Zusammenfassung 2. Semester LA2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	→	$\mathbb{N}^*_0$	→	$\mathbb{Z}$	→	$\mathbb{Q}$	→	$\mathbb{R}$	→	$\mathbb{C}$
{0, 1, 2, 3, ...}		{1, 2, 3, ...}		{... -2, -1, 0, 1, 2,...}		$\{\frac{p}{q} = p \in Z, q \in N*\}$		vollständige		komplexe

$3 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin$ Q $\in$ = enthalten, $\notin$ = nicht enthalten

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, da jedes Element von $\mathbb{Z}$ auch ein Element von $\mathbb{Q}$ ist.

1. Vektorräume

1.1 Begriffe und Definition

Ein reeller Vektorraum besteht aus einer nichtleeren Menge V von Elementen, die wir Vektoren nennen. Auf der Menge V gibt es die folgenden Vorschriften:

- Die Addition: Für alle Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in V ist der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ wieder in V.
- Die skalare Multiplikation: Für alle Vektoren $\vec{a} \in$ V und alle Skalare $\lambda \in$ R ist der Vektor $\lambda\vec{a}$ wieder in V.

Ferner sollen für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus V und alle Skalare λ, μ aus $\mathbb{R}$ folgende acht Rechengesetze gelten:

1. Kommutativität für die Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in$ V.
2. Assoziativität für die Addition: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in$ V.
3. Existenz des Neutralelements der Addition $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in$ V.
4. Entgegengesetztes Element: zu jedem $\vec{a} \in$ V gibt es ein ent.gesetztes. Element $-\vec{a} \in$ V → $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. Distributivität: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in$ V
6. Distributivität: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in$ V
7. Assoziativität für die Multiplikation: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in$ V
8. Die reelle Zahl 1 ist das Neutralelement der skalaren Multiplikation: $1 * \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in$ V.

1.2 Unterräume

1.2.1 Definition

Es sei V ein Vektorraum und U eine nichtleere Teilmenge von V. Ist U ein Vektorraum bezüglich der Addition und der skalaren Multiplikation in V, so ist U ein Unterraum (oder Untervektorraum) von V. Die Teilmenge$\{\vec{0}\}$, die nur das Neutralelement aus einem Vektorraum V enthält, heisst den Nullvektorraum und ist ein Unterraum von V.

Unterraumkriterium: V ist Vektorraum und U eine nichtleere Teilmenge von V. U ist ein Unterraum von V, wenn:

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in U, dann ist auch die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ in U.
2. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in$ U, dann ist auch $\lambda\vec{a}$ in U.

- Eine Ebene ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, wenn sie den Ursprung enthält.
- Eine durch den **Ursprung** verlaufende Gerade im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$.
- Das Neutralelement muss zu jedem Unterraum gehören.

Lösungsmengen $\mathcal{L}(A, b)$ von LGS $(A|b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ bzw. affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann Untervektorräume, wenn es sich um homogene LGS handelt (d.h. wenn b = 0 ist) bzw. wenn der Unterraum «durch Null geht».

Gegeben ist das homogene Gleichungssystem $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & |0 \\ 3 & 6 & |0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$

Die Lösungsmenge dieses Systems ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, da das System **linear und homogen** ist.

Lösungsmenge: x_2 = freie Variable λ $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \vec{x} = \lambda\binom{-2}{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Geometrisch beschreibt die Lösungsmenge U eine durch den Ursprung verlaufende Gerade im $\mathbb{R}^2$

Unterraum?

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Aus der erweiterten Koeffizientenmatrix folgt x = 0 und y = 0. Die Lösungsmenge enthält nur den Ursprung (0; 0). Die Lösungsmenge ist ein Unterraum. (Lösungsmenge = nur den Ursprung (0; 0))

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Die Variablen y und z sind frei. Die Lösungsmenge beschreibt eine Ebene, die durch den Ursprung läuft. Somit ist die Lösungsmenge ein Unterraum. LM → $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Die Variablen y und z sind frei. Die Lösungsmenge beschreibt eine Ebene, die durch den Ursprung läuft. Somit ist die Lösungsmenge ein Unterraum. LM → $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda - 5\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

U_2 ist kein Unterraum von R^2. Das kann man z.B. daran sehen, dass $\vec{0} \notin U_2$.

Ja, U_1 ist ein Unterraum von R^2. Wir überprüfen das Unterraumkriterium:

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ in U_1, d.h. $u_1 + u_2 = 0$ und $v_1 + v_2 = 0$. Dann gilt für $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$: $w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0 + 0 = 0$ $w_1 + w_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda \cdot 0 = 0$

1.2.2 Der Durchschnitt als Unterraum

Seien $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume eines Vektorraumes V, dann ist Durchschnitt $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ wieder ein Unterraum!

$$U_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y + z = 0 \right\} \quad und\ U_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x - 3y + z = 0 \right\}$$

Unterräume U_1 und U_2 sind eine durch den Ursprung verlaufende Ebene im $\mathbb{R}^3$. Der Durchschnitt $U = U_1 \cap U_2$ ist wieder ein Unterraum. Der Durchschnitt zweier schneidender Ebene ist eine Schnittgerade. Diese Schnittgerade bekommt man als Lösung des folgenden linearen homogenen Gleichungssystems: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{Lsgmenge: } U = U_1 \cap U_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

1.2.3 Die lineare Hülle als Unterraum

Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in$ des Vektorraums V heisst lineare Hülle der Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$. Notation $Lin(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugen die folgende lineare Hülle: $Lin(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$Lin(\vec{a}, \vec{b})$ beschreibt die vektorielle Parameterdarstellung einer Ebene, die durch den Ursprung und parallel zu den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verläuft. Somit ist $Lin(\vec{a}, \vec{b})$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$

1.3 Lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren

Sind die folgende Polynome linear abhängig?

$p_1(x) = 5,\ p_2(x) = 1 - 4x,\ p_3(x) = 3 + 8x,\ p_4(x) = x + 7x^2 \Rightarrow \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) = 0$

$5\lambda_1 + \lambda_2(1 - 4x) + \lambda_3(3 + 8x) + \lambda_4(x + 7x^2) = 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + (-4\lambda_2 + 8\lambda_3 + \lambda_4)x + 7x^2\lambda_4$

$$\begin{cases} 7\lambda_4 \\ -4\lambda_2 + 8\lambda_3 + \lambda_4 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$ Polynome sind **l. a**. aufgrund freien Variable

Sind die folgenden Matrizen linear abhängig?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Die Matrizen sind linear unabhängig da triviale Lösung

---

1.4 Basis und Dimension

Folgende Kriterien müssen für die Basis $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$ erfüllt sein:

- Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ kombinieren
- Linear unabhängige Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$

Eine Basis ist zwangsläufig ein Erzeugendensystem, ein Erzeugendensystem ist aber jedoch nicht unbedingt eine Basis. Je zwei Basen von einem Vektorraum V haben **gleich viele Elemente**. Die Basis eines Vektorraumes ist nicht eindeutig, d.h. es gibt verschiedene Basen in einem Vektorraum. Die Vektoren einer Basis sind linear unabhängig. Ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes kann linear abhängige oder unabhängige Vektoren enthalten.

