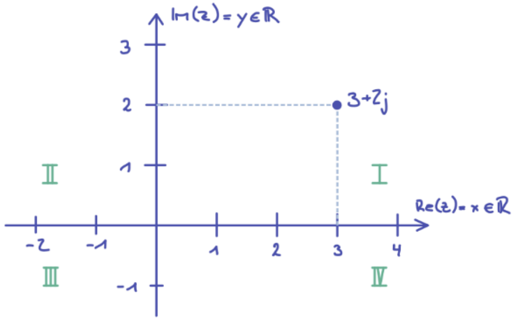
Kartesische Form:



$z = x + j \cdot y$

$j = \sqrt{-1}$

Konjugiert komplexe Zahl: $z^* = x - j \cdot y \ \ (\bar{z})$ → Spiegelung an x-Achse

Rechenregeln:

1. $z + z^* = 2 \cdot x = 2 \cdot Re(z)$
2. $z - z^* = 2 \cdot y \cdot j = 2 \cdot Im(z)$
3. $z * z^* = x^2 + y^2 = |z|^2$

Betrag: $|z| = \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Abstand zwischen z_1 und z_2:

$$\left|\begin{matrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{matrix}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Addieren:

$z_1 + z_2 = (x_1 + j \cdot y_1) + (x_2 + j \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot j$

Multiplizieren:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 + j \cdot y_2) =$

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 \cdot j + x_2 \cdot y_1 \cdot j + y_1 \cdot y_2 \cdot \overbrace{j^2}^{-1}$

$(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot j$

Dividieren:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{x_2^2 - y_2^2} = Re\left(\frac{z_1 \cdot z_2^*}{x_2^2 - y_2^2}\right) + Im\left(\frac{z_1 \cdot z_2^*}{x_2^2 - y_2^2}\right) \cdot j$$

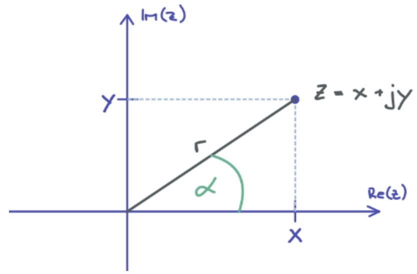
1. Erweitern mit dem konjugiert komplexen des Nenners
2. Ausmultiplizieren von Nenner und Zähler
3. Umformung zur kartesischen Form durch Bruchzerlegung

Wurzel ziehen:

$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\overbrace{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}^{<0}}}{2 \cdot a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|b^2 - 4 \cdot a \cdot c|}}{2 \cdot a} = \frac{-b \pm j \cdot \sqrt{|b^2 - 4 \cdot a \cdot c|}}{2 \cdot a}$$

Trigonometrische Form:



Betrag: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argument:

$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\varphi \in \left(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right)$

$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $\qquad$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$

$z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = \boldsymbol{r \cdot cis(\varphi)}$ → **Trigonometrische Form**

$(r \cdot cis(\varphi))^* = r \cdot cis(-\varphi)$

<table>
<tr><th>$\mathrm{atan}({}^{y}/_{x})$</th><th>$x < 0$</th><th>$x = 0$</th><th>$x > 0$</th></tr>
<tr><td>$y > 0$</td><td rowspan="2">$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$</td><td>$\varphi = \frac{\pi}{2}$</td><td rowspan="3">$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$</td></tr>
<tr><td>$y = 0$</td><td>nicht def.</td></tr>
<tr><td>$y < 0$</td><td>$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$</td><td>$\varphi = -\frac{\pi}{2}$</td></tr>
</table>

Multiplizieren:

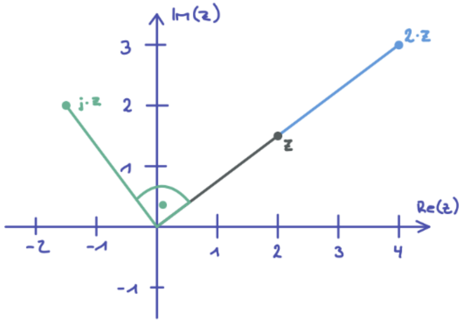
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot cis(\varphi_1) \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\varphi_1 + \varphi_2)$

$a \cdot z, \ a \ reel$ → Streckung des Ortvektors

$j \cdot z$ → Drehung um (0,0) mit Winkel $\frac{\pi}{2}$

$z_1 \cdot z_2$ → z_1 Streckung um r_2 und

Drehung um (0,0) mit Winkel φ_2



Drehung um $\vec{0}$ mit Winkel φ

Multiplizieren mit:

$cis(\varphi) = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

Potenzen:

$z^n = z \cdot z \cdot ... = r^n \cdot cis(n \cdot \varphi)$

1. z in trigonometrische Form umwandeln.
2. Potenz berechnen
3. Zurück in kartesische Form umwandeln.

