LINEARE ALGEBRA 2 – LINUS STUHLMANN

VEKTORRÄUME

Ein reeller Vektorraum besteht aus seiner nichtleeren Menge V von Elementen, die wir Vektoren nennen. Ein Vektorraum muss den Ursprung bzw. den Nullvektor enthalten und gemäss Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen sein.

BEWEIS VEKTORRAUM

VEKTORRAUM

$$\mathbb{R}^n := \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_k \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathbb{R}^{m\times n} := \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ji} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathbb{P}_n := \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{P}_2\}$$

UNTERVEKTORRÄUME

U ist ein UVR von V, falls:

1. $\vec{x}, \vec{y} \in U \rightarrow x + y \ \in U$
   a. Vektoraddition
   b. Zwei Vektoren aus U, müssen nach einer Addition immer noch in U liegen
2. $x \in U, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \ \lambda * x \ \in U$
   a. Skalare Multiplikation
   b. Ist $\lambda \ \in \ \mathbb{R}$ & $\vec{x} \in U$, dann ist auch $\lambda * \vec{x} \in U$

BEWEIS UVR

$$P_2 := \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2 | a_0 + a_2 = 0\}$$

$$\boldsymbol{p_1(x) + p_2(x)} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathbb{P}_2$$

$$\boldsymbol{\lambda * p(x)} = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2$$

- $(a_0 + a_2) + (b_0 + b_2) = 0 + 0$
- $\lambda(a_0 + a_2) = \lambda * 0$

LINEARE HOMOGENE GLEICHUNGSSYSTEME

Ein lineares homogenes Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten kann man in folgender Form schreiben:

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$U = \{x^{\rightarrow} \in \mathbb{R}^n \mid Ax^{\rightarrow} = 0^{\rightarrow}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & x_{mn} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{1n} & 0 \end{array}\right)$$

Wobei:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{1n} \end{pmatrix} = Matrix$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = Koeffizienten$$

- Ein *inhomogenes* Gleichungssystem ist nie ein Untervektorraum, da der Nullvektor nicht Element von U sein kann. (Ursprung)
- Eine Ebene ist genau dann ein Untervektorraum im R^3, wenn sie den Ursprung enthält.
  - Zwei freie Variablen = (geometrisch) Ebene
- Eine Gerade ist nur dann ein Untervektorraum im R^2 oder R^3, wenn sie den Ursprung enthält.
  - Eine freie Variable: (geometrisch) Gerade
- Das Neutralelement muss zu jedem Unterraum gehören. (Nullvektor)

SCHNITTMENGE EINES UNTERRAUMS

Der Durchschnitt zweier Unterräume ergibt wieder einen Unterraum. Die Vereinigung ist im Allgemeinen kein UVR.

- $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \ = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \ = Unterraum$
- Die Schnittmenge zweier Ebenen im Raum ist die Schnittgerade
- Die Schnittmenge zweier Geraden in der Ebene und im Raum ergeben einen Schnittpunkt

BEISPIEL

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{matrix} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungsmenge

$$U = U_1 \cap U_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

LINEARE HÜLLE ODER ERZEUGENDENSYSTEM

Eine lineare Hülle oder auch Spann genannt, ist ein Unterraum aufgespannt aus einem Satz verschiedener Vektoren. Diese Vektoren spannen den kleinsten Untervektorraum innerhalb des Vektorraumes auf.

$$Lin((\vec{v_1}), \ldots, (\vec{v_n})) = \{\vec{x} \in V | \, x^{\rightarrow} = \lambda_1 \, (\vec{v_1}) + \cdots + \lambda_n \, (\vec{v_n}) \ mit \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Sollten diese Vektoren linear abhängig sein, reduzieren sich die Vektoren der Linearen Hülle

- $U \ = Lin(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Lin(\vec{a}, \vec{b})$
- $Lin((\vec{v_1}), (\vec{v_2})) = Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_1} + \vec{v_2})$
- $((\vec{v_1}), (\vec{v_2})) = Lin(\vec{v_1}, \lambda\vec{v_2})$