Unterraum

U ist ein Unterraum des Vektorraumes V. Jedes Erzeugendensystem von U enthält eine Basis von U. Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem der xy-Ebene, denn jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$ der xy-Ebene lässt sich als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ darstellen. Das Erzeugendensystem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist aber keine Basis der xy-Ebene, da $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind → $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Wir streichen aus dem Erzeugendensystem den Vektor $\vec{c}$. Die verbliebenen Vektoren sind linear unabhängig und erzeugen noch die xy-Ebene. Somit bildet $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ eine Basis der xy-Ebene. *Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis von U. L.a. Vektoren streichen, bis keine mehr!*

1.4.1 Dimension

Die Anzahl der Vektoren einer **Basis** eines Vektorraumes V ist die Dimension des Vektorraumes. → dim(V)

Der Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$ hat die Dimension Null.

Die drei Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Somit ist $dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Die Matrix $\mathbb{R}^{2\times3}$ mit seiner Basis hat die $dim(\mathbb{R}^{2\times3}) = 6$

Die Polynome $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = (1 + x)^2, p_3(x) = (1 + x)^3, p_n(x) = (1 + x)^n$ bilden eines Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_n$. Somit $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$

dim(U) ist gleicher der Anzahl der führenden Einsen des linearen Gleichungssystems respektive der Rang der Matrix

Ausserdem zeigen die führenden Einsen die Vektoren, welche eine Basis von U bilden.

Bestimmen der Dimension und Basis der Unterräume von folgenden Vektoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ Vektoren sind l. abhgig, somit $dim(Lin(\vec{a},\vec{b})) = 1$ und $\vec{a}$ ist Basis des Unterraums $Lin(\vec{a},\vec{b})$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ Vektoren sind l. unabhängig, somit $dim(Lin(\vec{a},\vec{b})) = 2$ und $\vec{a},\vec{b}$ ist Basis Unterraums $Lin(\vec{a},\vec{b})$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a},\vec{b}$ sind **l. u.**, somit $dim(Lin(\vec{a},\vec{b},\vec{c})) = 2$ und $\vec{a},\vec{b}$ ist Basis Unterraums $Lin(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

$\vec{a} = (2, -1, 3)$ $\vec{a}$ ist **l. u.**, somit $dim(Lin(\vec{a})) = 1$ und $\vec{a}$ ist Basis Unterraums $Lin(\vec{a})$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix}$, ZSF Gauss $= \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 2 führende Einsen, $dim(Lin(\vec{a},\vec{b},\vec{c})) = 2$ und $\vec{a},\vec{b}$ ist Basis Unterraums $Lin(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Unterraum ✓ | Lösungsmenge →
Geometrisches Objekt = Ebene durch 0
Basis = Richtungsvektoren, somit dim = 2

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\lambda - 3\mu\\\lambda\\\mu\end{pmatrix} = \lambda\boxed{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}} + \mu\boxed{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Unterraum ✓ | Lösungsmenge der Matrix →
Geometrisches Objekt = Gerade durch 0/ y-Achse
Basis = Richtungsvektor, somit dim = 1

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\end{pmatrix} = \lambda\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \lambda e_y \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.5 Der Koordinatenvektor eines Vektors

Mit Hilfe der Basisvektoren lässt sich jeder Punkt eindeutig betreffend seiner Basis bestimmen.

Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Wie lautet der Koordinatenvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ → $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -4, \mu = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

Man beachte, dass die Koordinatenvektoren aus geordneten n-Tupeln bestehen. Hier spielt die Reihenfolge der Basisvektoren eine Rolle. Vertauscht man beispielsweise $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ in der obigen Linearkombination für $\vec{v}$, ändert sich der Koordinatenvektor (Werte werden ausgetauscht/umgekehrt!).

Der Koordinatenvektor $\overrightarrow{p_{\mathcal{B}}}$ von $p(x) = 1 + 4x + 3x^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ von $\mathbb{P}_2$ lautet:

LGS angefangen mit der höchsten Potenz aufstellen, ergibt die Lösung (Reihenfolge nach Basis!!!): $\overrightarrow{p_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$

2. Lineare Abbildungen

2.1 Begriffe und Definition

Lineare Abbildungen sind Beziehungen zwischen Vektorräumen. Zu einer Funktion gehören diese Eigenschaften:

- Ein Definitionsbereich D
- Ein Wertebereich W
- Eine eindeutige bestimmte Zuordnungsvorschrift

Der Definitionsbereich und der Wertebereich sind Vektorräume.

Seien V und W zwei reelle Vektorräume und $f: V \to W$ eine Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum W.

Die Abbildung f ist eine lineare Abbildung, falls für alle $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in$ V und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2})$ ii) $f(\lambda\overrightarrow{x_1}) = \lambda f(\overrightarrow{x_1})$

Das bedeutet, dass es keine Rolle spielt, ob man zuerst rechnet und dann abbildet oder andersherum.

Die Projektion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\vec{x} = (x, y, z) \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ist l. Abb., denn sie gilt für alle $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Für jede lineare Abbildung $f: V \to W$ gilt:

- $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$, für alle $\vec{x} \in$ V. Das Bild des entgegengesetzten Vektors $-\vec{x}$ zum Vektor $\vec{x}$ ist immer gleich dem entgegengesetzten Element zu dem Bild des Vektors $\vec{x}$.
- $f(\overrightarrow{0_v}) = \overrightarrow{0_w}$, der Nullvektor $\overrightarrow{0_v}$ in V wird immer in den Nullvektor $\overrightarrow{0_w}$ in W abgebildet.

Zwei Funktionen, deren Definitionsbereiche nicht identisch sind, können nicht addiert werden.

Abbildungs-/Darstellungsmatrix

Es ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ so zu bestimmen, dass die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ als Matrix präsentiert wird.

