<u>Mechanik Physik III (mayt)</u>

Grundlagen

Länge: $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

Winkel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Kartesische Koordinaten:

$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

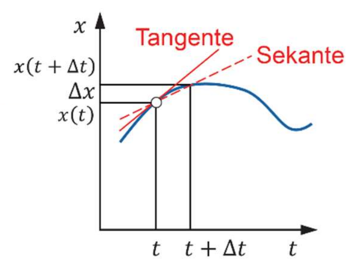
$|\overrightarrow{e_x}| = |\overrightarrow{e_y}| = |\overrightarrow{e_z}| = 1 \qquad \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_z} = 1$

Ortsvektor

$$\vec{r}_P = x \cdot \overrightarrow{e_x} + y \cdot \overrightarrow{e_y} + z \cdot \overrightarrow{e_z} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bahnkurve (Trajektorie)

$$\vec{r}_P = x(t) \cdot \overrightarrow{e_x} + y(t) \cdot \overrightarrow{e_y} + z(t) \cdot \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



Geschwindigkeit

Mittlere Geschwindigkeit (Steigung der Sekante): $\bar{v}(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Momentane Geschwindigkeit (Steigung der Tangente): $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Schnelligkeit: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung (Steigung der Sekante): $\bar{a}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

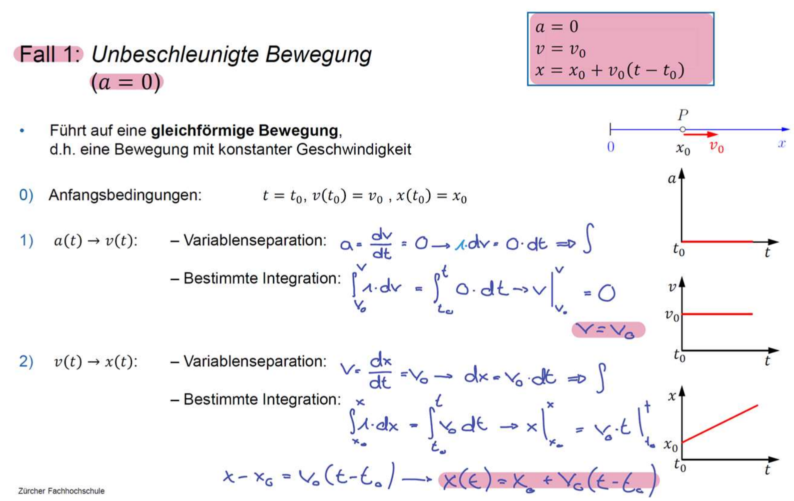
Momentane Beschleunigung (Steigung der Tangente): $v(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$

Schnelligkeit: $a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

Kinematische Grundaufgaben

$Fall\ 1$:	unbeschleunigte Bewegung	$a = 0$
$Fall\ 2$:	gleichmässig beschleunigte Bewegung	$a = a_0 = const.$
$Fall\ 3$:	zeitabhängige Beschleunigung	$a = a(t)$
$Fall\ 4$:	geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung	$a = a(v)$
$Fall\ 5$:	wegabhängige Beschleunigung	$a = a(x)$

Fall 1: unbeschleunigte Bewegung


Fall 1: *Unbeschleunigte Bewegung* $(a = 0)$

$a = 0$
$v = v_0$
$x = x_0 + v_0(t - t_0)$

- Führt auf eine **gleichförmige Bewegung**, d.h. eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

0) Anfangsbedingungen: $t = t_0,\ v(t_0) = v_0\ ,\ x(t_0) = x_0$

1) $a(t) \to v(t)$:
– Variablenseparation: $a = \frac{dv}{dt} = 0 \to 1 \cdot dv = 0 \cdot dt \Rightarrow \int$
– Bestimmte Integration: $\int_{v_0}^{v} 1 \cdot dv = \int_{t_0}^{t} 0 \cdot dt \to v \Big|_{v_0}^{v} = 0$
$v = v_0$

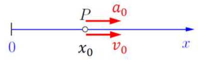
2) $v(t) \to x(t)$:
– Variablenseparation: $v = \frac{dx}{dt} = v_0 \to dx = v_0 \cdot dt \Rightarrow \int$
– Bestimmte Integration: $\int_{x_0}^{x} 1 \cdot dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt \to x \Big|_{x_0}^{x} = v_0 \cdot t \Big|_{t_0}^{t}$
$x - x_0 = v_0(t - t_0) \longrightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$

Zürcher Fachhochschule

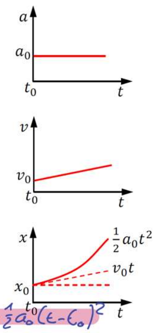
Fall 2: gleichmässig beschleunigte Bewegung

$a = a_0$
$v = v_0 + a_0(t - t_0)$
$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$

Fall 2: *Gleichmässig beschleunigte Bewegung* $(a = a_0)$



- Eine **gleichmässig beschleunigte Bewegung** ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung (Beispiel: Freier Fall, senkrechter Wurf → $a = g = 9.81\, m/s^2$)



0) Anfangsbedingungen: $t = t_0,\ v(t_0) = v_0\ ,\ x(t_0) = x_0$

1) $a(t) \to v(t)$: – Variablenseparation: $a = \frac{dv}{dt} = a_0 \longrightarrow a_0 \cdot dt = dv \longrightarrow \int$

– Bestimmte Integration: $\int_{t_0}^{t} a_0\, dt = \int_{v_0}^{v} 1 \cdot dv \to a_0(t - t_0) = v - v_0$

$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$

2) $v(t) \to x(t)$: – Variablenseparation: $v = \frac{dx}{dt} = v(t) \longrightarrow dx = v(t)\,dt \longrightarrow \int$

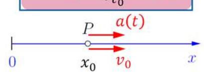
– Bestimmte Integration: $\int_{x_0}^{x} 1\, dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$\Rightarrow x - x_0 = v_0 \cdot t \Big|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}a_0 t^2 \Big|_{t_0}^{t} + a_0 t_0 t \Big|_{t_0}^{t} \to x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$

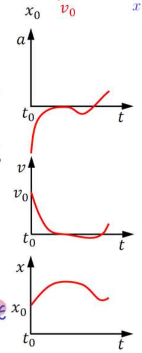
Fall 3: zeitabhängige Beschleunigung

$a = a(t)$
$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$
$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$

Fall 3: *Zeitabhängige Beschleunigung* $(a = a(t))$



- Fall 1 und Fall 2 sind Spezialfälle des Falls 3 mit einer allgemeinen, zeitabhängigen Beschleunigung



0) Anfangsbedingungen: $t = t_0,\ v(t_0) = v_0\ ,\ x(t_0) = x_0$

1) $a(t) \to v(t)$: – Variablenseparation: $a = \frac{dv}{dt} = a(t) \longrightarrow dv = a(t)\,dt \longrightarrow \int$

– Bestimmte Integration: $\int_{v_0}^{v} 1 \cdot dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \to v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$

$\Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$

2) $v(t) \to x(t)$: – Variablenseparation: $v = \frac{dx}{dt} = v(t) \longrightarrow dx = v(t)\,dt \longrightarrow \int$

– Bestimmte Integration:

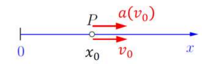
$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \to x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