BEISPIEL

- Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} und \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugen folgende lineare Hülle:
- $Lin(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ |\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
- $Lin(\vec{a}, \vec{b})$ beschreibt eine vektorielle Parameterdarstellung einer Ebene, die durch den Nullpunkt verläuft. Somit ist $Lin(\vec{a}, \vec{b})$ ein Unterraum vom $\mathbb{R}^3$.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN

Die Vektoren a_1, a_2, a_3 … sind linearabhängig, wenn einer der Vektoren ein Vielfaches von einem anderen Vektor ist.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Ein LGS ist nur dann unabhängig, wenn nur die triviale Lösung zu einem Nullvektor als Lösungsvektor führt:

- eindeutige Lösung (triviale Lösung) (Anzahl führend 1 = Anzahl Unbekannte) → **linear unabhängig**
  - $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$
- unendlich viele Lösungen (eine Spalte oder Zeile mit nur Nullen) → **linear abhängig**
  - *es lassen sich Nullzeilen erzeugen* → weniger Gleichungen wie Unbekannte (*es gibt freie Variablen)*
  - **quadratische** Matrix - (3x3) → *Determinante = 0*

FÜR POLYNOME

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = x + 2, p_3(x) = x^2 + 3x$$

$$\lambda_1 * p_1(x) + \lambda_2 * p_2(x) + \lambda_3 * p_3(x) = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$nur\ triviale\ Lösung\ möglich\ \lambda_0 = \lambda_1 = 0$$

FÜR MATRIZEN

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 A + \lambda_1 B = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$nur\ triviale\ Lösung\ möglich\ \lambda_0 = \lambda_1 = 0$$

BASIS

DEFINITION

Die Vektoren $\vec{v_1} \ldots \vec{v_n} \in V$ bilden eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{v_1} \ldots \vec{v_n})$ des Vektorraums V, wenn gilt:

Die Basis für einen Vektorraum ist *nicht eindeutig*. Die folgenden Einheitsvektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da sie linear unabhängig sind.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BEDINGUNG

- Die Vektoren $\vec{v_1} \ldots \vec{v_2}$ sind linear unabhängig
- Die lineare Hülle Lin($\vec{v_1} \ldots \vec{v_2}$) = V, das heisst jeder Vektor $\vec{v_i}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1} \ldots \vec{v_2}$ darstellen. (linear unabhängig)
  - $\vec{v_i} = \lambda_1 \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$

POLYNOME

Die Polynome,

$p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x, p_2(x) = 1 + x^2, p_n(x) = 1 + x^n$

bilden die Basis von P^3. Diese müssen lineare abhängig und die richtige Dimension/Potenz haben.

BEISPIEL

Darstellung des Polynoms $p_x(x)$bzgl. der obigen Basis kann durch das Lösen der Koeffizienten Matrix gelöst werden.

$$p_x(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

$$p_x(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$p_x(x) = -4 * p_1(x) + 2 * p_2(x) + 3 * p_3(x)$$

MATRIZEN

Eine Basis für einen Raum$\mathbb{R}^{2x2}$ muss aus mindestens 4 linear unabhängigen Matrizen bestehen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

Darstellung der Matrix E bzgl. Basis

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_3 D$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$E = -3A + 2B + 3C + 4D$$

KOORDINATENVEKTOR

V sei ein reeller Vektorraum und $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2} \ldots \vec{v_n})$ eine Basis von V. $\vec{v}$ sei ein beliebiger Vektor aus V mit der Darstellung:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$$

Wobei die Skalare $\lambda_n$die Koordinaten von $\vec{v}$ bilden.

