}_2) = -2\det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_2) = 2\det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = 2\det(A) = 10.$

d) $\det(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \quad \vec{a}_3) = \det(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \det(A) = 5$

$\det(\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \quad 7\vec{a}_3) = 0$, denn 1. Spalte und 2. Spalte sind dieselben

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

det(A) ≠ 0 = invertierbar	det(A) = 0 = nicht invertierbar
Die Spalten/Zeilen von A sind linear unabhängig.	Die Spalten/Zeilen von A sind linear abhängig.
Der Rang von A ist gleich n: rang(A) = n.	Der Rang von A ist kleiner n: rang(A) < n.
Die Matrix A ist invertierbar.	Die Matrix A ist singulär, nicht invertierbar.
A$\vec{x}$ = $\vec{b}$ hat eine eindeutige Lösung: $\vec{x}$ = $A^{-1}\vec{b}$.	Das System A$\vec{x}$ = $\vec{b}$ hat keine eindeutige Lösung.

Hat man n Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$, so kann man deren lineare Unabhängigkeit dadurch prüfen, dass man diese n Vektoren zu einer n × n Matrix zusammenfasst und dann deren Determinante ausrechnet:
$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ⇔ det(A) ≠ 0 mit A = ($\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_n$)

Cramersche Regel

Ist A invertierbar, ist det(A) ≠0 und das System besitzt genau eine Lösung. Die Komponenten x_k des Lösungsvektors $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems lassen sich mit der Cramerschen Regel berechnen.

$$\begin{pmatrix}5&3&2&0\\-3&5&6&-5\\0&3&1&-1\\5&3&4&1\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \det(A)=\begin{vmatrix}5&3&2&0\\-3&5&6&-5\\0&3&1&-1\\5&3&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-3&2&2\\-3&-13&6&1\\0&0&1&0\\5&-9&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-3&2\\-3&-13&1\\5&-9&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&23&0\\-3&-13&1\\20&56&0\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}11&23\\20&56\end{vmatrix}=-(616-460)=-156$$

Man möchte vom folgenden Gleichungssystem nur die Lösung für die Variable x_2 haben:

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}5&4&2&0\\-3&1&6&-5\\0&0&1&-1\\5&0&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&4&2&2\\-3&1&6&1\\0&0&1&0\\5&0&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&4&2\\-3&1&1\\5&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&4&-3\\-3&1&4\\5&0&0\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}4&-3\\1&4\end{vmatrix}=5(16+3)=95$$

$$x_k=\frac{\det(A_k)}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&b_1&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&b_n&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1k}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nk}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}}$$

2. Spalte durch rechte Seite b ersetzen. det(A_2)/det(A) = 95/-156 ≅ -0.61

Die Cramersche Regel darf nur angewandt werden, wenn die Koeffizientenmatrix A regulär (oder invertierbar), d.h. det(A) ≠ 0 ist.

Analytische Geometrie - Geraden

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+\lambda v_x\\a_y+\lambda v_y\\a_z+\lambda v_z\end{pmatrix}$$

Eine Gerade kann eindeutig durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ gegeben sein. Durch den Punkt A und parallel zu einem Richtungsvektor $\vec{v}$ gibt es genau eine Gerade g. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

Da die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\vec{v}$ kollinear sind, existiert eine reelle Zahl λ so dass: $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}}$

Violette = Komponentenschreibweise. **Parameterdarstellung** = wie oben fett geschrieben

Für λ = 0 erhält man den Punkt A. Für λ > 0 alle Punkte in Richtung des Richtungsvektors $\vec{v}$ durchlaufen, für λ < 0 alle Punkte in der Gegenrichtung (vom Punkt A betrachtet). Die Darstellung ist nicht eindeutig: A kann auf der Geraden beliebig sein und die Länge/Orientierung von $\vec{v}$ sind ebenfalls beliebig.

Parameterdarstellung der Geraden g durch Punkt A = (1; 2; 4) mit Richtungsvektor $\vec{v}$ = (1,2,1). Liegen die Punkte Q1 = (0; 0; 3) und Q2 = (3; 6; 5) auf g?