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_5 + x_3 \\ x_2 + 4x_4 - x_3 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$ und berechnen die Spaltenvektoren $\vec{a_j} = f(\vec{e_j})$ aus der obigen Vorschrift:

$$\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1-2\cdot0+0\\0+4\cdot0-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot0+0\\1+4\cdot0-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = f(\vec{e}_3) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot0+1\\0+4\cdot0-1\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_4 = f(\vec{e}_4) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot0+0\\0+4\cdot1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} \quad \vec{a}_5 = f(\vec{e}_5) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot1+0\\0+4\cdot0-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

Somit $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

So kann das Bild eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ durch f berechnet werden, indem das Produkt $A\vec{x}$ berechnet wird. z.B.:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\11\\2\end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}_2$ ist der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Und $\mathcal{B} = (1, 1+x, x+x^2)$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$. Die Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung $f: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ bezüglich dieser Basis sei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das Bild $f(p(x))$ des Polynoms $p(x) = 1 + 2x - 3x^2$ durch f. Zuerst bestimmen wir den Koordinatenvektor $k_{\mathcal{B}}(p(x))$. Es gilt: $k_{\mathcal{B}}(p(x)) = \begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix}$ (durch Einsetzen in Basis)

Nun Matrix A hier 3×3 mit dem Koordinatenvektor $k_{\mathcal{B}}$ multiplizieren. Dies ergibt $(-14, 34, -13)$

Dieser Vektor wird nun in die Basis eingesetzt und ergibt $-14 + 34 + 34x - 13x - 13x^2 = 20 + 21x - 13x^2$

$\mathbb{P}_2$ ist der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Und $\mathcal{B} = (p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2)$ Basis von $\mathbb{P}_2$.

Die Abbildung $f: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 \;\; p(x) \to f(p(x)) = xp'(x)$ ist ein lineare Abbildung. Wir berechnen die 3×3 Darstellungsmatrix A von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wir berechnen das Bild der Basispolynome und den Koordinatenvektor:

$f(p_0(x)) = x \cdot (1)' = x \cdot 0 = 0$

$f(p_1(x)) = x \cdot (x)' = x \cdot 1 = x$

$f(p_2(x)) = x \cdot (x^2)' = x \cdot 2x = 2x^2$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

ergibt die Darstellungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun das Bild des Polynoms $p(x) = 3 - 5x + 4x^2$ durch f:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(p(x)) = -5x + 8x^2$

2.2 Kern, Bild und Dimension

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung von V nach W. Dann heisst die Menge:

$Ker(f) = \{\vec{x} \in \mathrm{V} \mid \mathrm{f}(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathrm{W}\}$ den **Kern** von f. Alle Elemente aus der Defmeng, für die der Funktionswert $\vec{0}$ ist

Die Menge: $Im(f) = \{f(\vec{x}) \in \mathrm{W} \mid \vec{x} \in \mathrm{V}\}$ heisst das **Bild** von f. Beide Mengen enthalten den Nullvektor.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung von V nach W, dann gilt

$Ker(f)$ ist ein Unterraum von V

$Im(f)$ ist ein Unterraum von W

Gegeben sei die lineare Abbildung: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x-2y\\0\end{pmatrix}$$

Wir bestimmen für die lineare Abbildung den Kern, das Bild und jeweils ihre Dimension.

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x-2y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0$$

Der Kern der Abbildung ist somit die Lösung der linearen Gleichung: x − 2y = 0. Die Gleichung beschreibt eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft. Sprich, alle Punkte die auf der Gerade liegen, werden auf Null abgebildet. Ein Normalenvektor der Gerade ist $\vec{n} = (1, -2)$, was einen Richtungsvektor von $\vec{v} = (2, 1)$ ergibt.

$Ker(f) = Lin(\vec{v})$ und $dim(Ker(f)) = 1$

Das Bild jedes Vektors $\vec{x}$ ist ein Vektor, dessen 2. Komponente Null ist. Das Bild von f ist somit die x-Achse. Ein Richtungsvektor der x-Achse ist der Einheitsvektor $\vec{e_x}$. Man erhält: $Im(f) = Lin(\vec{e_x})$ und $dim(Im(f)) = 1$

Gegeben sei die lineare Abbildung: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Bestimmen von Abbildung den **Kern**, das **Bild** und jeweils ihre **Dimension**.

$$\vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Somit setzen wir $A\vec{x} = 0$ und schmeissen den Gauss an, wodurch wir die Lösungsmenge erhalten mit $x_3 = \lambda$ als freie Variable:

Dieser Vektor ist gleichzeitig der Richtungsvektor der Geraden $\vec{v} = (-1, \ -1/2, 1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad mit\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

$Ker(f)$ hat als Basis den Vektor $\vec{v}$ und ist eindimensional, also: $dim\big(Ker(f)\big) = 1$

$Im(f)$ ist gleich der Anzahl führenden Einsen respektive dem Rang der Matrix $dim\big(Im(f)\big) = 2$

Wir wollen $\boldsymbol{Ker(f)}$ und $\boldsymbol{Im(f)}$ bestimmen:

1. Wir bestimmen die Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung f.
2. Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ und verwenden das Gauss-Verfahren.
3. $Ker(f)$ und $Im(f)$ können wie folgt abgelesen werden:
   - $Ker(f)$ ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = 0$ und $dim\big(Ker(f)\big)$ = Anzahl der freien Variablen.
   - $dim\big(Im(f)\big)$ = rang(A) = Anzahl der führenden Variablen. Die führenden Einsen zeigen eine mögliche Auswahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren. Diese Spaltenvektoren bilden eine Basis von $Im(f)$.

$dim(V) = dim\big(Ker(f)\big) + dim\big(Im(f)\big)$ siehe Beispiel oben → $3 = 1 + 2$

Es seien $f: V \to W$ und $g: W \to Z$ lineare Abbildungen mit den Darstellungsmatrizen $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Dann ist die Komposition $g \circ f$ linear und wird durch BA dargestellt.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = x - y$

$g \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$A = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$B = (g(\vec{e}_1)\ g(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

$$\vec{x} \mapsto g \circ f(\vec{x}) = C\vec{x} = \mathbf{2x - 3y}$$

Aufgabe 7. Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gehören die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zum Ker(f)?

→ Um in Ker(f) zu sein, muss das Bild eines Vektors der Nullvektor sein:

→ Darstellungsmatrix mit Vektor einzel multiplizieren. Alle Zeilen müssen = 0 sein und sind somit der Nullvektor!

$$f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6-2 \\ 3+2 \\ 5+3-4 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \vec{a} \notin \mathrm{Ker}(f)$$

$$f(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6-4 \\ -3+4 \\ 4-3-8 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \notin \mathrm{Ker}(f)$$

$$f(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2-1 \\ -1+1 \\ 3-1-2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \vec{c} \in \mathrm{Ker}(f)$$

Gehören die Vektoren zu Im(f)?