Wurzel ziehen:

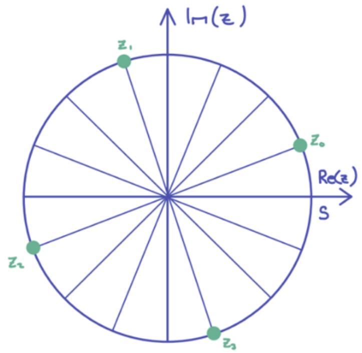
$z^n = a$ $\quad$ $a \in \mathbb{C}$ Originalfunktion

$z^n = (s \cdot cis(\psi))^n = s^n \cdot cis(n \cdot \psi) \equiv r_a \cdot cis(\varphi_a)$

$s^n = r_a$ $\quad$ $n \cdot \psi = \varphi_a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

n – Lösungen $\quad$ $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

$z^n = r \cdot cis(\psi)$



$|z| = \sqrt[n]{r}$

$\psi_0 = \frac{\varphi}{n}$

$\psi_k = \psi_0 + \frac{2\pi}{n} \cdot k$

Exponentialform / Eulersche Formel

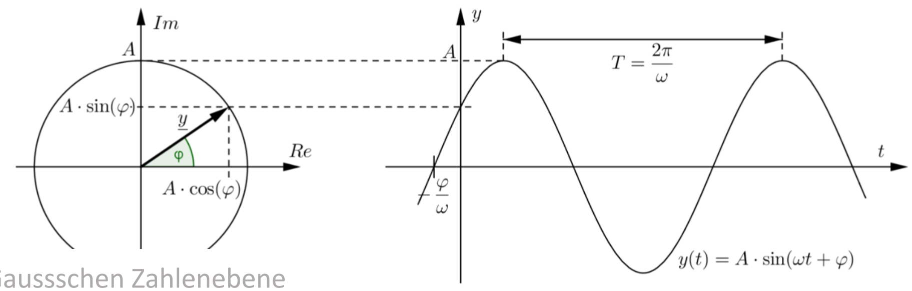
$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

$r \cdot cis(\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$ $\qquad$ $(r \cdot cis(\varphi))^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Taylorreihe zur Entwicklungsstelle x_0:

$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$

Harmonische Schwingungen im Zeigerdiagramm:

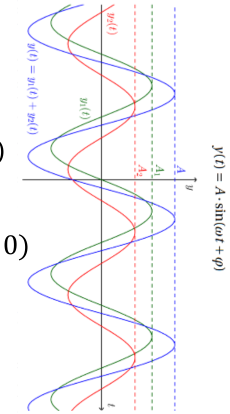


Gaussschen Zahlenebene

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \leftrightarrow y(t) = A \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)}$ **Komplexe Zeiger**

Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen

$y_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad$ $y_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$



$y_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad$ $y_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$

1. $y_1(t) = A_1 \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_1)}$ $\qquad$ $y_2(t) = A_2 \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_2)}$
2. Addition im kartesischen: $y = y_{1,kart}(t=0) + y_{2,kart}(t=0)$
3. $A = |y_{kart}|$ $\quad$ $\varphi = \arg(y_{kart}) = \arctan\left(\frac{y_y}{x_y}\right)$
4. $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ zurücktransformiert in einen komplexen Zeiger

$y_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ $y_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

1. Komplexe Zeiger ($t = 0$): $\underline{y_1} = A_1 \cdot cis(\varphi_1)$ $\underline{y_2} = A_2 \cdot cis(\varphi_2)$
2. Addition im kartesischen ($t = 0$): $\underline{y} = a_1 + b_1 \cdot j + a_2 + b_2 \cdot j = a + b \cdot j$
3. $A = |y_{kart}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\varphi = \arg(y_{kart}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
4. $\underline{y} = A \cdot \text{cis}\,(\omega t + \varphi)$
5. Zurücktransformiert $y_{ges}(t) = A \cdot \sin\,(\omega t + \varphi)$

Fourier – Reihen

$p(x) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{jk\omega x}$ $p(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

$\hat{f}_k := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j\omega kx} dx, (k \geq 0)$ $\hat{f}_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot dt$

$a_k = 2 \cdot Re(\hat{f}_k)$ $b_k = -2 \cdot Im(\hat{f}_k)$

$\frac{a_0}{2} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ $a_k := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\,(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) dx, (k \geq 0)$

$b_k := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\,(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) dx, (k \geq 1)$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Laplace - Transformation

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt, \qquad mit\ s = Re(s) + j \cdot Im(s)$$

Polynomfunktion:

$f(t) = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_1 \cdot t^1 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$

$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$ für $Re(s) > 0$

Linearität:

$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}$

Verschiebungssatz:

Verschiebung der Originalfunktion in $\mathbb{R}$ Dämpfung der Bildfunktion in $\mathbb{C}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$

Dämpfungssatz:

$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a),\ mit\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Ableitungssatz:

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st} dt,\ s \in \mathbb{C}$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$

Muss gelten: $\lim_{z\to\infty} f(z) \cdot e^{-sz} = 0$

Aufblähen:

Beispiel:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2-2s+2}$ $\rightarrow \frac{s}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1+1}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^t \cdot (\underbrace{\cos(t)}_{25} + \underbrace{\sin(t)}_{24})$

Grenzwertsätze:

1. Rechtsseitiger Grenzwert für $t \to 0$:

   $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} (s \cdot F(s)), \quad mit\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

2. Grenzwert für $t \to \infty$:

   $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} (s \cdot F(s)), \quad mit\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

AWP's mit Hilfe der Laplace – Transformation:

Vorraussetzung:

- DGL linear in $y, y', y'', \ldots$

$y' + ay = g_1(t), \qquad gegeben\ ist\ der\ Anfangswert{:}\ y(0) = y_0$

$y'' + ay' + by = g_2(t)$

1. Laplace – Transformation

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ und $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$\mathcal{L}\{y' + a \cdot y\} = \mathcal{L}\{y'\} + a \cdot \mathcal{L}\{y\} = s \cdot Y(s) - y(0) + a \cdot Y(s)$

$s \cdot Y(s) - y(0) + a \cdot Y(s) = G(s)$

$\mathcal{L}\{y'' + ay' + by = g_2(t)\} = \mathcal{L}\{y''\} + a \cdot \mathcal{L}\{y'\} + b \cdot \mathcal{L}\{y\}$
$= \underbrace{s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}\{y''\}} + a \cdot \underbrace{\left(s \cdot Y(s) - y(0)\right)}_{\mathcal{L}\{y'\}} + b \cdot Y(s)$

$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + a \cdot \left(s \cdot Y(s) - y(0)\right) + b \cdot Y(s) = G(s)$

2. Lösung im Bildbereich:

$Y(s) \cdot (s + a) - y_0 = G(s)$

$Y(s) = \frac{G(s) + y_0}{s + a}$

$Y(s) = \frac{G(s) + s \cdot y(0) + y'(0) + a \cdot y(0)}{s^2 + a \cdot s + b}$

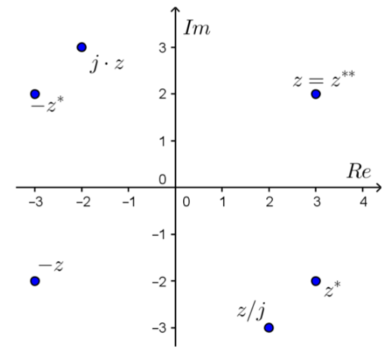
Bemerkung: Es ist hilfreich, $Y(s)$ als Summe von Brüchen darzustellen.

3. Inverse Laplace – Transformation:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s) + y_0}{s + a}\right\}$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

$$j^k = \begin{cases} 1 & für\ k = 4n \\ j & für\ k = 4n+1 \\ -1 & für\ k = 4n+2 \\ -j & für\ k = 4n+3 \end{cases} \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$



$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Substitution

Typ: $y' = F(\frac{y}{x})$

(I) Vergleich der *gegebenen* DGL mit der *allgemeinen* Form $y' = F(\frac{y}{x})$ und Bestimmung von $F(u)$

(II) Substitution: $u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot u = y$ (☞ y und u sind Funktionen von x)

(III) Ableiten der Gleichung aus (II): $u + x \cdot u' = y'$

(IV) Zusätzlich y' durch $F(u)$ ersetzten: $u + x \cdot u' = F(u)$

(V) Diese neue DGL durch Trennung der Variablen lösen.

(VI) Rücksubstitution und Auflösen nach y.

Typ: $y' = F(ax + by + c)$

(I) Vergleich der *gegebenen* DGL mit der *allgemeinen* Form und Bestimmung von a, b, c und $F(u)$
(II) Substitution: $u = ax + by + c$ (☞ y und u sind Funktionen von x)
(III) Ableiten der Substitutionsgleichung aus (II): $u' = a + by'$
(IV) Zusätzlich y' durch $F(u)$ ersetzten: $u' = a + b \cdot F(u)$
(V) Diese neue DGL durch Trennung der Variablen lösen.
(VI) Rücksubstitution und Auflösen nach y.

Trennung der Variablen

Typ: $y' = f(x) \cdot g(y)$

(I) $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
(II) $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx \quad g(y) \neq 0$

Variation der Konstanten

Typ: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ (*)

(I) Homogene DGL aufschreiben $y_h' + f(x) \cdot y_h = 0$
(II) Formel für die Lösung dieser homogenen DGL: $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$
$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$ (ohne Integrationskonst.)
(III) Ansatz für die Lösung der inhomogenen DGL: In Gleichung (II) ersetzen von y_0 durch y und C durch eine noch zu bestimmende Funktion $K(x)$
(IV) Ableiten der Gleichung aus (III)
$y' = K'(x) \cdot e^{-F(x)} + K(x) \cdot (e^{-F(x)})'$ (Produkteregel)
(V) Setze y (aus (III)) und y' (aus (IV)) in die ursprüngliche DGL (*) ein.
(VI) Die linke Seite der Gleichung (V) sollte sich vereinfachen (2 identische Terme heben sich auf)
(VII) Löse die Gleichung (VI) nach $K'(x)$ auf.
(VIII) Bestimme $K(x)$ durch Integrieren von $K'(x)$
(Integrationskonst. beachten)
(IX) $K(x)$ aus (VIII) in (III) einsetzen und vereinfachen.

