

Lineare Gleichungssysteme

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = c$$

x_1	x_2	x_n	1
$\star 1$	*	...		*	C_1
0	0	...	$\star 2$	*	C_2
			\vdots		...
...	...		0	$\star m$	C_r
...			0	...	C_{r+1}
		
0	...		0	...	0

$m \times n$ - Matrix: m - Zeilen, n - Spalten
Rang r = Anzahl nicht - Nullzeilen \star = Pivots

Keine Lösung

$$rg(A) \neq rg(A|\vec{c})$$

$$r < m, \quad \text{wobei letzte Zeile } 0 \dots 0 \ 0 = c_m \neq 0$$

Lösbar:

$$rg(A) = rg(A|\vec{c})$$

Genau eine Lösung

$$r = rg(A) = n, \quad \text{eindeutige Lösung}$$

$$\det(A) \neq 0$$

Unendlich viele Lösungen

$$r = rg(A) = m < n,$$

$$\# \text{ freie Parameter} = n - r$$

Homogenes LGS $A\vec{x} = 0$

- Hat immer die triviale Lösung 0
- Nicht - triviale Lösung falls $r < n$
- Für beliebige rechte Seiten lösbar, falls nur triviale Lösung vorhanden!
- $A \cdot B = 0 \rightarrow A\vec{x} = 0$ lösen, Spaltenvektoren sind vielfache von \vec{x}

Inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{c}$

Matrizen

Operationen:

Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$t * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t * a_{11} & t * a_{12} \\ t * a_{21} & t * a_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen:

$$A: m \times n, \quad B: n \times k, \quad C (= A \cdot B): m \times k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Rechenregeln:

$$3. A + B = B + A \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$1. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad 2. (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

1. Assoziativ-G. 2. Distributiv-G. 3. Kommutativ-G.

Gauss- & Gauss-Jordan-Algorithmus

$$(A|\vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

Elementare Gleichungsumformungen:

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten $\neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Zeilenstufenform:

- Alle Zeilen, die nur 0 enthalten, stehen zuunterst
- Wenn eine Zeile nicht nur aus 0 besteht, so ist die vorderste Zahl $\neq 0$ eine Eins. (führende Eins, Pivot)
- Eine führende 1, die weiter unten ist, ist auch weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform:

- Jede Spalte, in der eine führende Eins steht, enthält sonst nur Nullen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} \text{führende Unbekannte} \\ \text{freie Unbekannte} \end{array}$$

Gauss-Jordan-Verfahren:

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte = 0, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Gauss-Verfahren:

1. - 4. Wie beim Gauss-Jordan-Verfahren
5. Das entsprechende LGS wird durch **Rückwärtssubstitution** gelöst.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan

Gauss

Lösungsdarstellung

Vektordarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen

m=n

Diagonalmatrix:

- Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale = 0

→ Einheitsmatrix (E), Diagonalmatrix mit

Diagonalelementen = 1

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Einheitsmatrix

Potenzen:

$$A^0 = E \quad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-Faktoren}}$$

$$(A \cdot B)^k \neq A^k \cdot B^k$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

L-U-Zerlegung

$LRx = b$, wobei $L \cdot R = A$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \ominus \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- 1.) L-R-Zerlegung von A mit Hilfe von Gauss
- 2.) Löse $L \cdot c = b$ nach c auf (Vorwärtseinsetzen)
- 3.) Löse $R \cdot x = c$ nach x auf (Rückwärtseinsetzen)

Transponierte Matrix A^T

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = A \quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Symmetrisch, falls $A^T = A$

Antisymmetrisch, falls $A^T = -A$

Inverse Matrix A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

Invertierbar, falls $\det(A) \neq 0$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad E^{-1} = E$$

Berechnung:

2x2 - Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Höhere Ordnung:

1. Möglichkeit

$(A | B) \rightarrow (I | A^{-1} \cdot B)$ Gauss-Jordan-Verfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

2. Möglichkeit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A), \text{ wobei } \text{adj}(A): (\text{transponiert!})$$

$$\text{adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & + \dots & \vdots \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Bsp: $X \cdot C + 3 \cdot X = D$

$$X \cdot (C + 3 \cdot E) = D \rightarrow X \cdot \underbrace{(C + 3 \cdot E) \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}}_{A \cdot A^{-1} = E} = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}$$

$$X \cdot E = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1} \rightarrow X = D \cdot (C + 3 \cdot E)^{-1}$$

Reguläre Matrix:

- A ist invertierbar • $\text{rg}(A) = n$
- Inverse ist immer eindeutig bestimmt
- $\det(A) \neq 0$
- Spalte/Zeile linear unabhängig
- $Ax = 0$ nur die triviale Lösung 0
- $Ax = b$ für jedes b lösbar, genau eine Lösung

Sonst: **singulär** (nicht invertierbar): $\det(A) = 0$

Determinante

$$\det(A) = |A|$$

- Nullzeile/Nullspalte $\det(A) = 0$
- Zwei gleiche Zeilen/Spalten $\det(A) = 0$
- Zeile/Spalte vertauschen: Vorzeichen ändert
- Vielfaches anderer Zeile/Spalte addieren: ändert nichts
- Zeile/Spalte mit k multiplizieren: $k \cdot \det(A)$
- **Dreiecks- / Diagonalmatrix:**
 $\det(A) = \text{Produkt der Diagonalelemente}$

Regeln:

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x \\ x & \alpha x \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix} \quad (\text{auch für Spalten})$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(r \cdot A) = r^n \cdot \det(A)$$

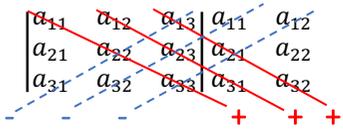
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C)$$

Berechnung:

$$\mathbf{1x1:} \quad |a| = a$$

$$\mathbf{2x2:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\mathbf{3x3:} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} aei + bfg + cdh \\ - gec - hfa - idb \end{matrix} \quad (\text{Sarrus Regel})$$



$$n \times n: \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

Entwicklung nach 1. Spalte, da meist Nullen

Determinante nach Laplace:

i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

i-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bedeutung:

2x2 Matrizen:

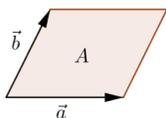
$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = |\det(A)|$$

Die Determinante zum Betrag ist der Flächeninhalt der von den Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) aufgespannten Parallelogramm.

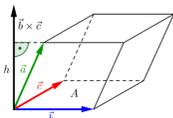
3x3 Matrizen:

$$V = A \cdot h = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \det(A)$$

Die Determinante zum Betrag ist das Volumen des von den Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) aufgespannten Spats.