- ➔ Vektor muss in Wertebereich sein, hier $\mathbb{R}^3$.
- ➔ LGS der Darstellungsmatrix mit eingesetztem Vektor muss lösbar sein!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

System ist lösbar somit Element von Im(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

System unlösbar, kein Element von Im(f)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

System unlösbar, kein Element von Im(f)

Basis des **Kerns** von f angeben und bestimmen der **Dimension** des **Kerns**.

Der Kern von f ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems Ax = 0. Der Gauss liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Variable z ist frei, d.h.: $z = \lambda$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt: $x = 3\lambda$ und $y = -\lambda$. Somit lautet die Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Es folgt: } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.$$

Geben Sie eine **Basis** des **Bilds** von f an und bestimmen Sie die **Dimension** des **Bilds**.

Die Dimension von Im(f) ist 2, da die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform 2 führenden Einsen hat.

Das Bild von f lässt sich also durch die zwei ersten Spaltenvektoren von A:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Die Berechnung der Inversen einer Matrix

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Die aus den Elementen von A berechnete Grösse ad − bc wird als 2-reihige Determinante/Determinante 2. Ordnung bezeichnet und durch das Symbol gekennzeichnet:

$[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}] = \left|\begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{matrix}$

Die Matrix A ist für det(A) = ad − bc ≠ 0 invertierbar.

Berechnung der Inversen einer quadratischen Matrix

Lösen anhand des Gauss-Jordan Verfahren (siehe unten). Ist der Rang der Matrix A gleich n, dann lässt sich die Inverse A^{-1} direkt an der erweiterten Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform ablesen. Ist der *Rang kleiner als n, dann besitzt die Matrix keine Inverse.*

$$AA^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Sei $dim(V) = dim(W) = n$ und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung mit der $n \times n$ Darstellungsmatrix A. Es gilt:

- f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_v}\}$ und $Im(f) = W$ $\Leftrightarrow rang(A) = n$
  $\Leftrightarrow$ **A ist invertierbar** $\Leftrightarrow \boldsymbol{det(A) \neq 0}$
- Ist die lineare Abbildung f **bijektiv**, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: W \to V$ linear und **bijektiv**. Die Darstellungsmatrix von f^{-1} ist A^{-1}, die Inverse zu A.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \end{pmatrix}$ → ergibt Darstellungsmatrix: $A = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die Darstellungsmatrix A von f und den Rang. Ist f **bijektiv**, dann gib die Umkehrabbildung f^{-1} an. Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig. Der Rang ist 2. Ferner ist die Dimension des Definitionsbereichs und des Wertebereichs jeweils gleich 2. Aus dem Satz folgt, dass f **bijektiv** ist und die Matrix A invertierbar ist.

Inverse von A: $A^{-1} = \frac{1}{0+2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Umkehrabbildung: $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{x} \mapsto f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ -x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

Für eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezeichne $[f]: \mathcal{E}_3,\ \mathcal{E}_2$ ihre Darstellungsmatrix. Kann f **injektiv** sein?

Wäre f injektiv, so wäre $Kern(f) = \{0\}$ und weiter $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{\dim(Kern(f))}_{=0} + \underbrace{\dim(Im(f))}_{\leq 2} \leq 2$ ✗

Somit kann f nicht injektiv sein!

2.4 Anwendung: geometrische Transformationen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n = 2,3$

2.4.1 Orthogonalprojektionen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Orthogonalprojektion des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf die x-Achse.

Diese Abbildung ist linear und die zugehörige Darstellungsmatrix lautet: $A = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Das Gleiche gilt für die y-Achse (die 1 steht dann jedoch unten rechts).

Bestimmen der Darstellungsmatrix nachfolgenden Operationen. Skizzieren das Bild des Punktes P(5; 5). Spiegelung an der Geraden −3x + y = 0, gefolgt von einer Orthogonalprojektion auf die y-Achse.

$A_g = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 - 2 \cdot 9 & -2 \cdot (-3) \cdot 1 \\ -2 \cdot (-3) \cdot 1 & 10 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OP'} = A_1 \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Orthogonalprojektion des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf die xy-Ebene

Die zugehörige Matrix lautet: $A = (f(\vec{e}_x)\ f(\vec{e}_y)\ f(\vec{e}_z)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dito für xz-Ebene und yz-Ebene!

Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$

Entweder mit bekannter Formel $\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$ oder mit $A_P = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a}\vec{a}^T$

Bestimmung der zugehörigen Darstellungsmatrix A_P indem wir die folgenden Bilder berechnen:

$$mit\ A_E = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix} \quad und\ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Spiegelung in der Ebene: (Darstellungsmatrix)

An der xy-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

An der xz-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.4.2 Spiegelungen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der **y**-Achse $= \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der **x**-Achse $= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der **x- und y**-Achsen $= \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung am Nullpunkt)

Die Spiegelung an einer Geraden in der Ebene durch Nullpunkt:
Die Koordinatengleichung der Geraden ist $g: ax + by = 0$. Ein Normalenvektor zu g ist dann $\vec{n} = (a, b)$. Die lineare Abbildung, die diese Spiegelung beschreibt, lautet:

$$\frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Streckungen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Streckung längs der **x**-Achse um Faktor k $= \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Streckung längs der **y**-Achse um Faktor k $= \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zentrische Streckung vom Nullpunkt aus um Faktor k $= \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

2.4.4 Scherungen (Bei Kombination von Scherrung und Streckung /Spiegelung ist es zweites Mal erstes!!!!)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Scherung längs der **x**-Achse um Faktor k $= \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Scherung längs der **y**-Achse um Faktor k $= \begin{pmatrix} x \\ y + kx \end{pmatrix}$ Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

2.4.5 Drehungen

Drehung in der Ebene

Bei einer Drehung in der Ebene gehe ein Punkt P(x; y) in den Punkt P'(x'; y') über. Seien $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP}'$ die Ortsvektoren dieser Punkte. Wir suchen eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP}' = f(\overrightarrow{OP}) = A_\varphi \overrightarrow{OP}$ welche einen Vektor $\overrightarrow{OP}$ um den Winkel ϕ in den Vektor $\overrightarrow{OP}'$ dreht. Wir berechnen die Drehmatrix:

$$A_\varphi = (f(\vec{e}_x)\ f(\vec{e}_y)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir drehen den Punkt P(3; 2) um den Winkel ϕ = 30◦. Die Drehmatrix lautet:

$$A_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Der gedrehte Ortsvektor ist $\overrightarrow{OP}'$:

$$\overrightarrow{OP'} = A_{30^\circ}\, \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} - 2 \\ 3 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante einer Drehmatrix ist immer gleich 1.
- Die Drehmatrix ist eine orthogonale Matrix
- $A_\varphi A_\varphi^T = I_2$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- Die Drehmatrix für den Winkel ϕ = 0◦ ist die Identität I_2
- Die Drehmatrix für den Winkel −ϕ lautet: A^T
- Die Komposition der Drehungen um die Winkel α und β ergibt die Drehung um den Winkel α + β
- Die Komposition der Drehung um den Winkel ϕ und −ϕ ergibt die Identität I_2