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)	$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)	$y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{cx}$
Fall 3: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x))$

Konstanten Koeffizienten

Typ: $y' + ay = g(x)$

(I) Vergleich der *gegebenen* DGL mit der *allgemeinen* Form $y' + ay = g(x)$ und Bestimmung von a und $g(x)$
(☞ Vorzeichen)
(II) Einsetzen in die Formel $y_0 = C \cdot e^{-ax}$ liefert die Lösung der zugehörigen homogenen DGL
(III) Mithilfe der Tabelle: Bestimmen des *Ansatzes* für die partikuläre Lösung y_p.
(IV) Bestimmen von y'_p, indem man den Ansatz für y_p (aus (III)) ableitet.
(V) Einsetzen von y_p (aus (III)) und y'_p (aus (IV)) in die DGL
(VI) Bestimmung der Parameter durch Koeffizientenvergleich. Dies ergibt y_p
(VII) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $y = y_0 + y_p$

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Konstanten Koeffizienten

Typ: $y'' + ay' + by = g(x)$

(I) Charakteristische Gleichung für die homogene Lösung $y_h'' + ay_h' + by_h = 0$ der DGL aufstellen: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
(II) Bestimmen der Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung.
(III) Aufstellen der allgemeinen Lösung gemäss nachfolgender Tabelle.
(IV) Bestimmen der Störfunktion $g(x)$
(V) Aus der Tabelle (links): Heraussuchen des *Ansatzes* für die partikuläre Lösung y_p
(VI) Bestimmen von y'_p und y''_p durch Ableiten des Ansatzes für y_p (aus (V))
(VII) Einsetzen von y_p (aus (V)) und y'_p, y''_p (aus (VI)) in die DGL
(VIII) Bestimmung der Parameter mithilfe eines Koeffizientenvergleiches. Dies ergibt y_p
(IX) Die allgemeine Lösung lautet $y = y_0 + y_p$

Schwingungen:

(1) Freie, ungedämpfte Schwingung	$F(t)=0,\ b=0$	$m\ddot{x}+cx=0$
(2) Freie, gedämpfte Schwingung	$F(t)=0$	$m\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$
(3) Erzwungene Schwingung	$F(t)=F_0\cdot\sin(\omega t)$ ω: Erregerkreisfrequenz	$m\ddot{x}+b\dot{x}+cx=F_0\cdot\sin(\omega t)$

Schwingungs-Typ		Funktion
Freie, ungedämpfte Schwingung		$x(t)=C_1\cdot\sin(\omega_0 t)+C_2\cdot\cos(\omega_0 t)$
Freie, gedämpfte Schwingung	schwache Dämpfung ($\delta<\omega_0$)	$x(t)=e^{-\delta t}\cdot(C_1\cdot\sin(\omega_d t)+C_2\cdot\cos(\omega_d t))$
	aperiodischer Grenzfall ($\delta=\omega_0$)	$x(t)=(C_1\cdot t+C_2)\cdot e^{-\delta t}$
	starke Dämpfung ($\delta>\omega_0$)	$x(t)=C_1\cdot e^{-k_1\cdot t}+C_2\cdot e^{-k_2\cdot t}$
Erzwungene Schwingung	schwache Dämpfung ($\delta<\omega_0$)	$x(t)=e^{-\delta t}\cdot(C_1\cdot\sin(\omega_d t)+C_2\cdot\cos(\omega_d t))$ $+A\cdot\sin(\omega t-\varphi)$

$\omega_0=\sqrt{\frac{c}{m}},\quad \delta=\frac{b}{2m},\quad {\omega_d}^2={\omega_0}^2-\delta^2$

$k_{1,2}=\delta\pm\sqrt{\delta^2-{\omega_0}^2},\quad \omega$: Erregerfrequenz

Partielle Funktion

$\varphi(x)=\varphi_{y_0}(x)=f(x,y_0)$ partielle Funktion in Richtung x durch y_0

$\psi(y)=\psi_{x_0}(x)=f(x_0,y)$ partielle Funktion in Richtung y durch x_0

Höhenlinien

$f(x,y)=c$ Kurve in der xy-Ebene

Partielle Differentiation

$f(x,y)$ $\quad f(x,y_0)=\varphi(x)$ $\quad f(x_0,y)=\psi(y)$

y_0 fest, x variabel $\quad$ x_0 fest, y variabel

$\varphi'(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f_x(x,y)$ $\quad \psi'(y)=\frac{\partial\psi}{\partial y}=f_y(x,y)$

Partiell differenzierbar

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;y_{0+\Delta y})-f(x_0;y_0)}{\Delta y}$

Höhere partielle Ableitungen

$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$

$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\quad f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Satz von Schwarz

Hat eine Funktion f von mehreren Variablen partielle Ableitungen von k-ter Ordnung und sind diese alle stetig, so ist bei den partiellen Ableitungen is und mit k-ter Ordnung die Reihenfolge der Differentiationen vertauschbar ($f_{xy}=f_{yx},\quad f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$, etc.)