Parallelogramm



Spats

Vektoren

- Vektor \vec{x} ist ein Objekt mit **Betrag** $x = |\vec{x}|$ und **Richtung**
- Vektor von P nach Q: $\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$
- Zwei Vektoren gleicher Betrag und gleicher Richtung, sind gleich.
- Ortsvektor von P ist $\vec{r}(P) = \vec{OP}$
- Nullvektor $\vec{0}$ mit Betrag 0 (als einziger!)
- Gegenvektor: $-\vec{x}$
- Vektor $|\vec{v}| = 1$ ist der Einheitsvektor/normiert

Operationen:

Addition:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor:

$$\vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$$

Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Rechenregeln:

Addition:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

$$\lambda = 0, \lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

$$(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a})$$

Einheitsvektor:

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

Kollinear, Komplanar

Kollinear: \vec{a}, \vec{b}

- Es gibt eine Gerade g, die zu den zwei Vektoren **parallel** ist.
- Einer ist ein Vielfaches des anderen
 $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
- Gleiche oder gegengesetzte Richtung
- $\vec{0}$ ist zu jedem Vektor kollinear

Komplanar: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- Es gibt eine Ebene E, die zu den drei Vektoren **parallel** ist.
- \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} sind komplanar
- \vec{a}, \vec{b} sind nicht kollinear
- $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$
 \rightarrow somit lässt sich jeder Vektor \vec{d} als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ darstellen.
 $\rightarrow \vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

Koordinatensystem

Kartesisch in der Ebene (2D):

Einheitsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2

\vec{e}_2 90° - Drehung im Gegenuhrzeigersinn von \vec{e}_1

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kartesisch im Raum (3D):

Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

\vec{e}_2 90° - Drehung im Gegenuhrzeigersinn von \vec{e}_1
 \vec{e}_3

- Orthogonal zu \vec{e}_1 und \vec{e}_2
- Rechtssystem (Rechte Hand - Regel)

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Anteil eines Vektors in eine vorgegebene Richtung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, falls:

- $\vec{a} = 0$
- $\vec{b} = 0$
- $\varphi = 90^\circ$

Berechnung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{ (Ergebnis eine Zahl!!)}$$

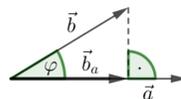
$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

Orthogonal:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\varphi = 90^\circ)$$

Orthogonale Projektion:

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



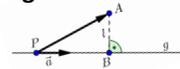
Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Verwendung:

Abstand eines Punktes P zu einer Gerade g:

$$l^2 = |\vec{PA}|^2 - |\vec{PB}|^2 \quad |\vec{PB}| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$



Abstand eines Punktes A zu einer Ebene E:

$$l = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PA}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{OA} - \vec{n} \cdot \vec{OP}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

Vektorprodukt

Ein Vektor, rechtwinklig auf eine Ebene, die von zwei Vektoren aufgespannt wird.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b} . \rightarrow Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls:

- $\vec{a} = 0$
- $\vec{b} = 0$
- $\varphi = 90^\circ$ oder $\varphi = 180^\circ$ (\vec{a}, \vec{b} kollinear)

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{0} &= \vec{0} & \vec{0} \times \vec{b} &= \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{a} &= \vec{0} & \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -(\vec{b} \times \vec{a}) & \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &\neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \end{aligned}$$

Berechnung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0} & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 &= \vec{0} & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 &= \vec{0} \end{aligned}$$

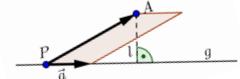
Verwendung:

Flächenberechnung eines Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Abstand eines Punktes P zu einer Gerade g:

$$l = \frac{|\vec{a} \times \vec{PA}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times \vec{PA}|}{|\vec{a}|}$$



Geraden

Darstellung:

Parameterdarstellung:

$$g: \vec{r}(P) + \lambda_a \cdot \vec{a}, \text{ mit Aufpunkt P}$$

$$g: \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung:

$$g: ax + by + c = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{Abstand zum Ursprung } \frac{c}{|\vec{n}|}$$

Von Parameter zu Koordinaten:

$$\text{Bsp. } g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= 7 - 2\lambda \\ y &= 1 - 4\lambda \end{aligned}$$

$$(2) - 2(1) \rightarrow y - 2x = 1 - 2 \cdot 7 - 4\lambda - 4\lambda = 13 \rightarrow \mathbf{y - 2x - 13 = 0}$$

$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$, \vec{n} : aus Koordinatendarstellung, \vec{a} : aus Parameterdarstellung

\vec{n} steht senkrecht/orthogonal zum Richtungsvektor \vec{a}

Von Koordinaten zu Parameter:

2 Punkte A, B berechnen

$$g: \vec{x} = \vec{r}(A) + \lambda \cdot \vec{AB} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB}$$

Gegenseitige Lage:

- identisch
- parallel
- schneidend (Schnittpunkt)
- windschief

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} \quad h: \vec{r}(Q) + \mu \cdot \vec{b}$$

- Parallel/identisch, falls $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ (kollinear)
- $\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} = \vec{r}(Q) + \mu \cdot \vec{b}$ für Schnittpunkt

Ebenen

Darstellung:

Parameterdarstellung:

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$E: \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \\ z_R - z_P \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung:

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Normierte Koordinatendarstellung falls: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{Abstand zum Ursprung } \frac{d}{|\vec{n}|}$$

Von Parameter zu Koordinate:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow E: n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$$

$$E(P): n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y + n_z \cdot p_z + d = 0,$$

um **d** zu bestimmen.

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

\vec{n} : aus Koordinatendarstellung und

\vec{a}, \vec{b} aus der Parameterdarstellung

\vec{n} steht senkrecht/orthogonal zu den Richtungsvektoren \vec{a}, \vec{b} und somit zur Ebene.

Von Koordinaten zu Parameter:

$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, ein \vec{a} bestimmen, dass orthogonal zu \vec{n} ist.

$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$, ein \vec{b} bestimmen, dass orthogonal zu \vec{n} ist und

$$\alpha \cdot \vec{b} \neq \vec{a}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/n_z \end{pmatrix}, \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ -d/n_y \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ oder } \begin{pmatrix} -d/n_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

3 Punkte A, B, C berechnen durch einsetzen in Koord.dar.

$$E: g: \vec{r}(A) + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$$

Gegenseitige Lage:

- identisch - parallel

- schneidend (Schnittgerade)

$$E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Falls $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2, d_1 = \lambda d_2$ identisch

Falls $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2, d_1 \neq \lambda d_2$ parallel

Sonst: Schneidend

Spezielle Lage:

- Parallel zur x/y - Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad cz + d = 0$$

- Parallel zur x - Achse:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad by + cz + d = 0$$

Kreis

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Mittelpunkt $M = (x_0; y_0)$, Radius $r = |MP|$ P Punkt auf Kreis

Kugel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Mittelpunkt $M = (x_0; y_0; z_0)$

Radius $r = |MP|$ P Punkt auf Kreis

Verwendung:

Schnittpunkte zwischen einer Gerade g & einer Kugel K:

$$g: \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + \lambda a_x \\ p_y + \lambda a_y \\ p_z + \lambda a_z \end{pmatrix}$$

x, y, z einsetzen in Kugel - Gleichung:

$$\underbrace{(p_x + \lambda a_x - x_0)^2}_x + \underbrace{(p_y + \lambda a_y - y_0)^2}_y + \underbrace{(p_z + \lambda a_z - z_0)^2}_z = r^2$$

