Lineare Gleichungssysteme

e

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = c$

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & \ldots & & & & & \ldots & x_n & 1 \\
\hline
\circledast_1 & * & \ldots & & & & & \ldots & * & c_1 \\
0 & 0 & \ldots & \circledast_2 & * & & & \ldots & * & c_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & & 0 & \circledast_m & * & \ldots & c_r \\
\ldots & & & & & & 0 & \ldots & 0 & c_{r+1} \\
 & & & & & & \ldots & & \ldots & \ldots \\
0 & & \ldots & & & & 0 & \ldots & 0 &
\end{array}
$$

$m\ x\ n - Matrix: \quad m - Zeilen, \quad n - Spalten$

$Rang\ r = Anzahl\ nicht - Nullzeilen \quad \circledast = Pivots$

Keine Lösung

$rg(A) \neq rg(A|\vec{c})$

$r < m, \quad wobei\ letzte\ Zeile\ 0 \ldots 0\ \ 0 = c_m \neq 0$

Lösbar:

$rg(A) = rg(A|\vec{c})$

Genau eine Lösung

$r = rg(A) = n, \quad eindeutige\ Lösung$

$\det(A) \neq 0$

Unendlich viele Lösungen

$r = rg(A) = m < n,$

$\#\ freie\ Parameter = n - r$

Homogenes LGS $A\vec{x} = 0$

- Hat immer die triviale Lösung 0
- Nicht - triviale Lösung falls r < n
- Für beliebige rechte Seiten lösbar, falls nur triviale Lösung vorhanden!
- $A \cdot B = 0 \ \rightarrow A\vec{x} = 0$ lösen, Spaltenvektoren sind vielfache von $\vec{x}$

Inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{c}$

Matrizen

Operationen:

Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$t * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t * a_{11} & t * a_{12} \\ t * a_{21} & t * a_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen:

$A: m \times n, \qquad B: n \times k, \qquad C(= A\,B): m \times k$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Rechenregeln:

3. $A + B = B + A$ $\qquad (A + B) + C = A + (B + C)$

1. $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$ $\qquad$ 2. $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$

$A\,B \neq B\,A$ $\qquad \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

$(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

1. Assoziativ-G. 2. Distributiv-G. 3. Kommutativ-G.

Gauss- & Gauss-Jordan-Algorithmus

$$(A|\vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Elementare Gleichungsumformungen:

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten ≠ 0
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Zeilenstufenform:

- Alle Zeilen, die nur 0 enthalten, stehen zuunterst
- Wenn eine Zeile nicht nur aus 0 besteht, so ist die vorderste Zahl ≠ 0 eine Eins. *(führende Eins, Pivot)*
- Eine führende 1, die weiter unten ist, ist auch weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform:

- Jede Spalte, in der eine führende Eins steht, enthält sonst nur Nullen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \qquad \begin{array}{c} führende\ Unbekannte \\ freie\ Unbekannte \end{array}$$

Gauss-Jordan-Verfahren:

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen ≠ 0. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte = 0, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element ≠ 0 hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl **a ≠ 0**. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu er- zeugen.

Gauss-Verfahren:

1. - 4. Wie beim Gauss-Jordan-Verfahren

5. Das entsprechende LGS wird durch Rückwärtssubstitution gelöst.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{3}/_{4} & {}^{9}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan $\qquad$ Gauss

Lösungsdarstellung

Vektordarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen

m=n

Diagonalmatrix:

- Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale = 0

→ **Einheitsmatrix** (E), Diagonalmatrix mit Diagonalelementen = 1

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix   Einheitsmatrix

Potenzen:

$A^0 = E \qquad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-Faktoren}$

$(A \cdot B)^k \neq A^k \cdot B^k$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

L-U-Zerlegung

$\boldsymbol{LRx = b,\ wobei\ L \cdot R = A}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \ominus \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

1.) L-R-Zerlegung von A mit Hilfe von Gauss
2.) Löse $\mathrm{L} \cdot \mathrm{c} = \mathrm{b}$ nach c auf (Vorwärtseinsetzen
3.) Löse $\mathrm{R} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{c}$ nach x auf (Rückwärtseinsetzen)

Transponierte Matrix A^T

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$(A^T)^T = A \quad (A + B)^T = A^T + B^T \quad (A\,B)^T = B^T\,A^T$

Symmetrisch, falls $A^T = A$
Antisymmetrisch, falls $A^T = -A$

Inverse Matrix A^{-1}

$\boldsymbol{A * A^{-1} = E_n}$

Invertierbar, falls $\det(A) \neq 0$

$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad (A^K)^{-1} = (A^{-1})^K$