Fall 4: geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

$a = a(v)$
$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}\mathrm{d}v = f(v) \to v(t) = F(t)$
$x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}\mathrm{d}v = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)\mathrm{d}t$

Fall 4: *Geschwindigkeitsabhängige Beschl.* $a = a(v)$

- Tritt beispielsweise bei aerodynamischem Widerstand auf



0) Anfangsbedingungen: $t = t_0,\ v(t_0) = v_0\ ,\ x(t_0) = x_0$

1) $a(v) \to v(t)$: – Variablenseparation: $a = \frac{dv}{dt} = a(v) \longrightarrow \frac{1}{a(v)}dv = dt \Rightarrow \int$

2) – Bestimmte Integration: $\int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}dv = \int_{t_0}^{t} dt \to t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}dv \to t(v) = f(v)$

Umkehrfunktion
$F(t) = v(t)$

2a) $v(t) \to x(t)$: – Bestimmte Integration:

$v = \frac{dx}{dt} \to v \cdot dt = dx \to \int_{t_0}^{t} v\, dt = \int_{x_0}^{x} dx \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

oder

2b) $a(v) \to x(t)$: – Kettenregel:

$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \to \frac{v}{a(v)}dv = dx \to \int$

– Bestimmte Integration:

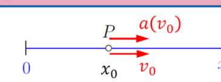
$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}dv \to x(v) = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}dv$

Fall 5: wegabhängige Beschleunigung

$a = a(x)$
$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x}$ v(t) Ableiten
$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(x)}\mathrm{d}x = g(x) \to x(t) = G(t)$

Fall 5: *Wegabhängige Beschleunigung* $a = a(x)$

- Tritt beispielsweise bei Pendeln oder Schwingungen auf



0) Anfangsbedingungen: $t = t_0,\ v(t_0) = v_0\ ,\ x(t_0) = x_0$

1) $a(x) \to v(x)$: – Kettenregel: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \longrightarrow a(x)\,dx = v\,dv \longrightarrow \int$

– Bestimmte Integration:

$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} v\, dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \Rightarrow v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot \int_{x_0}^{x} a(x)dx}$ v(x) Phasenkurve

2) $v(x) \to x(t)$: – Variablenseparation: $v = \frac{dx}{dt} \to \frac{1}{v}dx = dt \longrightarrow \int$

– Bestimmte Integration:

$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(x)} dx \longrightarrow t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(x)} dx = f(x) \xrightarrow{\text{Umkehrfunktion}} F(t) = x(t)$

Fall	Gegeben	Gesuchte Grössen	
1	$a = 0$	$v = v_0 = const.$	$x = x_0 + v_0(t - t_0)$
2	$a = a_0$	$v = v_0 + a_0(t - t_0)$	$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$
3	$a = a(t)$	$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$	$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$
4	$a = a(v)$	$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)} dv = f(v)$ → Umkehrfunktion $F(t) = v$	$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)dt$
5	$a = a(x)$	$v(x)$: $v^2 = {v_0}^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)dx$ $v(t) = \dot{x}$	$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(x)} dx = g(x)$ → Umkehrfunktion $x = G(t)$

Phasenkurve $v(x)$ für Fälle 1-4: 1) Auflösen $v(t) \rightarrow t(v)$, 2) Einsetzen $t(v) \rightarrow x(t)$

Koordinatensysteme

Kartesisches Koordinatensystem (ebene Bewegung)

Ortsvektor: $\vec{r}_P(t) = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \overrightarrow{e_x} + y(t) \cdot \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y}$

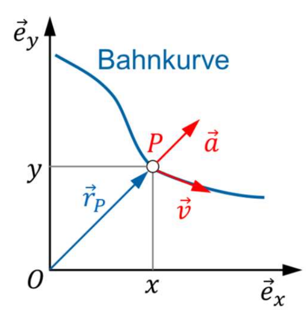
Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y}$

Kartesisches Koordinatensystem (räumliche Bewegung)

Ortsvektor: $\vec{r}_P(t) = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \overrightarrow{e_x} + y(t) \cdot \overrightarrow{e_y} + z(t) \cdot \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

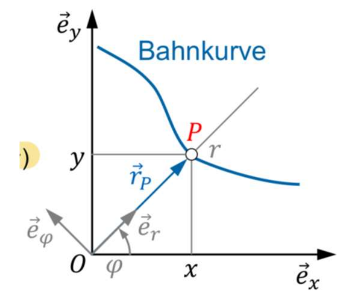
Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$



Polarkoordinaten (ebene Bewegung)

Basisvektoren:
$\vec{e}_r = \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \sin(\varphi(t))\,\vec{e}_y$
$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi(t))\,\vec{e}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{e}_y$



Zeitableitung polarer Basisvektoren:
$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ $\qquad \ddot{\vec{e}}_r = \ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}^2\vec{e}_r$
$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$ $\qquad \ddot{\vec{e}}_\varphi = -\ddot{\varphi}\vec{e}_r - \dot{\varphi}^2\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi$

Ortsvektor: $\vec{r}_P(t) = r\,\vec{e}_r = r(\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y)$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = v_r(t)\vec{e}_r + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi$
Radialgeschwindigkeit: $v_r(t) = \dot{r}$
Zirkulargeschwindigkeit: $v_\varphi(t) = r\dot{\varphi} = r\omega$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = a_r(t)\vec{e}_r + a_\varphi(t)\vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega)\vec{e}_\varphi$
Radialbeschleunigung: $a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$
Zirkularbeschleunigung: $a_\varphi(t) = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}$

SPEZIALFALL: Ebene Kreisbewegung

Ortsvektor: $\vec{r}_P = r\,\vec{e}_r$
Geschwindigkeit: $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\varphi$
Beschleunigung: $\vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r + r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$
Zentripetalbeschleunigung: $\overrightarrow{a_r} = -r\omega^2$
Zirkular-/Umfangsbeschleunigung: $\overrightarrow{a_\varphi} = r\dot{\omega}$

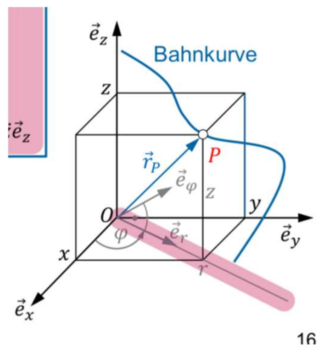
Zylinderkoordinatensystem (räumliche Bewegung)

Ortsvektor: $\vec{r}_P(t) = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = v_r(t)\vec{e}_r + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi + v_z(t)\vec{e}_z = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = a_r(t)\vec{e}_r + a_\varphi(t)\vec{e}_\varphi + a_z(t)\vec{e}_z = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

$$r = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}$$



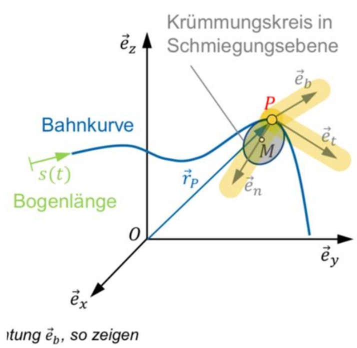
Natürliche Koordinaten (räumliche Bewegung)

Basisvektoren

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

$$\vec{e}_t = \frac{\dot{\vec{e}}_t}{|\dot{\vec{e}}_t|} = \vec{e}_b \times \vec{e}_t$$