λ berechnen und in Gerade g einsetzen für Schnittpunkte

\angle°	\angle rad	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}/2$	$1/\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-1
150	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0

Mitternachtsformel:

$$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wahrscheinlichkeiten

Ergebnisraum/ -menge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Würfel)

$|\Omega| = \# \text{Anzahl Ergebnisse}$, $|\Omega| = 6$ (Würfel)

Zähldichte: $\rho: \Omega \rightarrow [0, 1]$, $\rho(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\omega \in \Omega$ bei

Gleichverteilung \rightarrow Laplace-Raum

Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis: $P(M) = \sum_{\omega \in M} \rho(\omega)$,

im Laplace Raum: $P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

Mengen

Durchschnitt: \cap Menge sowohl in A als auch in B

Vereinigung: \cup Menge in A oder in B (+)

Differenz: $/$ Menge A ohne B

Komplement: $\bar{}$ Menge nicht in A

Teilmenge: \subseteq Menge A ist Teil von B

Leere Menge: \emptyset Kein Element $\{\}$

Disjunktiv $A \cap B = \{\}$

Rechenregeln:

Unmögliches Ereignis: $P(\{\}) = 0$

Sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$

Komplementäres Ereignis: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Vereinigung: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sigma-Additivität: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$
 \rightarrow Falls A_1, A_2, \dots paarweise disjunkt sind

PDF, CDF

PDF Zähldichte $f(x) = P(X = x)$

CDF kumulative Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$

Bsp. Würfel

x	1	2	3	4	5	6
PDF $P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
CDF $P(X \leq x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

Rechenregeln:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \quad F(z) = \sum_{x=-\infty}^z f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Monotonier: $x \leq y \rightarrow F(x) \leq F(y)$

$$f(x) = F(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$$

$$F(X > b) = 1 - F(b) \quad F(X \geq b) = 1 - \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$$

Binomialkoeffizient

Anzahl der Teilmengen mit genau **k-Elementen** aus einer Grundmenge mit **n-Objekten**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot (x - E(X))^2$$

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x$$

Lagemass der Verteilung von X

Varianz:

$$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot (x - E(X))^2$$

$$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Standardabweichung:

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Streuemasse der Verteilung von X

Rechenregeln:

Linearität des Erwartungswertes:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\alpha X) = \alpha E(X), \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Verschiebungssatz für die Varianz:

$$V(X) = (E(X^2) + E(X))^2 = \left(\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2 - E(X)^2 \right)$$

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X) \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Rechenregeln:

Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Sonst stochastisch abhängig

$$P(A|B) = P(A), P(B) \neq 0 \quad P(B|A) = P(B), P(A) \neq 0$$

Rechenregeln E-Wert, Varianz:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Vektorraum \mathbb{R}^n

Der **Vektorraum** \mathbb{R}^n besteht aus allen Vektoren mit n reellen Komponenten; \mathbb{R}^n hat die Dimension n

Addition / Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Addition / Subtraktion:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Linearkombination:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{b}_i = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n$$

$$\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Lineare Unabhängigkeit

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ sind linear unabhängig, wenn

- $0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$ die einzige Linearkombination von b_1, b_2, \dots, b_n ist, die $\vec{0}$ ergibt.
- Zwei Vektoren nicht kollinear
- Drei Vektoren nicht komplanar

Sonst \rightarrow **Lineare Abhängigkeit / Nicht linear unabhängig**

$\vec{0}$ (**Nullvektor**) ist immer linear abhängig!

Basen

Eine Vektormenge \mathcal{B} kann nur dann ein «vernünftiges» Koordinatensystem für \mathbb{R}^n definieren, wenn sie linear unabhängig ist und genau aus n Vektoren besteht.

Eine Vektormenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ heisst **Basis von \mathbb{R}^n** , wenn:

- (1) \mathcal{B} enthält genau n Vektoren.
- (2) Die Vektoren aus \mathcal{B} sind linear unabhängig.

- (1) Die Vektoren b_1, b_2, \dots, b_n bilden eine Basis von \mathbb{R}^n .
- (2) $rg(B) = n$
- (3) $\det(B) \neq 0$
- (4) B ist invertierbar
- (5) Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

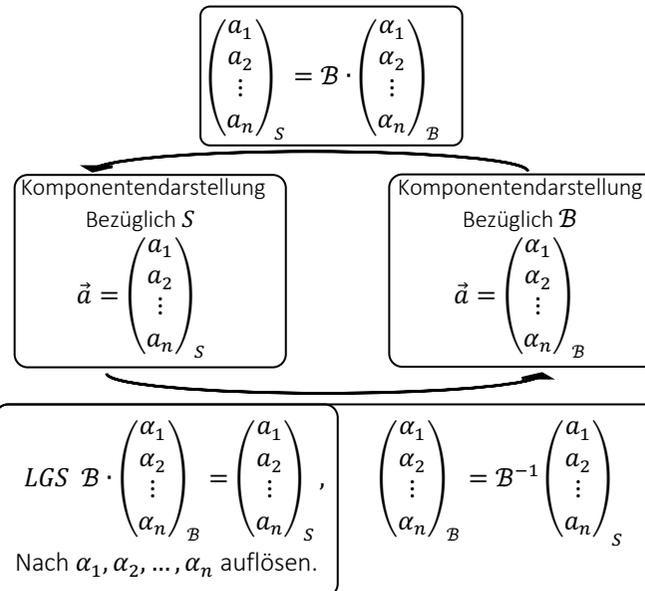
$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ (S)} \rightarrow \text{normalerweise nichts vermerkt}$$

Standartbasis (kartesisch x, y): $\mathcal{S} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$

Standartbasis von \mathbb{R}^n ist $\mathcal{S} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Basis } \mathcal{B} = \{\vec{b}_{1S}; \vec{b}_{2S}\}$$

Umrechnung zwischen Komponentendarstellungen



$\mathcal{B} = {}_S\mathcal{B}_B$ B transformiert von der Basis \mathcal{B} in die Basis \mathcal{S}

Lineare Abbildungen

Figuren bewahren ihre Form! Sie werden lediglich gedreht, gespiegelt, projiziert, aber **nicht** gekrümmt.

Eine lineare Abbildung bildet immer den Nullpunkt auf den Nullpunkt ab.

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst **lineare Abbildung**, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- (2) $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Zu beweisen ist linear?