Dabei müssen simultan alle drei Gleichungen erfüllt sein! Q1 stimmt überein, Q2 geht jedoch nicht auf!

$$P\in g \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda\\2+2\lambda\\4+\lambda\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\lambda&=&-1\\\lambda&=&-1\\\lambda&=&-1\\\lambda&=&2\\\lambda&=&2\\\lambda&=&1\end{matrix}$$

Normalenform und Komponentenschreibweise in der Ebene

Ein Normalenvektor einer Geraden g in der Ebene ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, der senkrecht zu dieser Geraden steht. Sei g eine Gerade, die durch den Punkt A = (a_x; a_y) und senkrecht zu dem Normalenvektor $\vec{n}$ = (n_x; n_y) verläuft. Die **Normalenform** dieser Geraden lautet: $g: \vec{n} * \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

oder in der **Komponentenschreibweise**: $g: \binom{n_x}{n_y} * \binom{x - a_x}{y - a_y} = 0$ $\quad g: \binom{3}{4} * \binom{x-4}{y-6} = 0$

Normalenform der Geraden g durch den Punkt A = (4; 6) mit Normalenvektor $\vec{n}$ = (3; 4) $\Longrightarrow$ ⇑

Gerade = Richtungsvektor $\vec{v}$ = (v_x; v_y) so sind die Vektoren ($-v_y$; v_x) und (v_y; $-v_x$) Normalenvektoren von g.

Wie lautet die Normalenform der Geraden g durch den Punkt A = (4; 6) und B = (1; 1)?

Lösung: Ein Richtungsvektor der Geraden lautet: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \binom{1-4}{1-6} = \binom{-3}{-5}$, Normalenvektor = $\vec{n} = \binom{5}{-3}$

Es folgt : $\binom{5}{-3} * \binom{x-4}{y-6} = 0$

Koordinatengleichung/-form in der Ebene → $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

Sind ein Punkt A und ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Geraden bekannt, dann lässt sich der Koeffizient c wie folgt berechnen: $c = -(a * a_x + b * a_y) = -\vec{n} * \overrightarrow{OA}\cdot$ wobei A = (a_x, a_y) und $\vec{n}$ = (a, b)

Gleichung für Gerade g durch Punkt A (4,6) und $\vec{n}$ (3, -1). Liegt P = (-1,-9) auf g?

g : 3x − y − (3 * 4 − 1 * 6) = 0 ⇔ 3x − y − 6 = 0. ⇒ 3 * (−1) − (−9) − 6 = 0. Korrekt, da Gleichung aufgeht!

Die Gleichung einer Geraden ist nicht eindeutig. Wir können die Gleichung mit einem Skalar multiplizieren.

Für die Beschreibung einer Geraden im Raum gibt es nur Parametergleichungen. Die allgemeine Koordinatengleichung: ax + by + cz + d = 0, a, b, c, d ∈ R beschreibt somit keine Gerade im Raum, sondern eine Ebene.

Von Koordinatengleichung zur Parametergleichung

g : 3x − 7y + 2 = 0. $\vec{n}$ = (3,-7), somit Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$ = (7,3)

Um einen Punkt A = (a_x, a_y) zu finden, setzten wir für a_x = 0 ein. 3 * 0 − 7a_y + 2 = 0 ⇔ 7a_y = 2 ⇔ a_y = 2/7

Das heisst, dass der Punkt A = (0; 2/7) die Gleichung der Geraden erfüllt. Wir haben einen Stützvektor gefunden und können eine Parameterdarstellung der Geraden schreiben: $g: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{v} = \binom{0}{2/7} + \lambda\binom{7}{3}$

Gegenseitige Lage von Geraden in der Ebene (können nur schneidend, parallel oder identisch sein)

Zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden sich genau dann, wenn die Richtungsvektoren ($\vec{v_1}$ & $\vec{v_2}$) oder die Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ & $\vec{n_2}$) nicht kollinear sind. Wenn die sich schneidenden Geraden mit der Parameterdarstellung: $g_1: \overrightarrow{OA_1} + \lambda\,\vec{v_1}$ und $g_2: \overrightarrow{OA_2} + \mu\,\vec{v_2}$ definiert sind, bestimmt man den Schnittpunkt S der Geraden aus der Vektorgleichung: $\overrightarrow{OA_1} + \lambda\,\vec{v_1} = \overrightarrow{OA_2} + \mu\,\vec{v_2} \;\Rightarrow\; g_1: \binom{2}{-3} + \lambda\binom{-1}{2}\; und\; g_2: \binom{-2}{2} + \mu\binom{5}{2}$