Ortsvektor:

$y(x)$ $(eben)$: $\quad s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$

$\vec{r}(t)$: $\quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_P(s(t))$$

$$s(t) = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a_t(v)}\,dv$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}_P = \frac{d\vec{r}_P}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{e}_t = \dot{s}\vec{e}_t$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$d\vec{r}_P = ds\vec{e}_t$$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{v} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$

Bahnbeschleunigung: $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$

Normalbeschleunigung: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+{y'}^2)^{3/2}}$ ebene Kurve

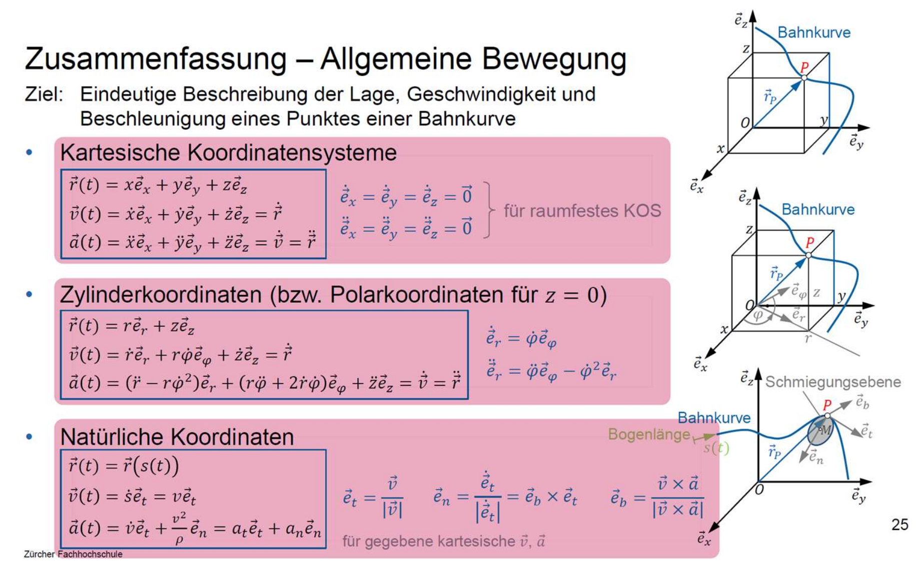
$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$ $\vec{r}(t)$ kartesisch

SPEZIALFALL: Kreisbewegung

Ortsvektor: $\vec{r}_P = s(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t = r\omega\vec{e}_t$

Beschleunigung: $\vec{a} = r\dot{\omega}\vec{e}_t + \frac{(r\omega)^2}{\rho}\vec{e}_n$



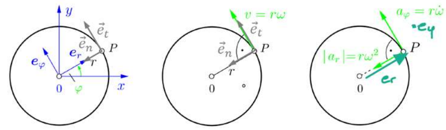
Zusammenfassung – Spezialfall: Kreisbewegung

Wir betrachten eine ebene Kreisbewegung mit Radius $r = const$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$

- Kartesische Koordinatensysteme

$$\vec{r}(t) = r\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + r\sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{v}(t) = -r\omega\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + r\omega\cos(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{a}(t) = -r\omega^2\cos(\varphi)\,\vec{e}_x - r\omega^2\sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$

$\varphi = \int \omega(t)\,dt$ → nur für $\omega = const.$ gilt: $\varphi = \omega t$



- Polarkoordinaten

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi = r\omega\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega)\vec{e}_\varphi = -r\omega^2\vec{e}_r + r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$

$v_r = \dot{r}$ … *Radialgeschwindigkeit*
$v_\varphi = r\omega$ … *Zirkulargeschwindigkeit*

$a_r = \ddot{r} - r\omega^2$ … *Radialbeschleunigung*
$a_\varphi = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega$ … *Zirkularbeschleunigung*

→ für Kreisbewegung gilt: $\ddot{r} = \dot{r} = 0$

→ Warum unterscheidet sich Vorzeichen der Zentripetalbeschleunigung?

- Natürliche Koordinaten

$$s(t) = r\varphi(t)$$
$$\vec{v}(t) = (\dot{r}\varphi + r\dot{\varphi})\vec{e}_t = r\dot{\varphi}\vec{e}_t = r\omega\vec{e}_t$$
$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_t + r\dot{\varphi}^2\vec{e}_n = r\dot{\omega}\vec{e}_t + r\omega^2\vec{e}_n$$

$v = r\omega$ … *Bahngeschwindigkeit*

$a_t = r\dot{\omega}$ … *Bahnbeschleunigung*
$a_n = r\omega^2$ … *Normal- / Zentripetalbeschleunigung*

26

Kinetik

Grundbegriffe

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Kraft: $d\vec{p} = \vec{F}dt$

Kinetische Energie: $E = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}mv^2$

Trägheitsgesetz (I. Axiom Newtons)

Es existiert ein Bezugssystem *(Inertialsystem)*, bezüglich dessen jeder Massenpunkt in *Ruhe* oder in *geradlinig, gleichförmiger Bewegung* bleibt, wenn keine Kräfte auf ihn wirken.

Ruhe: $\vec{v} = 0$ → $\vec{p} = 0$ → $d\vec{p} = 0$

Geradlinig, gleichförmige Bewegung: $\vec{v} = const$ → $\vec{p} = const \neq 0$

Es wirkt keine Kraft auf das System!

Bewegungsgesetz (II. Axiom Newtons)

Die zeitliche Änderung des *Impulses* ist gleich der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft.

Zeitliche Änderung des Impulses: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

SPEZIALFALL: Masse bleibt konstant $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

Actio – Rectio (III. Axiom Newtons)

Kräfte treten immer paarweise auf. Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht mit einer *gleich grossen*, aber *entgegengerichteten* Kraft von B auf A einher.

$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$

Bewegungsarten nach Kräften

Freie Bewegung (Wurf): Bewegungsfreiheitsgrade werden in *keiner Richtung* durch Kräfte eingeschränkt. (z.B. schiefer Wurf)

Geführte Bewegung: Werden die Anzahl Bewegungsfreiheitsgrade durch *Bindungen oder Führungen* eingeschränkt, so wirken *Zwangs- bzw. Führungskräfte* auf den Massenpunkt (z.B. Normalkraft, wenn MP sich auf einer Ebene bewegt)

Widerstandsbehaftete Bewegung: Durch die Bewegung selbst entstehen *Widerstandskräfte* als eingeprägte Kräfte, welche *von der Bewegung abhängen und ihr entgegenwirken*. Diese sind immer *tangential zur Bahn* gerichtet. (z.B. Reibungskraft, laminare oder turbulenter Strömungswiderstand)

Coulomb'sche Reibungskraft: $R = \mu N$
laminare Strömung (Stokes): $F_W = kv$
turbulente Strömung: $F_W = kv^2 = c_W\frac{\rho}{2}A_s v^2$

c_W=Widerstandsbeiwert, ρ=Dichte des Mediums,
A_s=Projektion des Körpers auf Ebene ⊥ Strömung