- Bedingung (1) und (2) für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sind

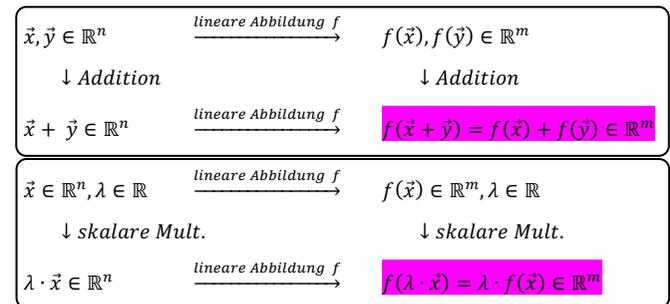
Zu beweisen ist nicht linear?

- Genügt ein einziges Bsp. für \vec{x} sowie \vec{y} oder λ , für das eine der Bedingungen (1) und (2) nicht erfüllt ist.

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

- (1) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \checkmark$
- (2) $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + 2\lambda x_2 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
 $\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + 2\lambda x_2 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \checkmark \rightarrow \text{Lineare Abbildung}$

Es spielt keine Rolle, ob ich zuerst die Abbildung anwende und dann rechne oder umgekehrt:



Matrix einer linearen Abbildung

Bezüglich der Standartbasis:

Lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

A ist eine $m \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix A (${}_S A_S$) sind die Bilder der Standartbasisvektoren von \mathbb{R}^n

Bezüglich der Basis \mathcal{B} und der Basis \mathcal{C}

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \dots; \vec{b}_n\}$ und $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \dots; \vec{c}_n\}$
 Lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $(f(\vec{x}))_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x}_{\mathcal{B}}$

A ist eine $m \times n$ - Matrix

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (f(\vec{b}_1))_{\mathcal{C}} & (f(\vec{b}_2))_{\mathcal{C}} & \dots & (f(\vec{b}_n))_{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Die Spalten der Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sind die Bilder der Elemente von \mathcal{B} bezüglich \mathcal{C} .

${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ transformiert ein Vektor von der Basis \mathcal{B} in die Basis \mathcal{C}

Lineare Abbildungen in der Ebene

Spiegelung an der

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gerade $g: ax + by = 0$ und $a^2 + b^2 = 1$:

$S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$ $s(x) = \vec{x} - 2\vec{x}_{\perp} = (2P - E)\vec{x}$

$S \cdot S = S^2 = E$

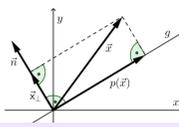
Orthogonale Projektion auf die

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gerade $g: ax + by = 0$ und $a^2 + b^2 = 1$:

$P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$ $p(x) = \vec{x} - \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n}$

$P \cdot P = P^2 = P$



Streckung um den Faktor n und m in

x-Richtung: $A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y-Richtung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ $n = \frac{\text{neuer Betrag}}{\text{alter Betrag}}$

Zentrische Streckung:

$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

Rotation um den Winkel φ um den Ursprung

Uhrzeigersinn: $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ Gegenuhrzeigersinn: $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

Falls Mittelpunkt nicht im Ursprung \rightarrow Homogene Koordinaten, Verschiebung vom Mittelpkt. $T^{-1} \cdot R \cdot T$

Rotation Translation

Scherung mit dem Faktor n in

x-Richtung: $A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y-Richtung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ Scherung um Winkel $n = \tan(\varphi)$

Lineare Abbildungen im Raum

Spiegelung an der

x/y-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x/z-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y/z-Ebene: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ z-Achse: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ebene $E: ax + by + cz = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$ $S = 2P - E = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$

$s(\vec{x}) = \vec{x} - 2\vec{x}_{\perp} = 2p(\vec{x}) - \vec{x}$

Orthogonale Projektion auf die

x/y-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ x/z-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y/z-Ebene: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ z-Achse: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ebene $E: ax + by + cz = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$ $P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$p(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}_{\perp}$

Streckung um den Faktor λ in

x-Richtung: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y-Richtung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ z-Richtung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Zentrische Streckung:

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Rotation im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ um die

x-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ y-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$

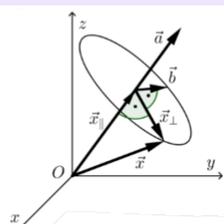
z-Achse: $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g: x + y + z = 0$ und $\varphi = 120^\circ$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade $g: ax + by + cz = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:

$\begin{pmatrix} \cos \varphi + a^2(1 - \cos \varphi) & a \cdot b(1 - \cos \varphi) - c \cdot \sin \varphi & a \cdot c(1 - \cos \varphi) + b \cdot \sin \varphi \\ a \cdot b(1 - \cos \varphi) + c \cdot \sin \varphi & \cos \varphi + b^2(1 - \cos \varphi) & b \cdot c(1 - \cos \varphi) - a \cdot \sin \varphi \\ a \cdot c(1 - \cos \varphi) - b \cdot \sin \varphi & b \cdot c(1 - \cos \varphi) + a \cdot \sin \varphi & \cos \varphi + c^2(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix}$

$r(\vec{x}) = \vec{x}_{\parallel} + \cos \varphi \cdot \vec{x}_{\perp} + \sin \varphi \cdot (\vec{n} \times \vec{x})$

$\vec{x}_{\parallel} =$
 $\vec{x}_{\perp} =$
 $\varphi =$



Verknüpfung von linearen Abbildungen

$g \circ f = B \cdot A$ $f \circ g = A \cdot B$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$

f hat die Abbildungsmatrix A, g hat die Abbildungsmatrix B

$\vec{y} = f \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = g \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = B \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$g \circ f(\vec{y}) = B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $f \circ g(\vec{y}) = A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Inverse einer linearen Abbildungen

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$

$\vec{x} \xrightarrow{f} f(\vec{x}) \xrightarrow{g} g(f(\vec{x}))$

$\vec{x} \xrightarrow{f} A \cdot \vec{x} \xrightarrow{g} B \cdot A \cdot \vec{x}$

$g \circ f(\vec{x}) = \vec{x}$ für jedes \vec{x} aus dem Definitionsbereich

$B \cdot A = E, \quad A^{-1} = B$

Die Abbildung, die **zuerst** ausgeführt wird, bzw. die zugehörige Abbildungsmatrix steht **rechts**; so trifft sie zuerst auf das \vec{x} .

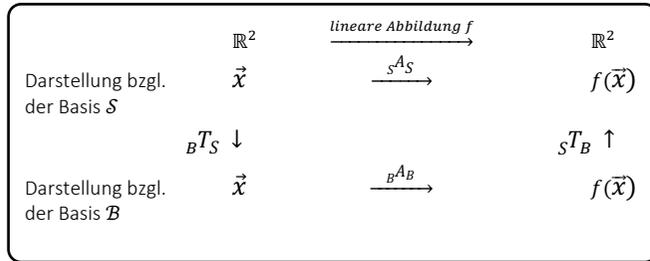
Die orthogonal Projektion ist **NICHT** invertierbar!