Drehung im Raum um die Koordinatenachsen

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{OP}' = f(\overrightarrow{OP}) = A_\varphi \overrightarrow{OP}$

Die Drehmatrix um die **x**-Achse lautet: $A_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Die Drehmatrix um die **y**-Achse lautet: $A_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Die Drehmatrix um die **z**-Achse lautet: $A_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.5 Basiswechsel

Aufgabe 18. Wir wählen in $\mathbb{R}^3$ zwei Basen $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ wie folgt:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Berechnen Sie die Basistransformationsmatrix $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ und den $\mathcal{C}$-Koordinatenvektor von $\vec{v}$, dessen Linearkombination in $\mathcal{B}$ lautet:

$$\vec{v} = 4\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 4\vec{b}_3$$

Koordinatenvektor nehmen!

$$k_\mathcal{C}(\vec{v}) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\ k_\mathcal{B}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet: $\vec{v} = 0\,\vec{c}_1 + 0\,\vec{c}_2 + 1\,\vec{c}_3 = \vec{c}_3$.

3. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

3.1 Problemstellung

$i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ Komplexe Zahl z hat Form: $z = a + bi \;\; mit\; a, b \in \mathbb{R}$

a ist Realteil und b der Imaginärteil von z $a = \mathcal{Re}(z)$ $b = \mathcal{Im}(z)$

Die Menge der komplexen Zahlen ist: $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **Potenz Modulo 4 rechnen**

3.2 Gauss'sche Zahlenebene – kartesische/algebraische Form oder Normalenform

Jeder komplexen Zahl : $z = a + bi$ wird der Punkt (a, b) in der Zahlenebene zugeordnet. Diese Ebene heisst Gauss'sche Zahlenebene. Die waagerechte Achse heisst reelle Achse und die senkrechte imaginäre Achse.
Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sie sowohl im Realteil als auch im Imaginärteil übereinstimmen.

Betrag der komplexen Zahl berechnet sich wie folgt: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3.3 Operationen

3.3.1 - Addition/Subtraktion – es gilt Kommutativ- und Assoziativgesetz

$\mathbb{C}$ werden wie Vektoren addiert: $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

3.3.2 - Multiplikation

$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \boldsymbol{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}$

Als Spezialfall der Multiplikation erhält man für $\lambda \in$ R und z = a + b i: $\lambda z = \lambda a + \lambda bi$

Bsp: $z_1 z_2 = (3 + i)(1 + 2i) = (3 * 1 - 1 * 2) + (3 * 2 + 1 * 1)i = 1 + 7i$

Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist wie in $\mathbb{R}$ nullteilerfrei, d.h.: $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \; oder \; z_2 = 0$

Es gelten: das Kommutativgesetz das Assoziativgesetz das Distributivgesetz

Jedes Element $z = a + bi \in \mathbb{C}^*$ hat ein inverses Element $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a - bi)$

3.3.3 - Konjugiert komplexe Zahl

Die Berechnung der Inversen z^{-1} einer komplexen Zahl z führt auf die konjugiert komplexe Zahl:
Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, dann ist $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert komplexe Zahl von z.

Die komplexen Zahlen z und $\bar{z}$ liegen symmetrisch bezüglich der reellen Achse. Es gilt: $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Es gilt $z * \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ und $|z| = \sqrt{z * \bar{z}}$

Die Berechnung der Inversen z^{-1} einer komplexen Zahl z ≠ 0 geschieht: $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a - bi) \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$

Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\bar{\bar{z}} = z$ $\mathcal{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathcal{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

3.3.4 - Division

Berechnung: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 {z_2}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{|z_2|^2} z_1 \overline{z_2}}$ $\frac{1}{-2+5i} = \frac{-2-5i}{|-2+5i|^2} = \frac{1}{29}(-2 - 5i)$

$\frac{4+i}{4-3i} = \frac{1}{|4-3i|^2}(4 + i)(4 + 3i) = \frac{1}{16+9}\big((16 - 3) + (4 * 3 + 1 * 4)i\big) = \frac{1}{25}(13 + 16i) = \frac{13}{25} + \frac{16}{25}i$

3.3.5 - Weitere Eigenschaften

Seien $z,\; z_1,\; z_2 \in \mathbb{C} \; und \; \lambda \in \mathbb{R} \; dann \; gelten$:

$|\lambda z| = |\lambda||z|$ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Für komplexe Zahlen gelten die binomischen Formeln ebenfalls!

3.4 Polarform – trigonometrische Form

Eindeutige Darstellung der komplexen Zahl mit ihrem Abstand $r = |z|$ vom Koordinatenursprung und den Winkel ϕ, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse einschliesst.

$z = a + bi = r \cdot cos(\phi) + r \cdot sin(\phi)i = r \cdot \big(cos(\phi) + i \cdot sin(\phi)\big)$

Die Winkelkoordinate ϕ heisst das Argument (Phase) von z. Man schreibt:$\phi = \arg(z)$. Ist $\phi \in [0^\circ, 360^\circ)$ (bzw. $[0, 2\pi)$), dann heisst ϕ den Hauptwert des Arguments. Für die Abstandkoordinate r gilt stets: r ≥ 0
Es ist zu beachten, dass der Winkel ϕ nicht eindeutig bestimmt ist
Die komplexe Zahl $z = 0$ stellt einen Sonderfall dar. Ist $r = |z| = 0$, das Argument $\phi = \arg(0)$ ist frei wählbar.
Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn $r_1 = r_2$ und $\phi_1 = \phi_2 + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

Die zu $z = r\big(\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)\big)$ konjugiert komplexe Zahl z lautet in der Polarform wie folgt:

$z = r\big(\cos(-\phi) + i \cdot \sin(-\phi)\big) = r\big(\cos(\phi) - i \cdot \sin(\phi)\big)$

Umrechnung: Polarform → Kartesische Form $\boldsymbol{a = r * cos(\varphi)}$ $\boldsymbol{b = r * sin(\varphi)}$

$z_1 = 2(cos(30°) + i \cdot sin(30°)) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = 4(cos(90°) + i \cdot sin(90°)) = 4(0 + 1i) = 4i$ $z_3 = \frac{3}{2}(cos(\pi) + i \cdot sin(\pi)) = \frac{3}{2}(-1 + 0i) = -\frac{3}{2}$

Umrechnung: Kartesische Form → Polarform $\boldsymbol{\varphi = arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = arccos\left(\frac{a}{r}\right)}$

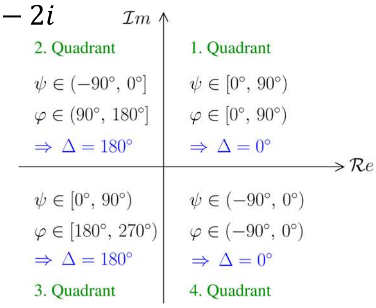
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $tan(\varphi) = \frac{b}{a}, für\ a \neq 0$

Wir bestimmen das Argument für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = -1 - 2i$

→ $tan(\varphi_1) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \varphi_1 = arctan(2) = 63{,}43°$ und $tan(\varphi_2) = \frac{-2}{-1} = 2$

$\varphi_2 = \varphi_1 + 180° = 243.43°$ da φ_2 im dritten Quadrant liegt!