Lösungsschema

0) **Analyse** (Bewegungstyp, welche Kräfte wirken, Inertialsystem, gegeben/gesucht?)
1) **Freischneiden** (eingeprägte Kräfte, Zwangskräfte und Widerstandskräfte sowie Beschleunigungen und Geschwindigkeiten eintragen)
2) **Bewegungsgleichungen / Kräftesatz aufstellen** (in relevante Richtungen: wie Gleichgewicht, die rechte Seite ist jedoch nicht Null sondern $m\vec{a}$)
3) **Integration der Bewegungsgleichung** (Kinematisches Grundproblem, Anfangsbedingungen /Randbedingungen)
4) **Auflösen**

Impuls

Bewegungsgleichung / Kräftesatz / Schwerpunktsatz: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

Impulssatz: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \xrightarrow{\int dt} m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt$

Impulserhaltung: $\vec{p} = m\vec{v} = m\vec{v}_0 = const.$

Drehimpuls: $\vec{M}^{(0)} = \vec{r} \times \vec{F}$ → $|\vec{M}^{(0)}| = M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin(\varphi) = h \cdot F$

$\vec{L}^{(0)} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ →
$|\vec{L}^{(0)}| = |\vec{r}| \sin(\varphi)\, m|\vec{v}| = r_\perp mv = \underbrace{m(xv_y - yv_x)}_{ebene\ Bewegung}$

Momentensatz: $\frac{d\vec{L}^{(0)}}{dt} = \vec{M}^{(0)}$

Drehimpulserhaltung: $\vec{L}^{(0)} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v_0} = const.$

Zentralbewegung: $\vec{L}^{(0)} = 2m\frac{d\vec{A}}{dt}$

$\frac{\vec{L}^{(0)}}{dt} = \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 0$

Ebene Kreisbewegung: $\frac{\vec{L_z}^{(0)}}{dt} = \vec{M_z}^{(0)}$

$L_z^{(0)} = mrv = mr^2\omega$

Massenträghietsmoment

$L_z^{(0)} = mrv = mr^2\omega = \Theta^{(0)}\omega$

$\Theta^{(0)}\ddot{\varphi} = \Theta^{(0)}\dot{\omega} = M_z^{(0)}$ a

---

Arbeit

$W = Fs = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos(\alpha)$

Zwangskräfte stehen immer senkrecht zur Bahn, daher verrichten sie keine Arbeit!

Leistung

$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$1\ PS = 0.735\ kW \rightarrow 1\ kW = 1.36\ PS$
(Glühlampe 15-300W, Waschmaschine 2-3.5 kW, Kernkraftwerk 1 GW)

Wirkungsgrad

$\eta = \frac{W_N}{W_A}$ (Verhältnis Nutz- zu aufgewendeter Arbeit)
(Otto-Motor 35-40%, Solarzelle 5-17%, Wasserkraft 80-90%)

Momentaner Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_N}{P_A}$

Energie und Arbeit

Kinetische Energie: $E_k = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$

$E_k = \frac{1}{2}m\vec{v_s}^2 + \frac{1}{2}\Theta_z^{(S)}\omega^2$

Arbeitssatz: $m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ $\qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r}$

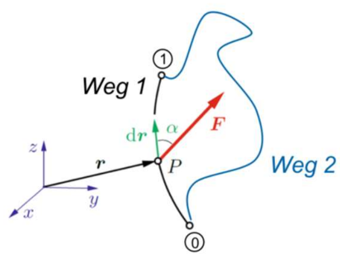
$E_{k,1} - E_{k,0} = W$ $\qquad \frac{m{\vec{v}_1}^2}{2} - \frac{m{\vec{v}_0}^2}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r}$

Konservative Kräfte: $\vec{F} = -grad(E_P) = -\left(\frac{dE_P}{dx}\vec{e}_x + \frac{dE_P}{dy}\vec{e}_y + \frac{dE_P}{dz}\vec{e}_z\right) = -\nabla E_P$

Gravitationspotenzial: $E_P = mgz + E_{P,0}$

Energiesatz: $E_{k,0} + E_{P,0} = E_{k,1} + E_{P,1} = const.$

$W_{0\to1} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} dE_P \underbrace{= -(E_P(\vec{r}_1) - E_P(\vec{r}_0))}_{nur\ vom\ Endpunkt\ abhängig}$ die Arbeit, welche eine konservative Kraft zwischen zwei Punkten einer Bahn verrichtet ist unabhängig vom Weg (Arbeit ist gleich für Weg 1 oder Weg 2)



Konsequenzen für konservative Kräfte:

- Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist Null ($\oint \vec{F}d\vec{r} = 0$
- Arbiet ist wirbelfrei ($rot(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = 0$
- Potentielle Energie hängt zwar von Bezugssystem (Nullniveau) ab, aber die Differenz zwischen zwei Lagen 0 und 1 ist davon unabhängig.

Potentiale

Gravitationspotential: Nahfeld: $E_P = Gz = mgz$

Fernfeld: $E_P = -f\frac{Mm}{r}$

Federpotential: Federkraft: $E_P = \frac{1}{2}cx^2$

Drehfeder: $E_P = \frac{1}{2}c_T\varphi^2$

Lösungsschema: Arbeitssatz / Energiesatz

0) **Analyse:** (Bewegungstyp, welche Kräfte wirken, konservative / nicht-konservative Bereiche)
   → konservative Bereiche: Energiesatz (oder Arbeitssatz)
   → nicht-konservative Bereiche: Arbeitssatz
1) **Freischnitt:** (im ausgelenkten Zustand für jeden Bereich, Nullniveau, Koordinaten /Geschwindigkeit / Beschleunigung, eingeprägte / Zwangs- / Widerstandskräfte einzeichnen)
2) **Arbeitssatz / Energiesatz:** (kinetische, potentielle Energien in relevanten Zuständen aufstellen, in Arbeits-/Energiesatz einsetzen)
3) **Auflösen**

Massenpunkt-System

Freiheitsgrade (eben): $f = 2n - r$ $\quad n$: #Massenpunkte $\quad r$: #Bindungen

Freiheitsgrade (raum): $f = 3n - r$ $\quad n$: #Massenpunkte $\quad r$: #Bindungen
für $n > 3$ immer $f = 6$

Bewegungsgesetz für die Masse m_i: $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$

Schwerpunktsatz: $m\vec{a}_s = \vec{F} \;\rightarrow\; m\ddot{x}_s = F_x \quad m\ddot{y}_s = F_y \quad m\ddot{z}_s = F_z$

Gesamtimpuls: $\vec{p} = m\vec{v}_s$

Impulsänderung: $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}_s = \vec{F}$

Impulssatz: $\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \hat{\vec{F}}$

Impulserhaltungssatz: $\vec{p} = m\vec{v}_s = \vec{p}_0 = const. \quad (\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \hat{\vec{F}} = 0)$

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L}^{(0)} = \sum_i {\vec{L}_i}^{(0)} = \sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$

Momentensatz: $\dot{\vec{L}}^{(0)} = \vec{M}^{(0)} \;\rightarrow\; \dot{L}_x = M_x \quad \dot{L}_y = M_y \quad \dot{L}_z = M_z$