Basiswechsel

$$\text{Abbildungsmatrix } {}_sT_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ (b_1)_s & \cdots & (b_n)_s \\ | & & | \end{pmatrix}_B = {}_s(b_1 \cdots b_n)_B$$

$${}_B T_S = {}_s T_B^{-1}$$

$${}_s A_s = {}_s T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_S = {}_s T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_s T_B^{-1}$$



$${}_c T_B = {}_c T_S \cdot {}_s T_B = C^{-1} \cdot B$$

$${}_c T_B = \left((b_1)_c \ (b_2)_c \ \cdots \right)$$

$${}_s T_B \cdot {}_B T_S = B \cdot B^{-1} = E$$

Verkettete Rotationen

Die Rotationsmatrizen werden in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben, d.h. die Matrix für die **letzte** Rotation steht ganz **rechts**; dafür «vergisst» man, dass die Rotationsachsen mitrotiert werden sind.

$$R_{y'}(\beta) \cdot R_z(\gamma) = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot \underbrace{R_z(-\gamma) \cdot R_z(\gamma)}_E$$

$$= R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta)$$

$$R_{z''}(\alpha) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_x(\gamma) = R_x(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\gamma)$$

Wir führen drei Rotationen hintereinander durch: (1) Rotation um die x-Achse (2) Rotation um die mitrotierte y-Achse und (3) Rotation um die mitrotierte z-Achse.

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(-\gamma)$$

Homogene Koordinaten

- **Ortsvektoren** $\vec{r}(P)$ sind am Ursprung angeheftet; die zusätzliche Komponente wird **1** gesetzt.
- **Freie Vektoren** sind frei parallel verschiebbar, die zusätzliche Komponente wird **0** gesetzt.

$$\vec{r}(P) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad 2D$$

→ Somit sind nun Translationen durch Matrizen darstellbar.

Rechenoperationen:

- Addition von freien Vektoren: $\vec{a} + \vec{b}$
- Skalare Multiplikation von freien Vektoren: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Subtraktion von Ortsvektoren: $\vec{r}(Q) - \vec{r}(P)$ (das Ergebnis ist ein Vektor)
- Addition eines Ortsvektors und eines freien Vektors: $\vec{r}(P) + \vec{a}$ (das Ergebnis ist ein Ortsvektor)

Rotation in homogenen Koordinaten

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Rotation um den Winkel φ um den Ursprung

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation in homogenen Koordinaten

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Translation um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

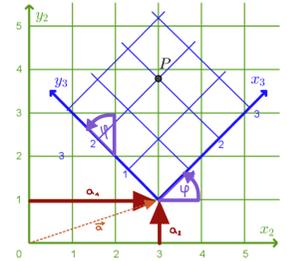
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation und Rotation in homogenen Koordinaten

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **Rotation** um den Winkel φ um den Ursprung mit anschließender **Translation** um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a_1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation entlang altem (grünem) System



Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Abbildungsmatrix A . Ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ heisst **Eigenvektor** von f bzw. A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls gilt: $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ bzw. $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$A \cdot \underbrace{\vec{v}}_{EV} = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{v}$$

→ Matrix mal Eigenvektor muss ein vielfaches des Eigenvektors ergeben!

Für eine $n \times n$ - Matrix A gilt:

- (1) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
- (2) A hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.
- (3) Ist \vec{x} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist auch $\mu \cdot \vec{x}$, ($\mu \neq 0 \in \mathbb{R}$) ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .
- (4) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwert sind **linear unabhängig**.

Eigenwerte bestimmen

- Bestimmen aller reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms
 $chp(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$
- Für jeden Eigenwert λ von A lineares Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ lösen
 - Alle Lösungen $\neq \vec{0}$ sind Eigenvektoren (EV) von A zum Eigenwert (EW) λ

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ der Eigenwert λ_i hat algebraische Vielfachheit n ($\hat{=}$ Multiplizität der Nullstelle).
 Für die diagonalisierbarkeit, muss jeder EW mit Vielfachheit n auch n EV bilden.

$$\bullet \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix} + \dots$$

1. EV zum EW λ_i 2. EV zum EW λ_i

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}$$

- $A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k-\lambda & k \\ k & -2k-\lambda \end{pmatrix}$
- $chp(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} -2k-\lambda & k \\ k & -2k-\lambda \end{pmatrix}$
 $= (-2k-\lambda) \cdot (-2k-\lambda) - (k \cdot k) = \lambda^2 + 4k\lambda + 3k^2$
- $chp(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -k, \lambda_2 = -3k$
- $A - \lambda_1 \cdot E = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} - (-k) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k - (-k) & k \\ k & -2k - (-k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Gauss!
 $\begin{matrix} -k & k & | & 0 & -k & k & | & 0 \\ k & -k & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{matrix} \quad v_2 = v_1 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\neq 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A - \lambda_2 \cdot E = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} - (-3k) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k - (-3k) & k \\ k & -2k - (-3k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Gauss!
 $\begin{matrix} k & k & | & 0 & k & k & | & 0 \\ k & k & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{matrix} \quad v_2 = -v_1 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\neq 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte spezieller Matrizen

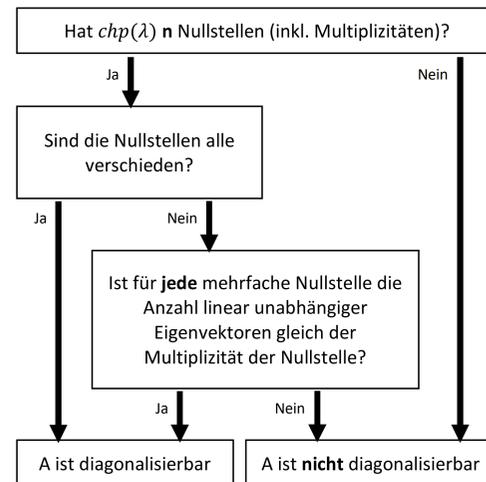
- Rotation** $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um die Achse mit der Richtung \vec{a} .
 Eigenvektoren $\mu \cdot \vec{a}, \mu \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda = 1$
- Projektion** $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf eine Ebene E mit Normalvektor \vec{n} .
 Eigenvektoren: **Vektoren von E** zum Eigenwert $\lambda = 1$
 Eigenvektoren $\mu \cdot \vec{n}, \mu \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda = 0$
- Zentrische Streckung** $A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$
 Eigenvektoren $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda = n$
 Eigenvektoren $\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda = m$
- Spiegelung** $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an der Achse mit der Richtung \vec{a} .
 Eigenvektoren $\mu \cdot \vec{a}, \mu \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda = 1$
 Eigenvektor senkrecht zu \vec{a} zum Eigenwert $\lambda = -1$

Diagonalisierbarkeit

Eine $n \times n$ - Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n lineare unabhängige Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ besitzt (mit anderen Worten: wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt).

In diesem Fall erhält man eine Basiswechselform T , indem man die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ als Spalten nebeneinander schreibt; die Diagonalelemente von D sind dann die entsprechenden Eigenwerte.