Koordinatenvektor von $\vec{v}$ bezüglich der Basis:

$$\vec{v_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

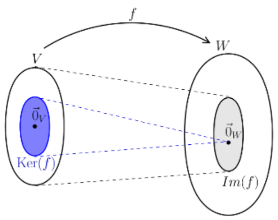
Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ für Vektorraum R^2

und suchen Koordinatenvektor für $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\vec{v_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LINEARE ABBILDUNGEN



DEFINITION

Zu einer Funktion gehören dreierlei

- Definitionsbereich D
- Wertebereich W
- Eine eindeutig bestimmte Zuordnungsvorschrift f(x)

$$f: D \to W$$
$$x \to f(x)$$

Das Bild einer Funktion ist der resultierende Funktionswert.

Damit eine Funktion als lineare Abbildung gilt, muss bewiesen werden, dass:

$$f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2})$$

$$\lambda f(\vec{v_1}) = f(\lambda \vec{v_1})$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \;\&\; \forall\, \vec{v} \in V$$

Ausserdem muss gelten:

$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$$

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

ABBILDUNGSMATRIX

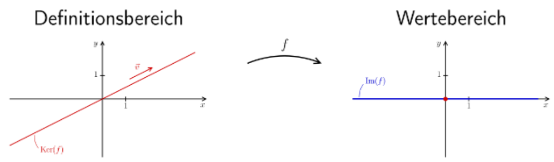
$$f: D \to W$$

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$\vec{x} \to A\vec{x} = \vec{v}$$

Wobei A die Darstellungs- bzw. Abbildungsmatrix ist. Die Matrix wird mit dem Vektor multipliziert und ergibt den Bildvektor.

KERN – KER(F)



Ker(f) ist ein Unterraum des Definitionsbereichs $\mathbb{R}^2$

Im(f) ist ein Unterraum des Wertebereichs $\mathbb{R}^2$

Der Kern einer Matrix ist eine **Menge** von Vektoren bzw. ist ein Untervektorraum des **Definitionsbereichs**. Genauer gesagt, handelt es sich dabei um all die Vektoren, welche von rechts an die Matrix multipliziert den **Nullvektor** ergeben. Also alle Vektoren, die von der betrachteten Matrix auf den Nullvektor abgebildet werden, liegen im sogenannten **Kern der Matrix.**

$$Kern(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

BESTIMMEN DES KERNS

Bestimmen der Vektoren im Kern(A). In jedem Kern enthalten ist der Nullvektor. Um herauszufinden, ob und falls, welche weiteren Vektoren im Kern liegen, kann die Determinante genutzt werden.

$$\det(A) \neq 0 \to Kern(A) = \{0\}, trivial$$
$$\det(A) = 0 \to Kern(A)\ nicht\ trivial$$

Der Kern besteht aus allen Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Also ist der Kern die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems.

$$Ker(f) = (A\vec{x} = 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Kern**: *Ker(f) = {$A\vec{x} = \vec{0}$}*
- **Basis**: *ist der/die Vektoren des Kerns*
- **Dimension**: *dim(Ker(f)) = Anzahl freie Variablen*

BILD - IM(F)

DEFINITION

Die Menge aller aus der Abbildung resultierenden Vektoren $\vec{x} \in V$ heissen Bild.

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \in W \,|\, \vec{x} \in V\}$$

BESTIMMEN DES BILDES

Die Basis des Bildes sind alle möglichen Linearkombinationen der Spaltenvektoren.

- **Bild**: *unabhängige* Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix
  - Wenn ein abhängiger Vektor enthalten: nur Vektoren mit führender 1
- **Basis**: B(Im(f) = alle möglichen Linearkombinationen der *unabhängigen* Spaltenvektoren
- **Dimension**: $\dim(Im(f)) = rang(A)$: Anzahl der unabhängigen Vektoren

PRÜFEN OB VEKTOR IN BILD

- $\vec{b} \in Im(A)$ wenn das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist. (eindeutig & unendlich viele Lösungen)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

DIMENSIONSFORMEL

- $\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$
- $\dim\, (Ker(\vec{0}) = 0$

RECHNEN MIT LINEAREN ABBILDUNGEN

Gegeben seien zwei lineare Abbildungen f & g (A & B)