Tangentialebene

Die Tangentialebene ist die Linearisierung von $f(x,y)$ um $P=(x_0,y_0,z_0)$.

$z=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+z_0$ mit $z_0=f(x_0,y_0)$

Gradient

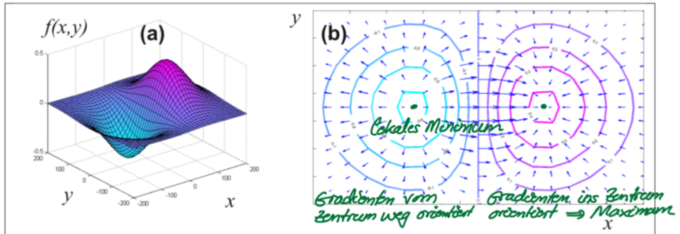
Gegeben ist eine partiell differenzierbare Funktion: $f:D\to\mathbb{R}$ in 2 Variablen. Dann ist der Gradient von f gegeben durch den Vektor:

$\vec{\nabla}f(x;y)=grad\ f(x;y)=\begin{pmatrix}f_x(x,y)\\f_y(x,y)\end{pmatrix}\quad \vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$ heisst «Nabla-Operator»

Steigung: $|\vec{\nabla}f(P(x_0,y_0,z_0)|$

Eigenschaften:

1. $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$ steht senkrecht auf der Höhenlinie von f durch $P'=(x_0,y_0)$
2. Er zeigt in die Richtung, in der der Graph von f an diese Stelle am steilsten ist.
3. Die zugehörige max Steigung ist durch den Betrag des Gradienten gegeben.



(a) Graph der Funktion f (b) Höhenlinien und Gradienten von f © Christophe Finot

Richtungsableitung

Gegeben ist die Funktion f in n Variablen und ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (also im Definitionsbereich von f). Dann ist die Richtungsableitung von f in der Richtung des Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ definiert durch:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{a}$ (skalare Grösse)

Das totale Differential

$dz = f_x(x_0; y_0) \cdot dx + f_y(x_0; y_0) \cdot dy \approx \Delta z$
heisst totales Differential der Funktion $f(x, y)$. Es beschreibt die Änderung des Funktionswerts z auf der im Berührungspunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ erreichten Tangentialebene an den Graphen von f.

Linearisierung der Funktion f

$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ für x und y in der Nähe von x_0 bzw. y_0.

Zweifachintegrale

Kartesische Koordinaten

Flächenelement $dA = dx \cdot dy$ bzw. $dA = dy \cdot dx$

Rechteck $A = \int_{x=a}^{b} \underbrace{\int_{y=c}^{d} f(x, y) dy}_{\text{inneres Integral wird zuerst berechnet}} \; dx$

Variable Grenzen $V = \int_{x=a}^{b} \underbrace{\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x, y) dy \, dx}_{\text{zuerst über variable Grenzen}}$

Polarkoordinaten

$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad y = r \cdot \sin(\varphi)$ $\quad$ für $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Flächenelement $dA = r \cdot dr \, d\varphi$

Fläche $\quad A = \iint_{(A)} 1 \, dA$

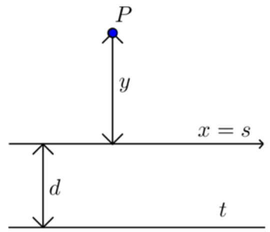
Schwerpunkt $\quad x_s = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x \, dA \qquad y_s = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y \, dA$

Flächenträgheitsmomente (axial) $I_x = \iint_{(A)} y^2 \, dA \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 \, dA$

Flächenträgheitsmomente (polar)

$I_p = \iint_{(A)} r^2 \, dA = \iint_{(A)} (x^2 + y^2) \, dA \qquad I_x + I_y = I_p$

Satz von Steiner



Gegeben ist eine Bezugsachse t parallel zu einer Bezugsachse s durch den Schwerpunkt des Bereichs (A). Der Abstand der beiden Achsen ist d. Dann gilt:
$I_t = I_s + d^2 \cdot A$ (Fläche)

$\Theta_a = \Theta_s + r_s^2 \cdot m$ (Masse)

Dreifachintegral

Kartesische Koordinaten

Volumenelement $dV = dx \, dy \, dz$

$\iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x, y, z) dz \, dy \, dx$

Zylinderkoordinaten

$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad z = z \qquad$ für $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Volumenelement $dV = r \cdot dr \, dz \, d\varphi = r \cdot dz \, dr \, d\varphi$

Volumen $\quad V = \iiint_{(V)} 1 \, dV$

Masse $\quad m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \, dV$

Schwerpunkt $\quad x_s = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} x \, dV \qquad y_s = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} y \, dV \qquad z_s = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z \, dV$

Massenträgheitsmoment $\quad J = \iiint_{(V)} \rho \cdot {r_A}^2 \, dV$

Vektoranalysis

Ebenes Vektorfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Räumliches Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird in diesem Zusammenhang auch als **Skalarfeld** bezeichnet.

Feldlinien
- Durch jeden Punkt des Vektorfeldes geht genau eine Feldlinie
- Feldlinien schneiden sich nie.