Eine quadratische Matrix A heißt **diagonalisierbar**, falls eine invertierbare Matrix T sowie eine Diagonalmatrix D gibt, so dass gilt:
 $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$



Wenn A diagonalisierbar ist, dann gilt: $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit
 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = {}_B A_B \quad T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$
 Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ entsprechende Eigenvektoren, **alle linear unabhängig!**

Potenzen von diagonalisierbaren Matrizen

$$A^k = T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot T \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^k \cdot T^{-1}$$

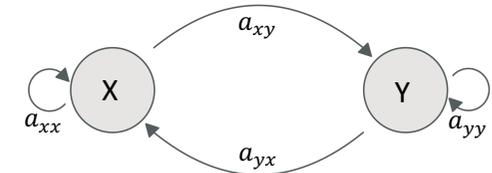
$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$$

Nur ein Eigenwert mit Betrag ≥ 1

$$A^k = T \cdot D^k \cdot T^{-1} = A^k \cdot (\mu_1 \cdot \vec{x}_1 + \mu_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \mu_n \cdot \vec{x}_n)$$

für $k \rightarrow \infty \quad = \mu_1 \cdot \lambda_1^k \cdot \vec{x}_1$

Übergangsmatrizen



x die Anzahl Objekte mit Zustand X
 y die Anzahl Objekte mit Zustand Y

$$\begin{matrix} x_{neu} \\ y_{neu} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{neu} \\ y_{neu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix}$$

Zustände vorher

	1	...	j	...	n
1	p_{11}		p_{1j}		p_{1n}
\vdots					
i	p_{i1}		p_{ij}		p_{in}
\vdots					
n	p_{n1}		p_{nj}		p_{nn}

Zustände nachher

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \#Obj \text{ in Nr. 1} \\ \#Obj \text{ in Nr. 2} \\ \vdots \\ \#Obj \text{ in Nr. n} \end{pmatrix}$$

P

$P \cdot \vec{x}$ beschreibt die Verteilung der Objekte auf die verschiedenen Zustände nach einem Takt und der Vektor $P^k \cdot \vec{x}$ die Verteilung der Objekte nach k Takten.

Die Verteilung der Objekte auf die verschiedenen Zustände stabilisiert sich mit der Zeit; die Endverteilung ist ein **stationärer Zustand** der Übergangsmatrix P , d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 (ein solcher existiert für jede Übergangsmatrix!) EV: Verteilung der Objekte auf Zustände

Stationärer Zustand

Für eine stochastische Matrix A gilt:

- $\lambda_1 = 1$ ist Eigenwert von A
- Für alle anderen Eigenwerte λ_k von A gilt: $|\lambda_k| < 1$

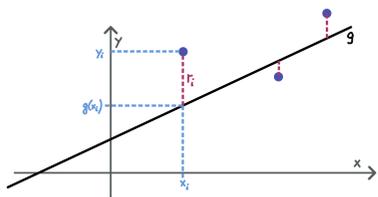
→ Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 heisst stationärer Zustand.

Stochastische Matrix

Eine Matrix A heisst stochastisch, wenn gilt:

- Alle Elemente a_{ij} der Matrix A sind ≥ 0 .
- Für jede Spalte der Matrix A gilt: Die Summe aller Elemente dieser Spalte ist $= 1$.

Lineare Regression



Datenpunkte: $(x_i; y_i)$ mit $1 \leq i \leq n$

Residuen oder Fehler

$$r_i = g(x_i) - y_i$$

Ausgleichs- oder Regressionsgerade

(in y-Richtung)

ist diejenige Gerade, für die die Summe der quadrierten Residuen $\sum_{i=1}^n r_i^2$ am kleinsten ist.

Regressionsgerade zu Datenpunkten mit Normalgleichungen

$$A^T \cdot A \cdot \vec{z} = A^T \cdot \vec{y} \rightarrow (A^T \cdot A | A^T \cdot \vec{y}) \rightarrow \text{Gauss}$$

Dabei hat der Vektor \vec{z} als Komponenten die unbekannte Steigung m (z_1) und den unbekanntes Achsenabschnitt q (z_2) der Regressionsgerade.

Die Matrix A hat in der Spalte die x-Koordinate der Datenpunkte und in der zweiten Spalte lauter Einsen. Und der Vektor \vec{y} enthält die y-Koordinaten der Datenpunkte.

Die Methode der kleinsten Quadrate (KQM)

Das lineare, inhomogene LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 + r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 + r_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m + r_m \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{y} + \vec{r}$$

Hat immer mind. Eine Lösung mit einem **Residuenvektor** \vec{r} von min. Betrag. Diese Lösungen findet man durch Auflösen der **Normalgleichungen** $A^T \cdot A \cdot \vec{z} = A^T \cdot \vec{y}$.

Hat die Matrix A den Rang n , so ist die symmetrische $n \times n$ -Matrix $A^T \cdot A$ invertierbar und man erhält die einzige Lösung aus der Gleichung $\vec{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{y}$.

Für die Lösungen \vec{x} gilt immer:

- $A \cdot \vec{x}$ und der Residuenvektor $\vec{r} = \vec{y} - A \cdot \vec{x}$ sind orthogonal
- Es gilt der Satz von Pythagoras: $|\vec{y}|^2 = |A \cdot \vec{x}|^2 + |\vec{y} - A \cdot \vec{x}|^2$.

Regressionsgerade

$$g(x) = m \cdot x + q$$

$$\begin{cases} g(x_1) = y_1 \\ \dots \\ g(x_n) = y_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \cdot x_1 + q = y_1 \\ \dots \\ m \cdot x_n + q = y_n \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{x} & \vec{1} \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$s(t) = v \cdot t + a \cdot t^2$$

$$\begin{cases} s(t_1) = y_1 \\ \dots \\ s(t_n) = y_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v \cdot t_1 + a \cdot t_1^2 = y_1 \\ \dots \\ v \cdot t_n + a \cdot t_n^2 = y_n \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{t} & \vec{t}^2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Normalgleichung lösen

$$\rightarrow A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{y} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}$$

$(A^T \cdot A | A^T \cdot \vec{y})$ mit Gauss für \vec{x} lösen

Arithmetisches Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \overline{x^2}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = \overline{x \cdot y}$$

???...???

Diskrete & stetige Verteilungen

Bei einer **diskreten** Zufallsvariable gibt es immer Lücken zwischen den Werten, die die Zufallsvariable annehmen kann; in der Regel **zählt** eine diskrete Zufallsvariable etwas und kann entsprechend nur **ganzzahlige Werte** annehmen.

- Anzahl Studierende ...
- Jahrgang von ...

Eine **stetige** Zufallsvariable hat hingegen ein **kontinuierliches Spektrum** von möglichen Werten; oft erhält man diese Werte durch **Messungen**.

- Temperatur ...
- Höhe von ...
- Lebensdauer von ...