Wir bestimmen die gegenseitige Lage der Geraden. Sind die Geraden schneidend, dann berechnen wir den Schnittpunkt. Die Richtungsvektoren $\vec{v_1}$ & $\vec{v_2}$ sind nicht kollinear da es keine reelle Zahl k existiert $\vec{v_1} = k\vec{v_2}$

$\begin{cases} 2 - \lambda = -2 + 5\mu \\ -3 + 2\lambda = 2 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\mu + \lambda = 4 \\ -2\mu + 2\lambda = 5 \end{cases}$ Gleichung λ = 4 − 5μ eliminieren und in die 2. Gleichung einsetzen. −2μ + 2(4−5μ) = 5$\Leftrightarrow -12\mu = -3 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = 4 - 5\mu = \frac{11}{4}$

Der Ortsvektor des Schnittpunktes lautet: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA}_1 + \frac{11}{4}\vec{v}_1 = \overrightarrow{OA}_2 + \frac{1}{4}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. $Somit\!: S = \left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right)$

Geraden mit der Koordinatengleichung definiert ist → Schnittpunkt S aus dem Gleichungssystem bestimmen:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ g_1 : 2x + y − 1 = 0 und g_2 : 2x − 5y + 14 = 0.

$\vec{n_1} = (2{,}1)$ und $\vec{n_2} = (2, -5)$ sind nicht kollinear somit schneiden sich die g

$\begin{cases} 2x + y - 1 \quad = 0 \\ 2x - 5y + 14 = 0 \end{cases}$ 1. Gleichung y = 1 − 2x eliminieren und in die 2. Gleichung einsetzen

2x − 5(1 − 2x) + 14 = 0 ⇔ 12x = −9 ⇔ x = -9/12 = -3/4

Es folgt: y = 1 - 2x =1 + 2* (3/4) = 10/4 = 5/2 ⇔ Der Schnittpunkt S lautet: S = (-0.75, 5/2)

Schnittwinkel zweier Geraden ist gleich der Winkel zwischen den Richtungsvektoren (Normalenvektoren):

$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v_1} * \vec{v_2}}{|\vec{v_1}| * |\vec{v_2}|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} * \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| * |\vec{n_2}|}\right)$ Liefert arcos ein stumpfen Winkel θ, dann muss man ϕ = 180° − θ

$g_1: \overrightarrow{OA_1} + \lambda\,\vec{v_1} = \binom{0}{1} + \lambda\binom{1}{3} = g_2: 6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n_2} = \binom{6}{-2}\;\; \vec{v_2} = \binom{2}{6} \Rightarrow 2\binom{1}{3} = \binom{2}{6} \Rightarrow kollinear$

Die Geraden sind somit also parallel oder identisch. Wir prüfen, ob A_1 (0; 1) auf g_2 liegt:

6*0 − 2*1 + 1 ≠ 0 ⇒ $A_1 \notin g_2$ Da A_1 nicht auf g_2 liegt, sind die Geraden parallel.

Gegenseitige Lage von Geraden im Raum (können nur schneidend, windschief, parallel oder identisch sein)

Die Geraden mit nicht kollinearen Richtungsvektoren sind genau dann schneidend, wenn $[\overrightarrow{A_1A_2}\ \vec{v_1}\ \vec{v_2}] = 0$

$$g_1 : \overrightarrow{OA}_1 + \lambda\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad g_2 : \overrightarrow{OA}_2 + \mu\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad [\overrightarrow{A_1A_2}\quad \vec{v}_1\quad \vec{v}_2] = \left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right. = 2-4-1-2+1+4=0$$

Die Richtungsvektor sind nicht kollinear. Somit sind die Geraden entweder windschief oder schneidend, weshalb wir das Spatprodukt berechnen. Die Geraden sind schneidend da = 0

Ein Spurpunkt einer Geraden ist ein Punkt mit mindestens eine Koordinate gleich Null.