$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1} \qquad E^{-1} = E$

Berechnung:

2x2 – Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Höhere Ordnung:

1. Möglichkeit

$(A \mid B) \to (I \mid A^{-1})$ Gauss-Jordan-Verfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

2. Möglichkeit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A), wobei\ adj(A): (transponiert!)$$

$$adj \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\vdots & +\ddots & \vdots \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Bsp: $X \cdot C + 3 \cdot X = D$

$X \cdot (C + 3 \cdot E) = D \to X \cdot \underbrace{(C + 3 \cdot E) \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}}_{A \cdot A^{-1} = E} = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}$

$X \cdot E = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1} \to X = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}$

Reguläre Matrix:

- A ist invertierbar • rg(A) = n
- Inverse ist immer eindeutig bestimmt
- det(A) ≠ 0
- Spalte/Zeile linear unabhängig
- Ax = 0 nur die triviale Lösung 0
- Ax = b für jedes b lösbar, genau eine Lösung

Sonst: **singulär** (nicht invertierbar): det(A) = 0

Determinante

$\boldsymbol{\det(A) = |A|}$

- Nullzeile/Nullspalte $\det(A) = 0$
- Zwei gleiche Zeilen/Spalten $\det(A) = 0$
- Zeile/Spalte vertauschen: Vorzeichen ändert
- Vielfaches anderer Zeile/Spalte addieren: ändert nichts
- Zeile/Spalte mit k multiplizieren: $\mathrm{k} * \det(A)$
- **Dreiecks- / Diagonalmatrix:**
  $\det(A) = Produkt\ der\ Diagonalenelemente$

Regeln:

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x \\ x & \alpha x \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c + d & e + f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix} \ (auch\ f\ddot{u}r\ Spalten)$$

$\det(A\,B) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad \det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det(r \cdot A) = r^n \cdot \det(A)$

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C)$

Berechnung:

1x1: $|a| = a$

2x2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

3x3: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} aei + bfg + cdh \\ -gec - hfa - idb \end{matrix}$ (Sarrus Regel)

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

nxn: $\left|\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}\right|$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{matrix}\right| = +1 \cdot \left|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{matrix}\right| - 2 \cdot \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{matrix}\right| + 0 - 0$$

Entwicklung nach 1. Spalte, da meist Nullen

Determinante nach Laplace:

i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

i-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bedeutung:

2x2 Matrizen:

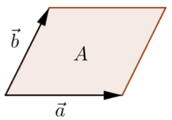
$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = |\det(A)|$

Die Determinante zum Betrag ist der Flächeninhalt der von den Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) aufgespannten Parallelogramm.

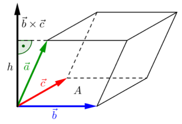
3x3 Matrizen:

$$V = A \cdot h = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \left| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$
$$= \det(A)$$

Die Determinante zum Betrag ist das Volumen des von den Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) aufgespannten Spats.



Parallelogram



Spat

Vektoren

- Vektor $\vec{x}$ ist ein Objekt mit **Betrag** $x = |\vec{x}|$ und **Richtung**
- Vektor von P nach Q: $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$
- Zwei Vektoren gleicher Betrag und gleicher Richtung, sind gleich.
- Ortsvektor von P ist $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$
- Nullvektor $\vec{O}$ mit Betrag 0 (als einziger!)
- Gegenvektor: $-\vec{x}$
- Vektor $|v| = 1$ ist der Einheitsvektor/normiert

Operationen:

Addition:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$$

Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a_1}^2 + \vec{a_2}^2 + \vec{a_3}^2}$$

Rechenregeln:

Addition:

$\vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\qquad$ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Multiplikation mit einem Skalar:

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\qquad$ $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ $\qquad$ $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

$\lambda = 0, \lambda \cdot \vec{a} = \vec{O}$ $\qquad$ $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a})$

Einheitsvektor:

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Linearkombination:

$\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$

Kollinear, Komplanar

Kollinear: $\vec{a}, \vec{b}$

- Es gibt eine Gerade g, die zu den zwei Vektoren **parallel** ist.
- Einer ist ein Vielfaches des anderen
  → $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
- Gleiche oder gegengesetzte Richtung
- $\vec{O}$ ist zu jedem Vektor kollinear

Komplanar: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- Es gibt eine Ebene E, die zu den drei Vektoren **parallel** ist.
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar
- $\vec{a}, \vec{b}$ sind nicht kollinear
- $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

→ somit lässt sich jeder Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ darstellen.