Dichtefunktion & Kumulative Verteilungsfunktion

PDF der diskreten Zufallsvariable X

Die PDF f einer **diskreten** Zufallsvariablen X weist jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit zu, mit der X den Wert x annimmt: $f(x) = P(X = x)$

CDF

Die CDF F ist **für diskrete und für stetige** Zufallsvariablen folgendermassen definiert: $F(x) = P(X \leq x)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Der Integrand f heisst Dichtefunktion oder **PDF der stetigen Zufallsvariablen X**

$$F(x) = P(X \leq x_0) = F(x_0)$$

$$F(x) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = P(X > x_0) = \int_{x_0}^{\infty} f(u) du = 1 - P(X \leq x_0) = 1 - F(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$$

Erwartungswert von stetigen Zufallsvariablen X

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x \text{ für } \textit{diskrete} \text{ ZV } X$$

Linearität

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ und } E(\alpha X) = \alpha E(X) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Varianz von stetigen Zufallsvariablen X

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2 dx$$

$$V(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx}_{E(X^2)} - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot (x - E(X))^2 \text{ für } \textit{diskrete} \text{ ZV } X$$

Verschiebungssatz

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X) \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Sind X und Y **stochastisch unabhängig**, so gilt:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 \cdot V(Y)$$

$$V(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot V(X)$$

Standardabweichung von stetigen Zufallsvariablen X

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$S(X) = \sqrt{V(X)} \text{ für } \textit{diskrete} \text{ ZV } X$$

Diskrete | stetige Zufallsvariablen

	Diskrete Zufallsvariablen	Stetige Zufallsvariablen
Dichtefunktion / PDF	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = f'(x) \neq P(X = x)$
Kumulative Verteilungsfunktion / CDF	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$
Wahrscheinlichkeiten	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} f(x)$ $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x \leq b} f(x)$ $P(a < X < b) = \sum_{a < x < b} f(x)$ $P(a < X) = 1 - F(a)$	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$ $P(a < X) = 1 - F(a)$
Graphische Darstellung von f	Stabdiagramm	Graph
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$
Varianz	$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot (x - E(X))^2$	$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2 dx$

Bernoulli Verteilung

Bernoulli-verteilte Zufallsvariable X :

Zufallsexperimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen.

Erfolg & Misserfolg (1 & 0)

- Erfolg: $P(X = 1) = p$
- Misserfolg: $P(X = 0) = 1 - p = q$

Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable X gilt:

- (1) $E(X) = E(X^2) = p$
- (2) $V(X) = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$

Binomialverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X heisst **binomialverteilt** mit den Parametern:

- n (Anzahl Wiederholungen),
- p (Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis 1) und
- $q = 1 - p$,

wenn ihre Dichtefunktion (PDF) gegeben ist durch:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X \leq b) = F(b) = \sum_{k=0}^b \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X \geq b) = 1 - P(X < b)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \binom{n}{k_1, k_2, \dots} = \frac{n!}{k_1!k_2! \dots} \text{ für } k_1 + k_2 + \dots = n$$

Schreibweise: $X \sim B(n; p)$

X zählt die Erfolge bei der n -fachen Wiederholung eines Bernoulli-Experiments.

Eine $B(n; p)$ -verteilte Zufallsvariable X lässt sich als Summe von n Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen X_i auffassen: $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Dabei hält X_i das Ergebnis des i -ten Experiments fest, und es gilt: $P(X_i = 1) = p$

Für eine Zufallsvariable $X \sim B(n; p)$ oder $X \sim N(\mu; \sigma)$ gilt:

- (1) $\mu = E(X) = np \rightarrow$ Erwartungswert
- (2) $\sigma^2 = V(X) = npq \rightarrow$ Varianz
- (3) $\sigma = S(X) = \sqrt{npq} \rightarrow$ Standardabweichung

Bsp.

$\mu = E(X) = 20$ Erwartungswert
 $\sigma = 2$ Standardabweichung
 $P(X > 23)$ W'keit für mehr als 23 Erfolge

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= 20 = np \\ \sigma = 2 \rightarrow \sigma^2 &= 2^2 = V(X) = npq \\ q &= \frac{V(X)}{np} = \frac{2^2}{20} = \frac{1}{5} \\ p &= 1 - q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ np &= 20 \rightarrow n = \frac{20}{p} = \frac{20}{4/5} = 25 \end{aligned}$$

$$P(X > 23) = P(X \geq 24) = P(X = 24) + P(X = 25) \\ = \binom{25}{24} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{25}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0$$

$$X \sim B(25; \frac{4}{5})$$

Gauss'sche Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heisst normalverteilt mit den Parametern $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, wenn sie folgende Dichtefunktion (PDF) hat:

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Schreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

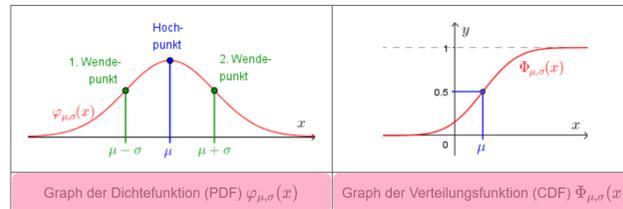
Ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, so spricht man von der

Standardnormalverteilung: Ihre Dichtefunktion wird einfach mit φ bezeichnet; sie ist gegeben durch:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \rightarrow X \sim N(0; 1)$$

Die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) von $\varphi_{\mu, \sigma}(x)$ wird mit $\Phi_{\mu, \sigma}(x)$ bezeichnet. Sie ist definiert durch:

$$\Phi_{\mu, \sigma}(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu, \sigma}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



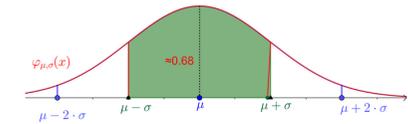
Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung kann nicht auf elementare Weise berechnet werden. Für ihre Werte gibt es **Tabellen 1**; die Tabellen beziehen sich allerdings immer auf die **Standardnormalverteilung**.

Liegt eine beliebige Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$ vor, muss erst standardisiert werden. Statt der ursprünglichen Zufallsvariablen X betrachtet man die Zufallsvariable $U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$

Diese folgt der Standardnormalverteilung. Die CDF $\Phi_{\mu, \sigma}(x)$ einer beliebigen Normalverteilung kann mit der Formel $\Phi_{\mu, \sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ aus der CDF $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung berechnet werden.

Bei einer Zufallsvariable X , die der Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$ folgt, liegen

- Ca. **68%** der beobachteten Werte zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$
- Ca. **95%** der beobachteten Werte zwischen $\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$
- Ca. **99.7%** der beobachteten Werte zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$



Wichtige Eigenschaften einer $N(\mu; \sigma)$ -verteilten Zufallsvariable X **Table 1**

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi_{\mu, \sigma}(b) - \Phi_{\mu, \sigma}(a)$$

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

In den Aussagen können \leq -Zeichen nach Belieben durch $<$ -Zeichen ersetzt werden.

Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sind lauter identisch verteilte und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots , alle mit demselben Erwartungswert μ und derselben Varianz σ^2 .