$\boldsymbol{\varphi = arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta = \psi + \Delta}$



Die Werte für Δ ergeben sich für jeden einzelnen Quadranten:

Wir bringen $z = -1 + \sqrt{3}i$ in die Polarform: $r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

z liegt im 2. Quadrant: $\varphi = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \Delta = \arctan(-\sqrt{3}) + 180° = -60° + 180° = 120°$

Somit lautet die Polarform: $z = 2(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°))$

Wenn man den Hauptwert des Arguments einer komplexen Zahl sucht, die im 4. Quadranten liegt, dann muss man den Winkelwert ϕ mit Δ = 360◦ (bzw. Δ = 2π) korrigieren.

Für Zahlen, die auf der imaginären Achse liegen, ist Gleichung nicht anwendbar. Hier ergibt sich den Hauptwert von arg(z) unmittelbar aus der Lage von z in der Gauss'sche Zahlenebene.

3.4.3 Die Rechenoperationen in der Polarform

Addition und Subtraktion

Lassen sich **nur** in der kartesischen Form addieren/subtrahieren. Daher Zahlen vorher in kart Form. umrechnen.

Multiplikation und Division

$z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3.5 Die Eulersche Form einer komplexen Zahl

3.5.1 Die Eulersche Form

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$ $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Eulersche Form: $re^{i\varphi} = cos(\varphi) + sin(\varphi)$ für $\varphi = \pi$ erhält man die Formel $e^{i\pi} = -1$

Gegeben sei z = 1 + i. Die Eulersche Form von z: Wir berechnen zunächst: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$ → es folgt: $z = \sqrt{2}e^{i45°} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Gegeben sei $z = 8e^{-i45°}$. Wir bestimmen die kartesische Form von z.

Es gilt $r = |z| = 8$ und $\varphi = arg(z) = -45°$. Wir verwenden die Polarform von z:

$z = 8e^{-i45°} = 8(cos(-45°) + i \cdot sin(-45°)) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

Dies bedeutet $a = 4\sqrt{2}$ und $b = 4\sqrt{2}i$

3.5.2 Die Rechenoperationen in der Eulerschen Form

Addition und Subtraktion: können nur in der kartesischen Form durchgeführt werden. Umrechnung zuerst!

Multiplikation: $z_1 z_2 = r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$

3.6 Satz von de Moivre

Eine komplexe Zahl z wird nach dem Satz von de Moivre wie folgt potenziert:

- in der Eulerschen Form: $z^n = r^n e^{in\varphi}$ in der Polarform: $z^n = r^n(cos(n\varphi) + i * sin(n\varphi))$

Gegeben sei z = 1 – i. Wir bestimmen z^4. Zunächst bringen wir z in die Eulersche Form:

$r = \sqrt{2}$ $\varphi = arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45°$ $z = \sqrt{2}e^{-i45°}$

$z^4 = (\sqrt{2})^4 e^{-i4*45°} = 4e^{-i180°} = 4(cos(-180°) + i * sin(-180°)) = 4(-1 + 0i) = -4$

3.7 Wurzeln

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0, mit\ a_i \in \mathbb{C}, i = 0, \ldots, n$ besitzt in $\mathbb{C}$ stets genau n Wurzeln, wobei mehrfache Wurzeln entsprechend oft gezählt werden.
Wir bestimmen die reellen Lösungen von $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Longrightarrow Wurzel: x = 1$
Somit ist die Anzahl von reellen Wurzeln (=1) kleiner als der Grad der Gleichung (=3).
Bei komplexen Wurzeln gibt es genau n Wurzeln (komplex oder reell).
Die Zerlegung in Linearfaktoren wird als Produktdarstellung des Polynoms bezeichnet.
Bei ausschliesslich reellen Koeffizienten treten komplexe Wurzeln immer paarweise auf, als Paare zueinander konjugiert komplexer Zahlen. Mit z_1 ist daher $\overline{z_1}$ auch eine Wurzel der Gleichung.

Die Art der Wurzeln hängt dabei vom Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab: $az^2 + bz + c$

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Wurzeln: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D = 0$: eine doppelte reelle Wurzel: $z_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- $D < 0$: zwei konjugiert komplexe Wurzeln: $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{|D|}i = \overline{z_1}$ $\qquad z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{|D|}i = \overline{z_1}$

Wir bestimmen die Wurzeln der folgenden algebraischen Gleichung 3. Grades: $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$
Gleichung besitzt nach Fundamentalsatz genau 3 Wurzeln. Probieren ergibt reelle Wurzel bei $z_1 = 1$
Wir dividieren nun die linke Seite durch z − 1:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} & z^3 & - & z^2 & + & 4z & - 4 & z-1 \\ - & z^3 & - & z^2 & & & & \hline z^2+4 \\ \hline & & & 0 & + & 4z & - 4 & \\ & & & & - & 4z & - 4 & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

Somit: $(z-1)(z^2+4)$ Das Polynom $z^2 + 4$ besitzt die Wurzeln:
$z^2 + 4 = 0 \qquad z^2 = -4 \qquad z_2 = 2i$ und $z_3 = -2i = \overline{z_2}$
Die algebraische Gleichung 3. Grades besitzt somit eine reelle Wurzel und zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen: : $z_1 = 1 \quad z_2 = 2i$ und $z_3 = -2i$
Linearfaktoren $z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z-2i)(z+2i)$ oder auch Produktdarstellung des Polynoms genannt