Massenträgheitsmoment: $\Theta_a = \sum_i m_i{\vec{r}_i}^2$

Bewegungsgesetz: $\Theta_a\ddot{\varphi} = M_a$

Massenträgheitstensor: $\Theta_a = \int r^2 dm$

$$\Theta_x = \int (y^2 + z^2) dm \qquad \Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -\int xy\, dm$$
$$\Theta_y = \int (z^2 + x^2) dm \qquad \Theta_{yz} = \Theta_{zy} = -\int yz\, dm$$
$$\Theta_z = \int (x^2 + y^2) dm \qquad \Theta_{zx} = \Theta_{xz} = -\int xz\, dm$$

$$\Theta_a = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{L}}_a = \Theta_a \cdot \dot{\vec{\omega}}_z = \vec{M}_a$$

Lösungsschema: Ermittlung der Kräfte und Bewegung

0) **Analyse:** (Bewegungstyp, Anzahl Massen/ Freiheitsgrade, wirkende Kräfte, Bindungsgleichungen aufstellen, Inertialsystem, ggbf. Massenträgheitsmoment berechnen, gegeben/gesucht?)
1) **Freischneiden in ausgelenkter Lage:** (eingeprägte Kräfte, Zwangskräfte und Widerstandskräfte sowie Lage, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten eintragen)
2) **Bewegungsgesetz aufstellen:** (Schwerpunkt-/Momentensatz für jede Masse in relevante Richtungen)
3) **Integration der Bewegungsgleichung:** (Kinematisches Grundproblem, Anfangsbedingungen / Randbedingungen)
4) **Auflösen**

Koordinatentransformation

Rotation

um x_3 mit γ

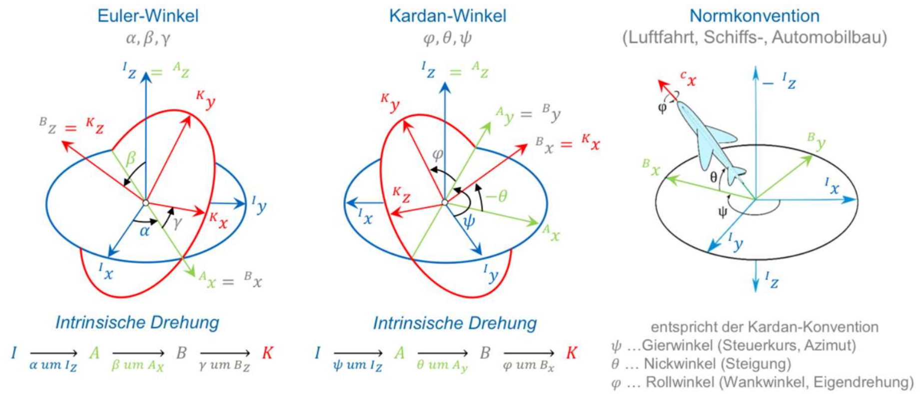
$$^{KI}R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um x_2 mit β

$$^{KI}R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

um x_1 mit α

$$^{KI}R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



Drehung um Achse

- Jeder materielle Punkt P bewegt sich auf einer Kreisbahn, deren Ebene senkrecht zur Drehachse steht
- Der Fahrstrahl zu jedem materiellen Punkt P überstreicht zu gleichen Zeit denselben Winkel φ
- → Jeder Punkt des Starrkörpers besitzt dieselbe Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ und Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$
- Jeder Punkt P mit senkrechtem Abstand r von der Drehachse besitzt folgende Geschwindigkeit und Beschleunigung:
  - $\vec{v}_P = v_\varphi \vec{e}_\varphi = r\omega \vec{e}_\varphi$
  - $\vec{a}_P = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi = -r\omega^2 \vec{e}_r + r\dot{\omega} \vec{e}_\varphi$

Drehung um Punkt

- Jeder materielle Punkt P führt momentan eine Rotation um die momentane Drehachse aus und bewegt sich so momentan auf einer Kreisbahn
- Jeder beliebige Punkt P überstreicht momentan in der Zeit dt den Winkel $d\varphi$ auf seiner Kreisbahn und erfährt die momentane Verschiebung $d\vec{r}_P$
  - $d\vec{r}_P = rd\varphi\vec{e}_\varphi = r\vec{e}_\varphi d\varphi = (\vec{e}_\omega \times r\vec{e}_r)d\varphi = (\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{AP})d\varphi$
  - $|\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{AP}| = r$ und $(\vec{e}_\omega \times r\vec{e}_r) \parallel \vec{e}_\varphi$
- Mit dem infinitesimalen Drehvektor $d\vec{\varphi} = d\varphi\vec{e}_\omega$ wird der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\omega$
- Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P mit Ortsvektor $\vec{r}_{AP}$ vom fixen Drehpunkt A ist dann für die momentane Starrkörperrotation
  - $\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$
  - $v_P = |\vec{\omega}||\vec{r}_{AP}|\sin(\alpha) = r\omega$

Translation

- Jeder materielle Punkt erfährt in der Zeit dt die Verschiebung $d\vec{r}$
- So ist auch die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ und die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ für jeden Punkt gleich
- Die Bahnkurven aller Punkte des Starrkörpers haben dieselbe Form
- → Bei der Translation repräsentiert die Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes (insbesondere des Schwerpunkts) die Bewegung des ganzen Körpers.

Allgemeine Starrkörperbewegung

Eben (Zylinderkoordinaten)

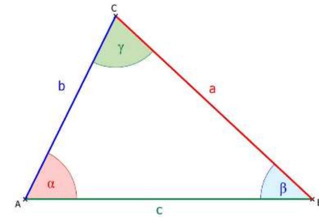
$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$
$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_A + r\omega\vec{e}_\varphi$
$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{AP}^\varphi + \vec{a}_{AP}^r = \vec{a}_A + r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - r\omega^2\vec{e}_r$

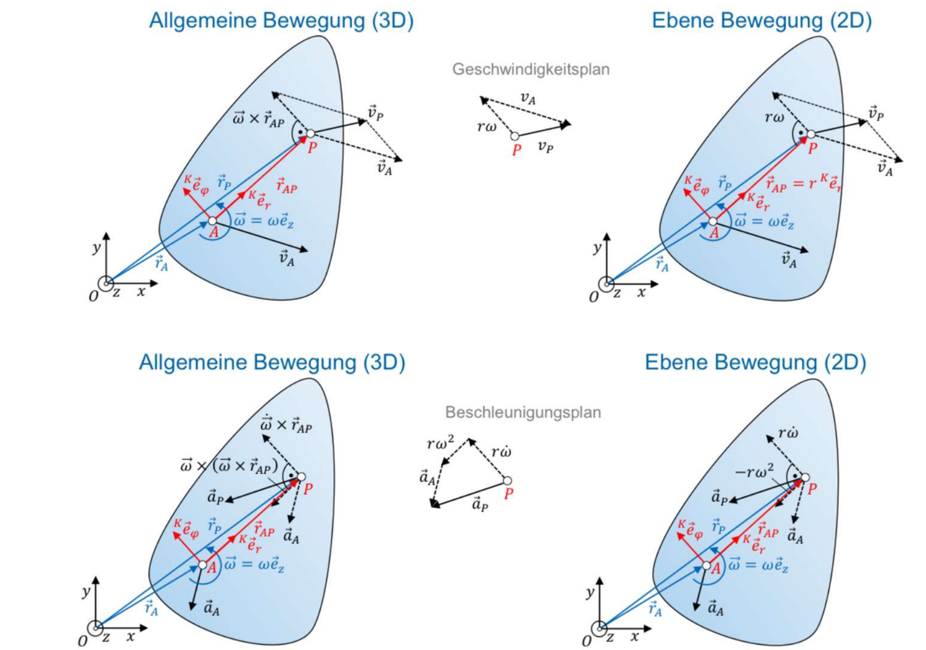
Raum

$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$
$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$
$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{AP}^\varphi + \vec{a}_{AP}^r = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})$