Der Tangentialvektor an die Feldlinie $\vec{r}(t)$ ist gegeben durch

$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$. Der Feldvektor $\vec{F}$ verläuft parallel dazu.

$\vec{F}(P) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$: $\det(\vec{F}, \dot{r}) = 0$ bzw. $\vec{F} \times \dot{r} = \vec{0}$

Differentialoperatoren

Gradient (Richtung der betragsmässig grössten Steigung in jedem Punkt)

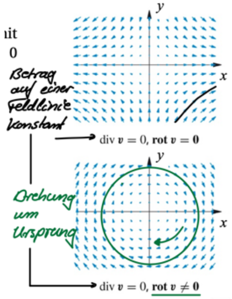
$$grad\ f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{F}$$ Potentialfeld, Gradientenfeld, konservativ

Falls Vektorfeld (Potentialfeld) $\vec{F}$ gegeben, Skalarfeld (Potential) f gesucht ist:

$\int \vec{F}_1\, dx = f_1(x,y,z) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z)$ ➔ Summanden vergleichen → $f(x,y,z)$

$\int \vec{F}_2\, dy = f_1(x,y,z) + \varphi_1(x) + \varphi_3(z)$

$\int \vec{F}_3\, dz = f_1(x,y,z) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$



Divergenz (Mass für die Quelldichte eines Vektorfeldes)

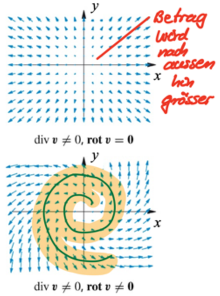
$$div\ \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial \vec{F_1}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F_2}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F_3}}{\partial z}$$

$div\ \vec{F} = 0 \to$ Vektorfeld in einem Bereich quellenfrei

$div\ \vec{F} < 0 \to$ Vektorfeld besitzt eine Senke, Flüssigkeit wird «vernichtet»

$div\ \vec{F} > 0 \to$ Vektorfeld besitzt eine Quelle, Flüssigkeit wird «erzeugt»

Rotation (Mass für die Wirbeldichte eines Vektorfeldes)



$$rot\ \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{E}$$ Wirbelfeld

$rot\ \vec{F} = 0 \to$ Vektorfeld in einem Bereich wirbelfrei

Skalarfeld f $\xrightarrow{\text{grad}}$ Vektorfeld $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ $\xrightarrow{\text{rot}}$ Vektorfeld $\vec{E} = \text{rot}\vec{F}$ $\xrightarrow{\text{div}}$ Skalarfeld div$\vec{F}$

$div\left(rot(\vec{F})\right) = 0$ und $rot\left(div(\vec{F})\right) = \vec{0}$ gilt immer!

$div(\vec{E}) = 0$ → $\vec{E} = rot(\vec{F})$ $rot(\vec{F}) = \vec{0}$ → $\vec{F} = grad\ f$

Kurvenintegrale

Linear $\vec{r}(t) = \vec{r}(P_1) + t \cdot \overline{P_1 P_2}$ **Kurve** $x(t) = t$ und $y(t) = f(t)$

Kreis $x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi)$ $0 \le \varphi \le 2\pi$

Arbeit $W = \int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)}_{\vec{r}\text{ in }\vec{F}\text{ einsetzen}} \cdot \dot{r}(t)\, dt$

Wegunabhängig (in Gebiet G)

- Das Integral hängt (ausser von $\vec{F}$) nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges C ab.
- $\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$
- $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld (konservativ) ➔ $\vec{F} = grad\ f = \vec{\nabla} f$
- $\vec{F}$ ist wirbelfrei → $rot\ \vec{F} = \vec{0}$

➔ $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1)$

Ziel: Beschreibung bzw. Annäherung einer periodischen Funktion f(x) durch Summe von Schwingungsfunktionen

1. Welche Periodizität hat f(x)?

$T = 2\pi$
$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$0 < T \neq 2\pi$
$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

2. Besitzt f(x) eine Symmetrie?
a) Ist f gerade, d.h. Graph achsensymmetrisch? $b_k = 0$
b) Ist f ungerade, d.h. Graph punktsymmetrisch? $a_k = 0$

JA | NEIN

Berechnung der Fourierkoeffizienten

im Reellen

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \cos(\omega k x)\, dx$

$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \sin(\omega k x)\, dx$

$0 \leq k < \infty$

$a_k = 2 \cdot Re\left(\hat{f}_k\right)$
$b_k = -2 \cdot Im\left(\hat{f}_k\right)$

im Komplexen

$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) \cdot e^{-j\omega k x} dx$

$-\infty < k < \infty$

Das Integrationsgebiet ist so zu wählen, dass man f(x) möglichst einfach beschreiben kann. Es muss die Länge T haben.