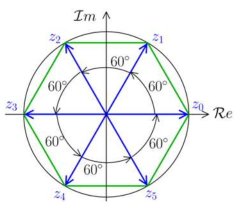
---

Eine komplexe Zahl z wird als n-te Wurzel aus a bezeichnet, wenn sie der algebraischen Gleichung $z^n = a$ genügt
$z^n = a = a_0 e^{i\alpha}$ mit $a_0 > 0$ $\quad z^n = a \ \Leftrightarrow \ \left(r\, e^{i\,\varphi}\right)^n = a_0\, e^{i\,\alpha} \ \Leftrightarrow \ r^n\, e^{i\,n\varphi} = a_0\, e^{i\,(\alpha + k\cdot 360^\circ)},\ k \in \mathbb{Z}$
Somit gilt: $r^n = a_0$ und $n\varphi = \alpha + k * 360°$
Alle Lösungen besitzen daher den gleichen Betrag: $r = \sqrt[n]{a_0}$
Ihre Argumente sind: $\varphi_k = \frac{\alpha + k*360°}{n}, k \in \mathbb{Z}$

Wir bestimmend die **Wurzeln der Gleichung** $z^6 = 1$ Die Gleichung hat genau 6 verschiedene Wurzeln:
$z^6 = 1 = 1 * e^{i0}$ $\ a_0 = 0$ und $\alpha = 0°$ $\quad \varphi_k = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n} = \dfrac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{6} = k\cdot 60^\circ, \qquad k = 0,\ldots,5$

$$k=0: z_0 = r\,e^{i\,\varphi_0} = 1\cdot e^{i\,0^\circ} = \cos(0^\circ) + i\,\sin(0^\circ) = 1 + 0\cdot i = 1$$
$$k=1: z_1 = r\,e^{i\,\varphi_1} = 1\cdot e^{i\,60^\circ} = \cos(60^\circ) + i\,\sin(60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$
$$k=2: z_2 = r\,e^{i\,\varphi_2} = 1\cdot e^{i\,120^\circ} = \cos(120^\circ) + i\,\sin(120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$
$$k=3: z_3 = r\,e^{i\,\varphi_3} = 1\cdot e^{i\,180^\circ} = \cos(180^\circ) + i\,\sin(180^\circ) = -1 + 0\cdot i = -1$$
$$k=4: z_4 = r\,e^{i\,\varphi_4} = 1\cdot e^{i\,240^\circ} = \cos(240^\circ) + i\,\sin(240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$
$$k=5: z_5 = r\,e^{i\,\varphi_5} = 1\cdot e^{i\,300^\circ} = \cos(300^\circ) + i\,\sin(300^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

Die Wurzeln z_0 und z_3 sind reell, während z_1 und z_5 bzw. z_2 und z_4 Paare zueinander konjugiert komplexer Wurzeln darstellen. Darstellung der Wurzeln in der Gaussschen Zahlenebene:



Wäre hier **r** anstelle von 1 bspw. 64 müsste davon die 6 Wurzel gezogen werden

---

Bestimmen der Wurzelgleichungen mit kartesischer Form: $z^2 = 3 + 4i \ \Longrightarrow \ (a + bi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow$
$a^2 + 2abi - b^2 = 3 + 4i \rightarrow \quad a^2 - b^2 = 3$ und $2ab = 4$ daraus folgt $a = \frac{2}{b}$ in die zweite Gleichung
$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} - b^2 = 3 \Leftrightarrow 4 - b^4 = 3b^2 \Leftrightarrow b^4 + 3b^2 - 4 = 0$ einsetzen in Mitternachtsformel
$b^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4*1*(-4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$ die Lösung -4 ist nicht möglich, da $\boldsymbol{b^2}$ stets positiv ist somit b = 1 oder -1
Wiederum einsetzten: b = 1, dann ist a = 2 und b = -1, dann a = -2 → die Wurzeln sind $z_1 = 2 + i \ \ z_2 = -2 - i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$ | $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = \sqrt{7}i$ | $\sqrt{-11} = \sqrt{11}\sqrt{-1} = \sqrt{11}i$ | $\sqrt{-8} = \sqrt{4}\sqrt{-2} = 2\sqrt{2}i$
$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$

4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein Vektorraum und f: V → V eine lineare Abbildung. Ein Skalar λ ∈ C heisst Eigenwert von f, falls es einen Vektor $\vec{x}$ ∈ V gibt mit: 1) $\vec{x} \neq 0$ und 2) $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$

Dabei heisst $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Hat der Vektorraum eine endliche Dimension, dim(V) = n, so kann jede lineare Abbildung f : V → V durch eine quadratische n×n Matrix A beschrieben werden. Lässt sich Matrizengleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ schreiben. Man nennt eine Lösung $\vec{x} \neq 0$ Eigenvektor und λ Eigenwert der Matrix A.

Betrachten nur lineare Abbildungen, wo Definitions- und Wertebereich gleich sind: f: V → V (Endomorphismus).

Ein Eigenwert hat unendlich viele zugehörige Eigenvektoren, während ein Eigenvektor immer nur zu einem Eigenwert gehören kann. **Nullvektor**, kann nach Definition **kein Eigenvektor** sein.

Der Eigenraum einer linearen Abbildung zu einem gegebenen Eigenwert ist ein Unterraum von V.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

$$(A-\lambda I_n)\vec{x}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit λ ein Eigenwert von A ist, muss dieses Gleichungssystem eine nicht triviale Lösung besitzen ($\vec{x} =$ Eigenvektor $\neq 0$)

Ein lineares Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{c}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $det(B) \neq 0$ ist.

Die Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ heisst charakteristische Gleichung von A; ihre Lösungen sind die Eigenwerte von A. Berechnet man $\det(A - \lambda I) = 0$, so ergibt sich ein Polynom p in λ, das als charakteristisches Polynom von A bezeichnet wird: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Die Eigenwerte der Matrix A werden aus der charakteristischen Gleichung berechnet. Sie sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p(λ).

Die Eigenvektoren sind die nicht trivialen Lösungen.

Wir berechnen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$

Die Eigenwerte sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)-6 = 2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-6 = \lambda^2-3\lambda-4 = (\lambda-4)(\lambda+1)$$

Eigenwerte lauten: $\boldsymbol{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1}$

Die Berechnung der Eigenvektoren geschieht mit der Gleichung: (zuerst für $\lambda_1 = 4$)

$$(A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 2 \\ 3 & 1-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Variable y ist frei, d.h.: y = α mit α ∈ ℝ. Es folgt: x = y = α. Somit hat das System unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge ist: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; mit\ \alpha \in \mathbb{R}$

Der **Eigenraum** zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ lautet: $\boxed{V_{\lambda_1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; mit\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$

Für $\lambda_2 = -1$: **freie Variablen!!!!**

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 2 \\ 3 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \; mit\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Die Variable y ist frei, d.h.: y = α mit α ∈ ℝ. Es folgt: $x = -\frac{2}{3}y = -\frac{2}{3}\alpha$. Somit hat das System unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge ist α (siehe oben rechts).