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$



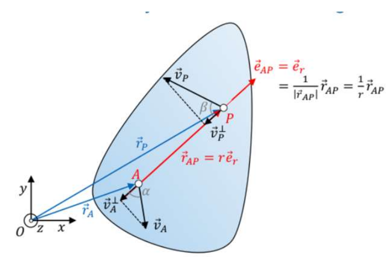


Allgemeine Bewegung des Starrkörpers (3D)

Ebene Bewegung des Starrkörpers (2D)

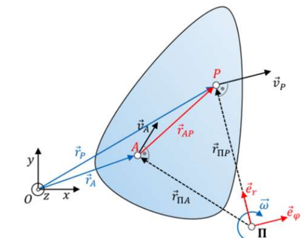
Statz der Projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

$\vec{v}_A^\perp = \vec{v}_P^\perp$
$|\vec{v}_A| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{v}_P| \cdot \cos(\alpha)$
$\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AP} = \vec{v}_P \cdot \vec{e}_{AP}$



Satz vom Momentanzentrum (SvM)

$\vec{r}_{\Pi P} \perp \vec{v}_P \quad \rightarrow \quad |\vec{r}_{\Pi P}| = \frac{v_P}{\omega}$



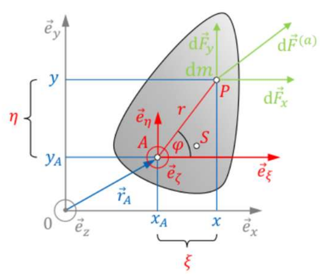
Satz vom Momentanzentrum (SvM)

Kinematik des Schwerpunktes

Schwerpunktslage (bzgl. Inertialsystem): $\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m}$

Geschwindigkeit / Impuls: $\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S = \frac{\int \dot{\vec{r}}\, dm}{m} \rightarrow m\vec{v}_S = \vec{p}$

Beschleunigung: $\vec{a}_S = \ddot{\vec{r}}_S = \frac{\int \ddot{\vec{r}} dm}{m} \rightarrow m\vec{a}_S = \dot{\vec{p}}$



Kräftesatz: **eben**

$$F_x = \int dF_x = \ddot{x}_a \int dm$$
$$F_y = \int dF_y = \ddot{y}_a \int dm$$

raum

$$m\ddot{\vec{r}}_s = m\vec{a}_S = \dot{\vec{p}} = \vec{F}^{(a)} = \int d\vec{F}$$

Momentensatz: **eben**

$$\vec{M}^{(A)} = \left(\dot{\omega} \underbrace{\int (\xi^2 + \eta^2) dm}_{\substack{Axiales\ Massenträghietsmoment \\ \Theta_z^{(A)} = \Theta_\varsigma^{(A)}}} \underbrace{-\ddot{x}_a \int \eta\, dm + \ddot{y}_a \int \xi dm}_{\substack{Verschwind\quad wenn, \\ A \equiv S\ (Schwerpunkt) \\ Gleic\quad örmige\ Bewegung \\ Ruhe\ (\dot{x}_a = \dot{y}_a = 0)}} \right) \vec{e}_z$$

raum

$$\dot{\vec{L}}^{(A)} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AS}) \times \vec{v}_A = \vec{M}^{(A)} = \frac{d}{dt}\Theta^{(S)} \cdot \vec{\omega}$$
$$\dot{\vec{L}}^{(S)} = \frac{d}{dt}\int (\vec{r}_{SP} \times \vec{v}_P) dm = \vec{M}^{(S)}$$
$$\dot{\vec{L}}^{(A)} = \frac{d}{dt}\int (\vec{r}_{AP} \times \vec{v}_P) dm = \vec{M}^{(A)}$$

Schwerpunktsatz:

$$m\ddot{x}_s = F_x \qquad m\dot{x}_s - m\dot{x}_{s,0} = \hat{F}_x$$
$$m\ddot{y}_s = F_y \qquad \text{Integration } t \rightarrow t_0 \qquad m\dot{y}_s - m\dot{y}_{s,0} = \hat{F}_y$$

Momentensatz (Drallsatz): $\Theta_z^{(S)}\ddot{\varphi} = M^{(S)} \qquad \Theta_z^{(S)}\dot{\varphi} - \Theta_z^{(S)}\dot{\varphi}_0 = M^{(S)}$

rotationssymmetrische Massenverteilung **Polares Koordinatensystem:**

$\dot{L_a} = \Theta_a\dot{\omega} = M_a = \int dM_a$

Allgemeine Massenverteilung **Kartesisches Koordinatensystem:**

$\dot{\vec{L}}_a = \Theta_a\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_a = \int d\vec{M}_a$

Drehimpuls **rotationssymmetrische Massenverteilung** **Polares Koordinatensystem:**

$L_a = \int dL_a = \omega \int r^2 dm = \Theta_a\omega \quad L_a(t) - L_a(t_0) = \Theta_a(\omega - \omega_0) = \widehat{M_a}$

Allgemeine Massenverteilung **Kartesisches Koordinatensystem:**

$\vec{L}_a = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \Theta_a\vec{\omega} \qquad A \equiv S$

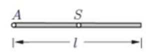
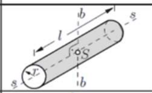
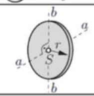
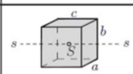
$\vec{L}^{(A)} = \int (\vec{r}_{SP} \times \vec{v}_A) dm + \int (\vec{r}_{AP} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})) dm \qquad A$ beliebig

Axiales Massenträgheitsmoment: $\Theta_a = \int r^2 dm = i_a^2 m$

$\rho = const. \rightarrow dm = \rho dV \qquad \Theta_a = \rho \int r^2 dV$
gleichbleibender Querschnitt über Länge $L \rightarrow dV = ldA$
$\Theta_a = \rho l \int r^2 dA = \rho l I_p$

Zusammengesetzte Körper: $\Theta_a = \sum_i \Theta_{a,i}$

Axiales Massenträgheitsmoment

Dünner Stab		$\Theta_s = \frac{ml^2}{12}, \quad \Theta_A = \frac{ml^2}{3}$
Zylinder		$\Theta_s = \frac{mr^2}{2}, \quad \Theta_b = \frac{m}{12}(3r^2 + l^2)$
Dünne Scheibe		$\Theta_a = \frac{mr^2}{2}, \quad \Theta_b = \frac{mr^2}{4}$
Kugel		$\Theta_s = \frac{2}{5} mr^2$
Quader		$\Theta_s = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Zu:
Ma
der
Tei

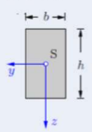
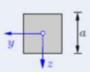
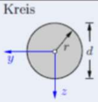
θ_a

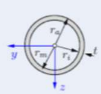
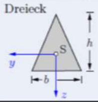
→