Fourierreihe

im Reellen

$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(\omega k x) + b_k \cdot \sin(\omega k x)\right)$

im Komplexen

$f(x) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{k\omega j x}$

k=0 offset → Verschiebung in y ist immer reell
"$\frac{a_0}{2} = Re(\hat{f}_0)$ ist Mittelwert von f(x) über [0,T]"

k ungerade: (2k-1)
k gerade: 2k

k=1 Grundschwingungen mit Frequenz $f_1 = \frac{1}{T}$
k>1 Oberschwingungen mit Frequenz $f_k = \frac{k}{T}$

⇓

$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot \sqrt{(Re(\hat{f}_k))^2 + (Im(\hat{f}_k))^2} = 2 \cdot |\hat{f}_k|$

Frequenzspektrum von f(x)

Fourierreihenapproximation

Ziel: Beschreibung bzw. Annäherung einer periodischen Funktion f(x) durch Summe von Schwingungsfunktionen

1. Welche Periodizität hat f(x)?

$$T = 2\pi \quad \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$0 < T \neq 2\pi \quad \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

2. Besitzt f(x) eine Symmetrie?

a) Ist f gerade, d.h. Graph achsensymmetrisch? $b_k = 0$

b) Ist f ungerade, d.h. Graph punktsymmetrisch? $a_k = 0$

JA

NEIN

Berechnung der Fourierkoeffizienten

im Reellen

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \cos(\omega k x)\, dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \sin(\omega k x)\, dx$$

$$0 \leq k < \infty$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= 2 \cdot Re\left(\widehat{f}_k\right) \\ b_k &= -2 \cdot Im\left(\widehat{f}_k\right) \end{aligned}}$$

im Komplexen

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) \cdot e^{-j\omega k x} dx$$

$$-\infty < k < \infty$$

Das Integrationsgebiet ist so zu wählen, dass man f(x) möglichst einfach beschreiben kann. Es muss die Länge T haben.

Fourierreihe

im Reellen

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(\omega k x) + b_k \cdot \sin(\omega k x)\right)$$

im Komplexen

$$f(x) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \cdot e^{k\omega j x}$$

k = 0 offset → Verschiebung in y ist immer reell

$\frac{a_0}{2} = Re(\widehat{f}_0)$ ist Mittelwert von f(x) über [0,T]

k = 1 Grundschwingungen mit Frequenz $f_1 = \frac{1}{T}$

k > 1 Oberschwingungen mit Frequenz $f_k = \frac{k}{T}$

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot \sqrt{(Re(\hat{f}_k))^2 + (Im(\hat{f}_k))^2} = 2 \cdot |\hat{f}_k|$$

⇓

Frequenzspektrum von f(x)

Übersicht über die besprochenen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lösungsverfahren für trennbare (separierbare) Differentialgleichungen

(a) DGL in expliziter Form $\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)}$

(b) Trennung der Variablen und Integration auf beiden Seiten (falls möglich!):

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx}$$

(d) Auflösen nach y (falls möglich!).

Lösungsverfahren für Differentialgleichungen vom Typ $\boxed{y' = F(ax+by+c)}$

(a) Wir vergleichen unsere Differentialgleichung mit der allgemeinen Form
$y' = F(ax+by+c)$ und bestimmen a, b, c und $F(u)$ (äussere Funktion).

(b) Substitution: $\boxed{u = ax+by+c}$ (y und u sind Funktionen von x !)

(c) Ableiten der Substitutionsgleichung (b): $u' = a + by'$

(d) In Gleichung (c) y' durch $F(u)$ ersetzen: $\boxed{u' = a + b\cdot F(u) = \big(a + b\cdot F(u)\big)\cdot 1}$

(e) Diese neue Differentialgleichung durch Trennung der Variablen lösen.

(f) Rücksubstitution und Auflösen nach y .

Lösungsverfahren für Differentialgleichungen vom Typ $\boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right)}$

(a) Wir vergleichen unsere Differentialgleichung mit der allgemeinen Form
$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ und bestimmen $F(u)$ (äussere Funktion).

(b) Substitution: $\boxed{u = \frac{y}{x}}$, d.h. $x\cdot u = y$ (y und u sind Funktionen von x !)

(c) Ableiten der Substitutionsgleichung (b): $u + x\cdot u' = y'$

(d) In (c) y' durch $F(u)$ ersetzen: $u + x\cdot u' = F(u) \Leftrightarrow \boxed{u' = (F(u) - u)\cdot 1/x}$

(e) Diese neue Differentialgleichung durch Trennung der Variablen lösen.

(f) Rücksubstitution und Auflösen nach y .

Lösungsverfahren „Variation der Konstanten" für lineare Differentialgleichungen

(a) Wir vergleichen unsere Differentialgleichung mit der allgemeinen Form
$\boxed{y' + f(x)\cdot y = g(x)}$ und bestimmen $f(x)$ und $g(x)$. **Achtung Vorzeichen!!!**

(b) Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$.

(c) Durch Einsetzen in die Formel $y_0 = C\cdot e^{-F(x)}$ erhalten wir die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(d) Wir ersetzen die Konstante C in y_0 durch eine noch zu bestimmende Funktion $K(x)$. So erhalten wir einen *Ansatz* für die allgemeine Lösung y .

(e) Die Funktion $K(x)$ lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$\boxed{K(x) = \int g(x)\cdot e^{F(x)}dx}$$

Integrationskonstante nicht vergessen!