Die Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

hat den Erwartungswert $n\mu$ und die Varianz $n\sigma^2$ und ist annähernd $S_n \sim N(n\mu; \sqrt{n}\sigma)$ -verteilt.

Das arithmetische Mittel

$$\bar{X}_n = S_n/n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

hat den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2/n und ist annähernd $\bar{X}_n \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ – verteilt.

Die Verteilungsfunktion (CDF)

$F_n(u)$ der dazugehörigen standardisierten Zufallsvariablen

$$U_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung $U_n \sim N(0; 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Für eine $B(n; p)$ – verteilte Zufallsvariable X mit $npq > 9$ können Intervallwahrscheinlichkeiten mithilfe der Normalverteilung approximiert werden:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b P(X = x) \approx \Phi_{\mu, \sigma}(b + 1/2) - \Phi_{\mu, \sigma}(a - 1/2)$$

An den Grenzen muss eine Stetigkeitskorrektur $\pm 1/2$ vorgenommen werden!

$$P(a < X < b) = P((a + 1) \leq X \leq (b - 1))$$

$$P(a \leq X \leq b) = \underbrace{P(a - 1/2 < X \leq b + 1/2)}_{\text{mit Stetigkeitskorrektur}}$$

Bsp.

$$P(39 < X < 49) \rightarrow P(\blacksquare < X \leq \blacksquare)$$

$$P(39 + 1 \leq X \leq 49 - 1)$$

$$P(40 \leq X \leq 48)$$

$$P(40 - 1/2 < X \leq 48 + 1/2)$$

$$P(39.5 < X \leq 48.5)$$

Zufallsstichproben

Eine **einfache Zufallsstichprobe** vom Umfang n ist eine Folge von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , den sogenannten

Stichprobenvariablen (Elemente aus der **Grundgesamtheit**).

Dabei bezeichnet X_i die Merkmalsausprägung des i -ten Elements in der Stichprobe. Die beobachteten Merkmalswerte x_1, \dots, x_n der n Elemente sind Realisierungen der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und heissen **Stichprobenwerte**.

Parameterschätzungen

Allgemein ist eine **Stichprobenfunktion** eine Funktion, die von den Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_n abhängt. Eine

Schätzfunktion $\Theta = g(X_1, \dots, X_n)$ ist eine spezielle Stichprobenfunktion, nämlich eine «Formel», mit der man den Wert eines Parameters θ der Grundgesamtheit schätzen kann: Setzt man eine konkrete Stichprobe x_1, \dots, x_n ein, so erhält man ein **Schätzwert** $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$ für den Parameter θ .

Schätzfunktionen:

Tabelle 10.3.1

- Eine Schätzfunktion Θ eines Parameters θ heisst **erwartungstreu**, wenn gilt:
 $E(\Theta) = \theta$
- Gegeben sind zwei erwartungstreue Schätzfunktionen Θ_1 und Θ_2 desselben Parameters θ . Man nennt Schätzfunktionen Θ_1 **effizienter** als Θ_2 , falls gilt:
 $V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$
- Eine Schätzfunktion Θ eines Parameters θ heisst **konsistent**, wenn gilt:
 $E(\Theta) \rightarrow \theta$ und $V(\Theta) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

	Schätzfunktion	Schätzwert
Erwartungswert Spezialfall \hat{p} : Anteilswert einer Bernoulli-Verteilung	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ $\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ $= \frac{\text{Anz. Erfolge}}{n}$
Varianz	$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	$S = \sqrt{S^2}$	$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

1. \bar{X} und S^2 sind erwartungstreu und konsistent
2. S ist konsistent, aber **nicht** erwartungstreu

Vertrauensintervalle

Tabelle 10.3.1

Wir legen eine beliebig grosse Wahrscheinlichkeit γ fest (z.B. $\gamma = 95\%$). γ heisst **statistische Sicherheit** oder **Vertrauensniveau**. $\alpha = \gamma - 1$ ist die sog. **Irrtumswahrscheinlichkeit**.

Dann bestimmen wir zwei Zufallsvariablen Θ_u und Θ_o so, dass sie den wahren Parameterwert θ_0 mit der Wahrscheinlichkeit γ einschliessen:

$$P(\Theta_u \leq \theta_0 \leq \Theta_o) = \gamma$$

Dabei hängen Θ_u und Θ_o von den Stichprobenwerten ab, d.h. sie sind Stichprobenfunktionen der n unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n :

$$\Theta_u = g_u(X_1, \dots, X_n) \text{ und } \Theta_o = g_o(X_1, \dots, X_n)$$

Setzt man nun die Werte x_1, \dots, x_n einer konkreten Stichprobe ein, so erhält man c_u und c_o .

Sie bilden die Grenzen eines Intervalls, das als

Vertrauensintervall für den Parameter θ bezeichnet wird.

Vorgehen:

1. **Die richtige Zeile in der Tabelle 10.3 finden**
Welcher Verteilung folgt die Grundgesamtheit?
Welcher Parameter soll geschätzt werden?
Welcher Fall liegt vor?
2. **Schätzwerte berechnen**
gemäss Tabelle in 10.3 (Spalte 3)
3. **Grenze(n) für die standardisierte Zufallsvariable berechnen**
Dabei müssen wird Folgendes berücksichtigen:
- Verteilung der Testvariablen gemäss Tabelle 10.3 (Spalte 5)
- Vertrauensniveau γ
4. **Grenzen des Vertrauensintervalls berechnen**
gemäss Tabelle 10.3 (Spalte 6).
Bsp. α – Vertrauensintervall für μ : [,]

Hypothesentests

Tabelle 10.4.3

Vorgehen bei einem Parametertest

1. **Nullhypothese H_0 aufstellen**
Um welchen Parameter geht es?
Welchen Wert hat er angeblich?
Oder werden zwei Parameter verglichen?
2. **Alternativhypothese H_A aufstellen**
Kommt es darauf an, in welche Richtung die Abweichung geht?
Ist dies der Fall, so beschreibt H_A nur die relevante Alternative
3. **Die richtige Zeile in der Tabelle 10.4 finden**
Welcher Verteilung folgt die Grundgesamtheit?
Um welche Nullhypothese geht es?
Welcher Fall liegt vor?
4. **Kritische Grenzen bestimmen**
Dabei müssen wir Folgendes berücksichtigen:
 - Verteilung der Testvariablen gemäss Tabelle 10.4 (letzte Spalte)
 - Signifikanzniveau
 - Ist H_A einseitig oder zweiseitig?
Wenn einseitig, auf welcher Seite befindet sich der kritische Bereich?
Einseitig: $p = \alpha$
Zweiseitig: $p (p_1 \text{ \& } p_2)$ aus **Tabelle 10.3.1**
5. **Testwert berechnen**
gemäss Tabelle 10.4 (vorletzte Zeile)
6. **Testentscheidung fällen**
Liegt der Testwert im Annahmebereich oder im kritischen Bereich?