→

→

Flächenträgheitsmomente

Rechteck 	$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad i_y = \frac{\sqrt{3}}{6} h,$ $I_z = \frac{hb^3}{12}, \quad i_z = \frac{\sqrt{3}}{6} b,$ $I_{yz} = 0,$ $I_p = I_y + I_z = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2).$
Quadrat 	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}, \quad i_y = i_z = \frac{\sqrt{3}}{6} a,$ $I_p = \frac{a^4}{6}.$
Kreis 	$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad i_y = i_z = \frac{r}{2},$ $I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad i_p = \frac{\sqrt{2}}{2} r.$

Kreisring 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(r_a^4 - r_i^4), \quad i_y = i_z = \frac{1}{2}\sqrt{r_a^2 + r_i^2},$ $I_p = 2I_y, \quad i_p = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{r_a^2 + r_i^2},$ mit $t = r_a - r_i$ und $r_m = (r_a + r_i)/2$ folgt für den dünnwandigen Ring ($t \ll r_m$) $I_y = I_z \approx \pi r_m^3 t, i_y = i_z \approx \frac{\sqrt{2}}{2} r_m.$
Gleichschenkliges Dreieck 	$I_y = \frac{bh^3}{36}, \quad i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}},$ $I_z = \frac{hb^3}{48}, \quad i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}.$

Für dünne, homogene Körper gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_x &\approx \rho t I_x \\ \theta_y &\approx \rho t I_y \\ \theta_{xy} &\approx \rho t I_{xy}\end{aligned}}$$

Massenträgheitstensor (bzgl. S) dünne Scheibe $\zeta \ll \xi, \eta$

$$\vec{L}^{(S)} = \Theta^{(S)} \cdot \vec{\omega}$$

$$\Theta^{(S)} = \begin{pmatrix} \Theta_\xi & \Theta_{\xi\eta} & \Theta_{\xi\zeta} \\ \Theta_{\eta\xi} & \Theta_\eta & \Theta_{\eta\zeta} \\ \Theta_{\zeta\xi} & \Theta_{\zeta\eta} & \Theta_\zeta \end{pmatrix}$$

Axial Massenträgheitsmomente: $\Theta_\xi = \int(\eta^2 + \zeta^2)dm$

$\Theta_\eta = \int(\zeta^2 + \xi^2)dm \qquad \Theta_\zeta = \int(\xi^2 + \eta^2)dm \qquad$ Rotation um $\xi \to L_\xi^{(S)}$, etc.

Dünne scheibe $\Theta_\xi = \int(\eta^2 + \zeta^2)dm \approx \rho t \int \eta^2 dA = \rho t I_\xi$, $\Theta_\eta = \rho t I_\eta$, $\Theta_\zeta = \rho t I_\zeta$

Deviationsmomente: $\Theta_{\xi\eta} = \Theta_{\eta\xi} = -\int \xi\eta \, dm \qquad \Theta_{\xi\zeta} = \Theta_{\zeta\xi} = -\int \xi\zeta \, dm$

$\Theta_{\eta\zeta} = \Theta_{\zeta\eta} = -\int \eta\zeta \, dm$ Rotation um $\eta \to L_\xi^{(S)}$ und $\eta \to L_\zeta^{(S)}$, etc.

Dünne scheibe $\Theta_{\xi\eta} = \Theta_{\eta\xi} = -\int \xi\eta \, dm \approx \rho t I_{\xi\eta}$, $\Theta_{\xi\zeta} = \Theta_{\eta\zeta} \approx 0$

Transformationsbeziehungen:

$$\Theta_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\Theta_{xx} + \Theta_{yy}) + \frac{1}{2}(\Theta_{xx} - \Theta_{yy})\cos(2\varphi) + \Theta_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\Theta_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(\Theta_{xx} + \Theta_{yy}) - \frac{1}{2}(\Theta_{xx} - \Theta_{yy})\cos(2\varphi) - \Theta_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$\Theta_{\xi\eta} = \Theta_{\eta\xi} = -\frac{1}{2}(\Theta_{xx} - \Theta_{yy})\sin(2\varphi) + \Theta_{xy}\cos(2\varphi)$$

Transformationsgesetz

Drehung des Achsensystems (Rotationsachse)

$$\theta_x = \frac{1}{2}(\theta_\xi + \theta_\eta) + \frac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\cos(2\varphi) + \theta_{\xi\eta}\sin(2\varphi)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2}(\theta_\xi + \theta_\eta) - \frac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\cos(2\varphi) - \theta_{\xi\eta}\sin(2\varphi)$$

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = -\frac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\sin(2\varphi) + \theta_{\xi\eta}\cos(2\varphi)$$

Hauptträgheitsmoment

$$\Theta_{1/2} = \frac{\Theta_{\xi\xi} + \Theta_{\eta\eta}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Theta_{\xi\xi} - \Theta_{\eta\eta})^2}{4} + \Theta^2{}_{\xi\eta}}$$

Hauptachse

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\Theta_{\xi\eta}}{\Theta_{\xi\xi} - \Theta_{\eta\eta}}$$

Satz von Steiner

Massenträgheitsmoment für Verschiebung der Drehachse

- Beschreibt die Änderung des Flächenträgheitsmomentes für die Verschiebung aus der Schwerpunktsachse s-s in eine allgemeine Achse a-a im senkrechten abstand r_s zu s-s
- Analog zum Flächenträgheitsmoment

$$\Theta_a = \Theta_s + r_s^2 m$$

$$i_a^2 = i_s^2 + r_s^2$$

Kinetik - Massenträgheitsmoment 5 (dünne, homogene Körper)

$$\rightarrow \theta_\xi \approx \rho t I_\xi$$

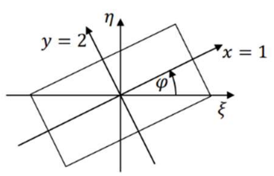
Transformationsgesetz

Drehung des Achsensystems (Rotationsachse)

$$\theta_x = \tfrac{1}{2}(\theta_\xi + \theta_\eta) + \tfrac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\cos(2\varphi) + \theta_{\xi\eta}\sin(2\varphi)$$

$$\theta_y = \tfrac{1}{2}(\theta_\xi + \theta_\eta) - \tfrac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\cos(2\varphi) - \theta_{\xi\eta}\sin(2\varphi)$$

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = -\tfrac{1}{2}(\theta_\xi - \theta_\eta)\sin(2\varphi) + \theta_{\xi\eta}\cos(2\varphi)$$



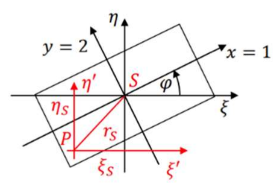
Satz von Steiner

Parallelverschiebung des Achsensystems (Rotationsachse)

$$\theta_{\xi'} = \theta_\xi + \rho t A \cdot \eta_S^2 = \theta_\xi + m \cdot \eta_S^2$$

$$\theta_{\eta'} = \theta_\eta + \rho t A \cdot \xi_S^2 = \theta_\eta + m \cdot \xi_S^2$$

$$\theta_{\xi'\eta'} = \theta_{\xi\eta} - \rho t A \cdot \xi_S \eta_S = \theta_{\xi\eta} - m \cdot \xi_S \eta_S$$



14

Arbeitssatz

$$W = \int_{x_0}^{x} F_x dx + \int_{y_0}^{y} F_y dy + \int_{z_0}^{z} F_z dz + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi = \int_{s_0}^{s} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = F v_s + M_s \omega = \vec{F}_s \cdot \vec{v}_s + \vec{M}_s \cdot \vec{\omega}$$

Euler'sche Gleichungen

$$\underbrace{\Theta^{(A)} \cdot \dot{\vec{\omega}}}_{\text{Moment durch Winkelbeschleunigun}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\Theta^{(A)} \cdot \vec{\omega}\right)}_{\text{Moment, weil } \vec{L} \text{ nicht kollinear zu } \vec{\omega}} = \vec{M}^{(A)}$$

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3 = M_1$$
$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_3\omega_1 = M_2$$
$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2 = M_3$$

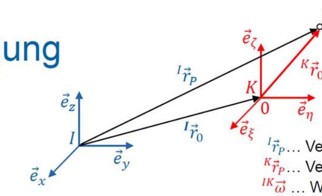
im Körperfesten System!