Der **Eigenraum** zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ lautet: $\boxed{V_{\lambda_2} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \; mit\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$

Dieser Unterraum beschreibt eine Gerade, deren Richtungsvektor α ist. Es folgt Lin(α resp $\overrightarrow{v_2}$) und dim(Vλ_2) = 1

Der Richtungsvektor und alle von Null verschiedenen Vielfachen sind Eigenvektoren zum λ_2

Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig, da sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören.

Sei λ ein Eigenwert der n × n Matrix A und V_λ der Eigenraum zum λ

- Die Dimension von V_λ wird **geometrische Vielfachheit** von λ genannt und **γ** geschrieben, also: $\boldsymbol{\gamma = \dim(V_\lambda)}$
- Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ wird **algebraische Vielfachheit** von λ genannt und μ geschrieben.
- Die geometrische Vielfachheit von λ ist stets min. 1 und höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit von λ

Die **Menge** der Eigenwerte einer n × n Matrix wird **Spektrum** genannt und σ(A) geschrieben: $\{\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_k}\}$

Als **Spektralradius**, ρ(A), bezeichnet man den **grössten |Betrag|** aller Eigenwerte.

Die **Anzahl** k der verschiedenen **Eigenwerte** ist stets mindestens 1 und höchstens n

Die **Summe** der **algebraischen Vielfachheit** ist gleich $n = \mu_1 + \dots + \mu_k$

Spur Matrix A ist **Summe** der Hauptdiagonalelemente $Spur(A) = a_{11} + \dots + a_{nn} = \mu_1\lambda_1 + \dots + \mu_k\lambda_k$

Die **Determinante** der Matrix A ist gleich dem **Produkt** $\boldsymbol{det(A)} = {\lambda_1}^{\mu_1} \cdot \dots \cdot {\lambda_k}^{\mu_k}$

4.4 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen 4.4.1 Eigenwerte einer Dreiecksmatrix

Die Eigenwerte einer oberen/unteren Dreiecks-/Diagonalmatrix sind die Elemente der Hauptdiagonalen der Matrix.

Die 4-reihige Diagonalmatrix B besitz die Eigenwerte: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \mu_1 = 1$ einfacher Eigenwert

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 2$ doppelter Eigenwert

$\lambda_3 = 2 \Rightarrow \mu_3 = 1$ einfacher Eigenwert

4.4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix

Die Eigenwerte und -vektoren einer n-reihigen reellen symmetrischen Matrix A besitzen folgenden Eigenschaften:

1. Alle Eigenwerte sind reell.
2. Für jeden Eigenwert λ gilt: $\gamma_\lambda = \mu_\lambda$. (d.h. geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit)
3. Eigenvektoren, die zu versch. Eigenwerten gehören, sind orthogonal (Skalarprodukt der Eigenvektoren ist 0)

Wir bestimmen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der reellen symmetrischen Matrix A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (2-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda)-4) = (2-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3) = -(\lambda-2)^2(\lambda+3) \end{aligned}$$

Somit $\lambda_1 = 2 \Rightarrow \mu_1 = 2 \quad \lambda_2 = -3 \Rightarrow \mu_2 = 1$ Eigenraum zu λ_1 $\gamma_1 = dim(V_{\lambda_1}) = 2 = \mu_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_{\lambda_1} = Lin\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Eigenraum zu λ_2 $\gamma_2 = dim(V_{\lambda_2}) = 1 = \mu_2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_{\lambda_2} = Lin\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Vektoren von verschiedenen Eigenwerte sind orthogonal:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2}) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1 + 1 + 0 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

4.5 Ähnlichkeit und Diagonalisierung

Seien A und B ähnliche n × n Matrizen. Dann gilt:

1. Determinante sind gleich: det(A) = det(B).
2. A ist dann invertierbar, wenn B invertierbar ist.
3. A und B haben das gleiche charakteristische Polynom.
4. A und B haben die gleichen Eigenwerte.

Diese Eigenschaften gelten für ähnliche Matrizen. Das heisst aber nicht, dass zwei Matrizen, die diese Eigenschaften haben, ähnlich sind. $AP = PB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Eine n × n Matrix A ist genau dann **diagonalisierbar**, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

- Es existiert eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = D$ genau dann, wenn die n Spaltenvektoren von P linear unabhängige Eigenvektoren von A sind. Die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A und von links oben nach rechts unten in gleichen Reihenfolge wie zugehörigen Spaltenvektoren v. P.
- Die n linear unabhängigen Eigenvektoren von A bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die auch Eigenvektorbasis genannt wird.

Eine n × n quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. A hat n linear unabhängigen Eigenvektoren
2. A hat n verschiedene Eigenwerte
3. Für jeden Eigenwert λ von A gilt: $\gamma_\lambda = \mu_\lambda$
4. A ist reell und symmetrisch

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\sigma(A) = \{i, -i\}$, $\rho(A) = 1$, Spur(A) = 0, det(A) = $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$

$$(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

2. Zeile + i(1. Zeile)

$$(A - \lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

2. Zeile - i(1. Zeile)

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$ sind. Die zugehörigen Eigenräume lauten: Bestimmen der Darstellungsmatrix A von f.

$V_1 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$V_2 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

→ Da die Eigenwerte verschieden sind, ist die Darstellungsmatrix diagonalisierbar

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = A$ Inverse von P berechnen → $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A^8 mit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Die Eigenwerte von A sind somit: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die Matrix A ist somit diagonalisierbar.

$\lambda_1 = 1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. $V_1 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\lambda_2 = 2$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$. $V_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^8 = PD^8P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^8 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{pmatrix}$

Von der reellen 2 × 2-Matrix A sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 und je ein zugehöriger Eigenvektor $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$ bekannt: Bestimmen Sie die Matrix A. $\lambda_1 = 1, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -1, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie A^{2n} mit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^{2n} = P \cdot D^{2n} \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^{2n} \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_2$$

Lösen Sie die folgenden linearen Differenzialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

$y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t)$, mit $y_1(0) = 1$
$y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t)$, mit $y_2(0) = 5$ → $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 8 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$

Lösungsmenge/
Eigenraum = $P = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t) = c_1 e^{3t} \vec{v}_1 + c_2 e^{-3t} \vec{v}_2.$ Bestimmen der Konstanten c durch einsetzen von (1, 5):

$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Somit: $c_2 = 1$ und $c_1 = 5 - c_2 = 4$.

$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 4e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-3t} \\ 4e^{3t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$ $y_1(t) = 2e^{3t} - e^{-3t}$ und $y_2(t) = 4e^{3t} + e^{-3t}$.