Ebenen Parameterdarstellung: Komponentenschreibweise:

$$E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}$$

$E: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{v} + \mu\,\vec{w}$

Die Lage des laufenden Punktes P auf der Ebene ist somit eindeutig durch λ und μ festgelegt.

Die Parameterdarstellung der Ebene ist nicht eindeutig. Der Punkt A kann in der Ebene beliebig gewählt werden. Andere Paare von Richtungsvektoren sind möglich, solange sie nicht kollinear/parallel zu der Ebene sind. Aber durch einen Punkt und parallel zu zwei nicht kollinearen Vektoren kann nur eine Ebene gegeben sein.

Normalenform und Koordinatengleichung

Den $\vec{n}$ Vektor erhält man durch das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. $\quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

Es gilt wie bei der Ebene wiederum $E: \vec{n} * \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

Komponentenschreibweise

$$E: \begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-a_x\\y-a_y\\z-a_z\end{pmatrix} = 0$$

Die Normalenform einer Ebene ist nicht eindeutig: Der Punkt A kann auf der Ebene beliebig gewählt werden und die Länge, sowie die Orientierung von $\vec{n}$ sind ebenfalls beliebig.

Koordinatengleichung/Koordinatenform – KG/KF – $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$

Jede Ebene E lässt sich durch eine KG beschreiben, bei der mindestens einer der Koeffizienten a,b,c ≠0 ist. Die Koeffizienten a, b, c sind wieder Komponenten eines Normalenvektors der Ebene. Sind ein Punkt A und ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene bekannt, dann lässt sich der Koeffizient d wie folgt berechnen:

$d = -(aa_x + ba_y + ca_z) = -\vec{n} * \overrightarrow{OA}\cdot$ wobei A = (a_x, a_y, a_z) und $\vec{n}$ = (a, b, c) → d = 0 Ebene durch Ursprung.

Von KG zu Parameterdarstellung: Bsp: E: x − 2y + 3z − 8 = 0.

1.) Punkt finden, der Gleichung erfüllt (Stützvektor). Punkt A = (0; −4; 0) liegt bspw. in der Ebene.

2.) Normalenvektor aus der Gleichung ablesen → $\vec{n} = (1, -2,3)$

3.) Richtungsvektor müssen orthogonal zu $\vec{n}$ sein → $\vec{n} * \vec{v} = 0$ und $\vec{n} * \vec{w} = 0$

4.) Zwei Komponenten der Vektoren festlegen und die dritte damit berechnen. Diese dürfen jedoch **nicht** kollinear sein!!! 0 und 1 einsetzen…

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} = v_x - 2v_y + 3v_z = 0 \quad und \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix} = w_x - 2w_y + 3w_z = 0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Gegenseitige Lage von Ebenen im Raum (schneidend, parallel, ident.)

Wenn $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ kollinear sind, sind die Ebene identisch oder parallel. Gemeinsame Schnittgerade = ident.

Dazu wir Gauss-Jordan angeschmissen: E1 : 5x + 2y + 3z = 0 und E2 : 10x + 7y − 12z − 45 = 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 2 & 3 & 0\\ 10 & 7 & -12 & 45\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -6 & 15\end{array}\right)$$

y = 15 + 6z = 15 + 6λ und x = −6 − 3z = −6 − 3λ. →

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6-3\lambda\\15+6\lambda\\\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\15\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\6\\1\end{pmatrix}$$

Abstände

Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene

$$D = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

Abstand D eines beliebigen Punktes P von der Geraden $g: \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{v}$

$$D = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} \qquad D = \frac{|\vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2}|}{|\vec{v}_1|}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Abstand D eines Punktes P = (x_0; y_0; z_0) von der Ebene E : ax+by+cz+d = 0

$$D = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden

$$D = \frac{\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\quad \vec{v}_1\quad \vec{v}_2]\right|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}$$

Weiss = Formel für paralleler Abstand

$$\frac{\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\quad \vec{v}\quad \vec{w}]\right|}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2t\\5-4t\\t\\6\end{pmatrix} \text{ mit } t\in\mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}3-2t\\5-4t\\t\\6\end{pmatrix}\middle|\ t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}3\\5\\0\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$$