→ $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

Koordinatensystem

Kartesisch in der Ebene (2D):

Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$

$\vec{e_2}$ 90° - Drehung im Gegenuhrzeigersinn von $\vec{e_1}$

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kartesisch im Raum (3D):

Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$

$\vec{e_2}$ 90° - Drehung im Gegenuhrzeigersinn von $\vec{e_1}$

$\vec{e_3}$

- Orthogonal zu $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$
- Rechtssystem (Rechte Hand – Regel)

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt

Anteil eines Vektors in eine vorgegebene Richtung

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \pi)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, falls:

- $\vec{a} = 0$
- $\vec{b} = 0$
- $\varphi = 90°$

Berechnung:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (Ergebnis eine Zahl!)

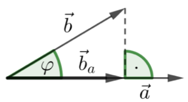
$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

Orthogonal:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ (\varphi = 90°)$

Orthogonale Projektion:

$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \qquad |\vec{b_a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$



Rechenregeln:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

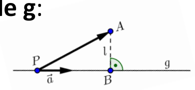
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Verwendung:

Abstand eines Punktes P zu einer Gerade g:

$l^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2 \qquad |\overrightarrow{PB}| = \left|\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}\right|$



Abstand eines Punktes A zu einer Ebene E:

$l = \left|\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot |a x_A + b y_A + c z_A + d|$

Vektorprodukt

Ein Vektor, rechtwinklig auf eine Ebene, die von zwei Vektoren aufgespannt wird.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \pi)$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$. → Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls:

- $\vec{a} = 0$
- $\vec{b} = 0$
- $\varphi = 90°$ oder $\varphi = 180°$ ($\vec{a}, \vec{b}$ kollinear)

Rechenregeln:

$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \qquad \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \qquad \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Berechnung:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} \times \vec{e_1} = \vec{0}$	$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$	$\vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$
$\vec{e_2} \times \vec{e_1} = -\vec{e_3}$	$\vec{e_2} \times \vec{e_2} = \vec{0}$	$\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$
$\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$	$\vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1}$	$\vec{e_3} \times \vec{e_3} = \vec{0}$

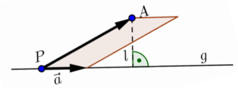
Verwendung:

Flächenberechnung eines Parallelogramms:

$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Abstand eines Punktes P zu einer Gerade g:

$l = \left|\frac{\vec{a} \times \overrightarrow{PA}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{PA}|}{|\vec{a}|}$



Geraden

Darstellung:

Parameterdarstellung:

$g: \vec{r}(P) + \lambda_a \cdot \vec{a}$, mit Aufpunkt P

$g: \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung:

$g: ax + by + c = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung $\frac{c}{|\vec{n}|}$

Von Parameter zu Koordinaten:

Bsp. $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x = 7 - 2\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{matrix}$

$(2) - 2(1) \to y - 2x = 1 - 2 \cdot 7 - 4\lambda - 4\lambda = 13 \to \mathbf{y - 2x - 13 = 0}$

$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{n}$: aus Koordinatendarstellung, $\vec{a}$: aus Parameterdarstellung

$\vec{n}$ steht senkrecht/orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{a}$

Von Koordinaten zu Parameter:

2 Punkte A, B berechnen

$g: \vec{x} = \vec{r}(A) + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$

Gegenseitige Lage:

- identisch
- schneidend (Schnittpunkt)
- parallel
- windschief

$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} \qquad h: \vec{r}(Q) + \mu \cdot \vec{b}$

- Parallel/identisch, falls $\vec{a} = \alpha * \vec{b}$ (kollinear)
- $\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} = \vec{r}(Q) + \mu \cdot \vec{b}$ für Schnittpunkt

Ebenen

Darstellung:

Parameterdarstellung:

$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

$E: \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \\ z_R - z_P \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung:

$E: ax + by + cz + d = 0$

Normierte Koordinatendarstellung falls: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung $\frac{d}{|\vec{n}|}$

Von Parameter zu Koordinate:

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow E: n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$

$E(P)$: $n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y + n_z \cdot p_z + d = 0$,

um **d** zu bestimmen.

$\vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{n}$: *aus Koordinatendarstellung und*

$\vec{a}, \vec{b}$ *aus der Parameterdarstellung*

$\vec{n}$ steht senkrecht/orthogonal zu den Richtungsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und somit zur Ebene.

Von Koordinaten zu Parameter:

$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, ein $\vec{a}$ bestimmen, dass orthogonal zu $\vec{n}$ ist.