Momentensatz: $\Theta^{(A)} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \left(\Theta^{(A)} \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{M}^{(A)}$

Lagermomente: $\begin{pmatrix} \Theta_{\xi\zeta}\dot{\omega} - \Theta_{\eta\zeta}\omega^2 \\ \Theta_{\eta\zeta}\dot{\omega} + \Theta_{\xi\zeta}\omega^2 \\ \Theta_\zeta \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering
IMES Institut für Mechanische Systeme

VL12 – Relativbewegung



Zusammenfassung

${}^I\vec{r}_P$… Vektor im ruhenden System I
${}^K\vec{r}_P$… Vektor im mitbewegten System K
${}^{IK}\vec{\omega}$ … Winkelgeschwindigkeit von K bzgl. I

- Absolutgeschwindigkeit (Inertialsystem I)

$$\boxed{{}^I\vec{v}_a = {}^I\vec{v}_f + {}^I\vec{v}_r}$$

→ Führungsgeschwindigkeit

$$\boxed{{}^I\vec{v}_f = {}^I\vec{v}_0 + {}^I\left({}^{IK}\vec{\omega} \times {}^K\vec{r}_{0P}\right)} \qquad {}^I\vec{v}_f = {}^I\vec{v}_0 + {}^I\left(r\omega\vec{e}_\varphi\right)$$

Geschwindigkeit des Punktes P, wenn dieser mit dem bewegten System fest verbunden ist.

→ Relativgeschwindigkeit

$$\boxed{{}^I\vec{v}_r = {}^I\left(\frac{d^*}{dt}{}^K\vec{r}_{0P}\right)}$$

Geschwindigkeit, des Punktes P relativ zum bewegten System K. Sie ist die Geschwindigkeit, die der mitbewegte Beobachter misst.

- Absolutbeschleunigung (Inertialsystem I)

$$\boxed{{}^I\vec{a}_a = {}^I\vec{a}_f + {}^I\vec{a}_r + {}^I\vec{a}_C}$$

→ Führungsbeschleunigung

$$\boxed{{}^I\vec{a}_f = {}^I\vec{a}_0 + {}^I\left({}^{IK}\dot{\vec{\omega}} \times {}^K\vec{r}_{0P} + {}^{IK}\vec{\omega} \times \left({}^{IK}\vec{\omega} \times {}^K\vec{r}_{0P}\right)\right)}$$

$${}^I\vec{a}_f = {}^I\vec{a}_0 + {}^I\left(r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi - r\omega^2\vec{e}_r\right)$$

→ Relativbeschleunigung

$$\boxed{{}^I\vec{a}_r = {}^I\left(\frac{d^*}{dt}{}^K\vec{v}_r\right) = {}^I\left(\frac{d^{2*}}{dt^2}{}^K\vec{r}_{0P}\right)}$$

→ Coriolis-Beschleunigung

$$\boxed{{}^I\vec{a}_C = {}^I\left(2\,{}^{IK}\vec{\omega} \times {}^K\vec{v}_r\right)}$$

→ ${}^K\vec{a}_C$ senkrecht auf ${}^{IK}\vec{\omega}$ und ${}^K\vec{v}_r$

→ ${}^K\vec{a}_C$ verschwindet wenn
a) ${}^{IK}\vec{\omega} = 0$,
b) ${}^K\vec{v}_r = 0$ oder
c) ${}^K\vec{\omega} \parallel {}^K\vec{v}_r$

24

Zürcher Fachhochschule

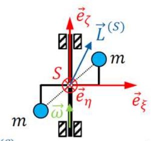
Lagerreaktionen (Drehung um feste Achse)

→ Momente auf Lager sind unerwünscht und treten bei nicht ausgewuchteten Rotoren oder Rädern auf

→ *Unwucht* = Rotationsachse entspricht nicht Hauptträgheitsachse (Momente = 0 ⇔ Drehachse = Hauptachse)

Drehimpuls
$\vec{L}^{(S)} = \boldsymbol{\theta}^{(S)} \cdot \vec{\omega}$

Momentensatz
$$\begin{pmatrix} \theta_{\xi\zeta}\dot{\omega} - \theta_{\eta\zeta}\omega^2 \\ \theta_{\eta\zeta}\dot{\omega} + \theta_{\xi\zeta}\omega^2 \\ \theta_{\zeta}\dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

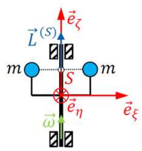


$\vec{L}^{(S)}$ *nicht kollinear zu* $\vec{\omega}$

→ *Statisches Auswuchten*
Anbringen von Zusatzmassen in einer Bezugsebene so, dass *Schwerpunkt des SK auf der Drehachse liegt*
(eliminiert nicht zwingend die Lagermomente, da $\theta_{\xi\zeta}, \theta_{\eta\zeta} \neq 0$!!)

$$\left.\begin{matrix} \theta_{\xi\zeta} = -2\xi\zeta m \neq 0 \\ \theta_{\eta\zeta} = \theta_{\eta\xi} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \vec{L}^{(S)} = \begin{pmatrix} \theta_{\xi\zeta}\omega \\ 0 \\ \theta_{\zeta\zeta}\omega \end{pmatrix} \quad \vec{M}^{(S)} = \begin{pmatrix} \theta_{\xi\zeta}\dot{\omega} \\ \theta_{\xi\zeta}\omega^2 \\ \theta_{\zeta}\dot{\omega} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \text{ Lagermoment} \\ \} \text{ Antriebsmoment} \end{matrix}$$

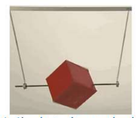
Statisch ausgewuchtet



$\vec{L}^{(S)}$ kollinear zu $\vec{\omega}$

→ *Dynamisches Auswuchten*
Anbringen von Zusatzmassen in 2 Ebenen so, dass Deviationsmomente verschwinden (symmetrische Massenverteilung)

$$\left.\begin{matrix} \theta_{\xi\zeta} = -(\xi\zeta m - \xi\zeta m) = 0 \\ \theta_{\eta\zeta} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \vec{L}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{\zeta\zeta}\omega \end{pmatrix} \quad \vec{M}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{\zeta}\dot{\omega} \end{pmatrix} \Big\} \text{ Antriebsmoment}$$



statisch + dynamisch ausgewuchtet

Zürcher Fachhochschule

Trigonometrie

$\sin(\varphi) = \varphi, \qquad \cos(\varphi) = 1, \qquad \tan(\varphi) = \varphi \qquad$ für kleine Winkeländerungen! $\varphi \ll 1$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$