(f) Nun setzen wir dieses $K(x)$ in den Ansatz aus (d) ein und erhalten so die allgemeine Lösung $\boxed{y = y(x) = K(x)\cdot e^{-F(x)}}$

Lösungsverfahren „Aufsuchen einer partikulären Lösung" für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

(a) Wir vergleichen unsere Differentialgleichung mit der allgemeinen Form
$\boxed{y' + a\cdot y = g(x)}$ und bestimmen a und $g(x)$. **Achtung Vorzeichen!!!**

(b) Durch Einsetzen in die Formel $\boxed{y_0 = C\cdot e^{-ax}}$ erhalten wir die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(c) Aus der Tabelle bestimmen wir den *Ansatz* für die partikuläre Lösung y_p .

(d) Wir bestimmen y_p', indem wir den Ansatz für y_p aus (c) ableiten.

(e) Nun setzen wir das y_p aus (c) und das y_p' aus (d) in die Differentialgleichung ein.

(f) Durch Koeffizientenvergleich bestimmen wir die Parameter und erhalten so y_p .

(g) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch: $\boxed{y = y_0 + y_p}$.

Alternativ Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{\} = \mathrm{L}\{\}$

$$\boxed{\mathrm{L}\{y' + a\cdot y\} = L\{y'\} + a\cdot L\{y\} = s\cdot Y(s) - y(0) + a\cdot Y(s) = L\{g(x)\}}$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1. Ordnung: $y' + ay = g(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
4. Polynomfunktion vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$ 6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$ 7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

„Stellparameter“: $c_0, c_1, \ldots, c_n;\quad C, C_1, C_2;\quad \varphi$

Anmerkungen zur Tabelle

(1) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* („Stellparameter“) sind so zu bestimmen, dass der Ansatz die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.

(2) Ist die Störfunktion $g(x)$ eine *Summe* aus *mehreren* Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz für y_p als *Summe* der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.

(3) Ist die Störfunktion $g(x)$ ein *Produkt* aus *mehreren* Faktoren, so werden die Ansätze für die einzelnen Faktoren miteinander *multipliziert*.

2. Ordnung: $y'' + ay' + by = g(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & \text{für } a \neq 0,\ b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) c ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ *Parameter:* A
	(2) c ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ *Parameter:* A
	(3) c ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$ *Parameter:* A
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine *Linearkombination* aus beiden Funktionen	(1) $j\beta$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter:* A, B bzw. C, φ
	(2) $j\beta$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = C \cdot x \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter:* A, B bzw. C, φ

Anmerkungen zur Tabelle

(1) Der jeweilige Lösungsansatz gilt auch dann, wenn die Störfunktion zusätzlich noch einen *konstanten Faktor* enthält.

(2) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* („Stellparameter“) sind so zu bestimmen, dass der Ansatz die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.

(3) Ist die Störfunktion $g(x)$ eine *Summe* aus *mehreren* Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz für y_p als *Summe* der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.

(4) Ist $g(x)$ ein *Produkt* aus mehreren „Störfaktoren“, so erhält man in vielen (aber nicht allen) Fällen einen Lösungsansatz für y_p, indem man die Lösungsansätze der „Störfaktoren“ miteinander *multipliziert*.

Übersicht: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösungsverfahren für homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(a) Charakteristische Gleichung aufstellen:
Zur DGL $y'' + ay' + by = 0$ gehört die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

(b) Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung bestimmen.

(c) Aufstellen der allgemeinen Lösung gemäss nachfolgender Tabelle.

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)	$y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)	$y = (C_2 \cdot x + C_1) \cdot e^{cx}$
Fall 3: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x))$

Lösungsverfahren „Aufsuchen einer partikulären Lösung" für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schritt 1:
Lösung y_0 der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bestimmen (s.o.).

Schritt 2:
(a) Bestimmen der Störfunktion $g(x)$.

(b) Aus der Tabelle bestimmen wir den *Ansatz* für die partikuläre Lösung y_p.
Achtung: Tabelle für 2. Ordnung verwenden!

(c) Wir bestimmen $y_p{}'$ und $y_p{}''$, indem wir den Ansatz für y_p aus (b) ableiten.

(d) Nun setzen wir das y_p aus (b) und das $y_p{}'$ und $y_p{}''$ aus (c) in die Dgl ein.

(e) Durch Koeffizientenvergleich bestimmen wir die Parameter und erhalten so y_p.

(f) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch: $y = y_0 + y_p$.

Schwingungen

Freie, ungedämpfte Schwingung	$m\ddot{x} + cx = 0$
	$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$

Freie, gedämpfte Schwingung	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$
schwache Dämpfung ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t))$
aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$)	$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-\delta \cdot t}$
starke Dämpfung ($\delta > \omega_0$)	$x(t) = C_1 \cdot e^{-k_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-k_2 \cdot t}$

Erzwungene Schwingung	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \cdot \sin(\omega t)$
schwache Dämpfung ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)) + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Dabei gilt: $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $\delta = b/2m$, $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $k_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, ω: Erregerfrequenz