$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$, ein $\vec{b}$ bestimmen, dass orthogonal zu $\vec{n}$ ist und

$\alpha \cdot \vec{b} \neq \vec{a}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/n_z \end{pmatrix}, oder \begin{pmatrix} 0 \\ -d/n_y \\ 0 \end{pmatrix}, oder \begin{pmatrix} -d/n_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

3 Punkte A,B, C berechnen durch einsetzen in Koord.dar.

$E: g: \vec{r}(A) + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$

Gegenseitige Lage:

- identisch
- parallel
- schneidend (Schnittgerade)

$E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Falls $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2, d_1 = \lambda d_2$ identisch

Falls $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2, d_1 \neq \lambda d_2$ parallel

Sonst: Schneidend

Spezielle Lage:

- Parallel zur x/y – Ebene:

  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad cz + d = 0$

- Parallel zur x – Achse:

  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad by + cz + d = 0$

Kreis

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$Mittelpunkt\ M = (x_0; y_0),\ Radius\ r = |MP|$ P Punkt auf Kreis

Kugel

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

$Mittelpunkt\ M = (x_0; y_0; z_0)$

$Radius\ r = |MP|$ P Punkt auf Kreis

Verwendung:

Schnittpunkte zwischen einer Gerade g & einer Kugel K:

$g: \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + \lambda a_x \\ p_y + \lambda a_y \\ p_z + \lambda a_z \end{pmatrix}$

x, y, z einsetzen in Kugel – Gleichung:

$(\underbrace{p_x + \lambda a_x}_{x} - x_0)^2 + (\underbrace{p_y + \lambda a_y}_{y} - y_0)^2 + (\underbrace{p_z + \lambda a_z}_{z} - z_0)^2 = r^2$

λ berechnen und in Gerade g einsetzen für Schnittpunkte

∠°	∠ rad	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-1
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0

Mitternachtsformel:

$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Wahrscheinlichkeiten

Ergebnisraum/ -menge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Würfel)
$|\Omega| = \#Anzahl\ Ergebnisse$, $|\Omega| = 6$ (Würfel)
Zähldichte: $\rho: \Omega \to [0, 1]$, $\rho(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \omega \in \Omega$ bei Gleichverteilung → Laplace-Raum
Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis: $P(M) = \sum_{\omega \in M} \rho(\omega)$,
im Laplace Raum: $P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

Mengen

$Durchschnitt$: ∩	Menge sowohl in A als auch in B
$Vereinigung$: ∪	Menge in A oder in B (+)
$Differenz$: /	Menge A ohne B
$Komplement$: ¯	Menge nicht in A
$Teilmenge$: ⊆	Menge A ist Teil von B
$Leere\ Menge$: ∅	Kein Element { }
Disjunktiv	$A \cap B = \{\}$

Rechenregeln:

Unmögliches Ereignis:	$P(\{\}) = 0$
Sicheres Ereignis:	$P(\Omega) = 1$
Komplementäres Ereignis:	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Vereinigung:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B$
Sigma-Additivität:	$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ $\to Falls\ A_1, A_2, \dots paarweise\ disjunkt\ sind$

PDF, CDF

PDF Zähldichte $\mathrm{f(x) = P(X = x)}$
CDF kumulative Verteilungsfunkton $\mathrm{F(x) = P(X \leq x)}$

Bsp. Würfel

x	1	2	3	4	5	6
PDF P(X=x)	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$
CDF P(X≤x)	$^1/_6$	$^2/_6$	$^3/_6$	$^4/_6$	$^5/_6$	$^6/_6$

Rechenregeln:

$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ $F(z) \sum_{x=-\infty}^{z} f(x)$
$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
Monotonier: $x \leq y \ \to \ F(x) \leq F(y)$
$f(x) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$
$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
$P(a \leq X \leq b) = F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x)$
$F(X > b) = 1 - F(b)$ $F(X \geq b) = 1 - \lim_{x \to b^-} F(x)$

Binomialkoeffizient

Anzahl der Teilmengen mit genau **k-Elementen** aus einer Grundmenge mit **n-Objekten**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot (x - E(X))^2$

Erwartungswert, Varianz, Standartabweichung

Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x$$

Lagemass der Verteilung von X

Varianz:

$$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot (x - E(X))^2$$

$$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Standartabweichung:

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Streumasse der Verteilung von X

Rechenregeln:

Linearität des Erwartungswertes:
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\alpha X) = \alpha E(X), f\text{ür}\ \alpha \epsilon \mathbb{R}$
Verschiebungssatz für die Varianz:

$$V(X) = (E(X^2) + E(X))^2 = (\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2) - E(X)^2$$

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)\ mit\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Rechenregeln:

Multiplikationssatz:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit:
$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$

Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$
Sonst stochastisch abhängig
$P(A|B) = P(A), P(B) \neq 0$ $P(B|A) = P(B), P(A) \neq 0$

Rechenregeln E-Wert, Varianz:

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$