(nur gültig, wenn Definitionsbereich $f(x)$ = Wertebereich $g(x): V \to W$)

- **Addition**

$$\vec{x} \to (f+g)(\vec{x}) = (A+B)(\vec{x})$$

- **Komposition**

$$\vec{x} \to (f \circ g)(\vec{x}) = AB(\vec{x})$$

- **Umkehrabbildung**

$$f^{-1}(x) = A^{-1}$$

$$\text{für } \forall A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ gilt } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}$$

$$(A|I_n) \to (I_n|A^{-1})$$

BIJEKTIVITÄT BESTIMMEN BEI LINEAREN ABBILDUNGEN

Eine lineare Abbildung ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Eine lineare Abbildung kann als bijektiv angesehen werden, *wenn eine der folgenden Eigenschaften zutreffen*.

- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$
- $Rang(A) = n$ / keine Spaltenvektoren sind linear abhängig
- $\det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar
  - A muss quadratisch sein

ABBILDUNGSMATRIZEN (GEOMETRISCHE TRANSFORMATIONEN)

Mehrere Operationen können durch Multiplikation von links in der richtigen Reihenfolge der Darstellungsmatrizen zu einer Abbildungsmatrix C zusammengeführt werden.

$$A_k \mid k = Reihenfolge\ Operationen$$

$$A_3 * A_2 * A_1 = C$$

ORTHOGONAL-PROJEKTION

Wenn ein Vektor $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ projiziert wird ($\vec{b}_a$)

$$\frac{1}{|\vec{a}|^2} * \vec{a}\vec{a}^T = A_p$$

$$\vec{b}_a = A_p * \vec{b}$$

SPIEGLUNG

- Spiegelgerade: $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- n-Vektor: $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
- Spiegelung an Ebene in $\mathbb{R}^n$ $\mid \vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$
- $0 = 4x - 3y + 2 \to \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OP'} = \left(I_n - \frac{2}{|\vec{n}|^2} * \vec{n}\vec{n}^T\right) * \overrightarrow{OP}$$

wenn Gerade unbekannt, nur Winkel φ zwischen x-Achse und Gerade:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Spieglung x-Achse / y-Achse:

- $x - Achse: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ y - Achse: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

STRECKUNG

Streckung um den Faktor k:

$$\vec{x} \to A\vec{x} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

SCHERUNG

Scherung um Faktor k entlang der x-Achse

$$\vec{x} \to A\vec{x} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ROTATIONSMATRIX

$$\vec{x} \to A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Drehmatrix um x, y, z-Achse

$$x: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, y: \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, z: \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BASISWECHSEL

Seien $\mathcal{B}$ und C zwei Basen des Vektorraums V und $P_{\mathcal{B}\to C}$ die Basistransformationsmatrix von $\mathcal{B}$ auf C.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Berechnung der Basistransformationsmatrix:

$$P_{\mathcal{B}\to C} = (\vec{c_1}\ \vec{c_2}\ \vec{c_3} | \vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \vec{b_3})$$

Die linke Seite mit dem Gauss-Jordan-Verfahren in die Einheitsmatrixform bringen. Die rechte Seite ergibt die *Basistransformationsmatrix*. $(I_n|P_{\mathcal{B}\to C})$ ausserdem gilt:

- $P_{\mathcal{B}\to C}\ \vec{v_{\mathcal{B}}} = \vec{v_C}$
- $P_{\mathcal{B}\to C}$ ist eindeutig bestimmt
- $P_{\mathcal{B}\to C}$ ist invertierbar
  - $P^{-1}{}_{\mathcal{B}\to C} = P_{C\to\mathcal{B}}$

$$P_{\mathcal{B}\to C} P_{\mathcal{B}\to C}$$

KARTESISCHE BASIS

$$\mathcal{E} = ((\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}))$$

Die Vektoren von $\mathcal{B}$ bilden Basistransformationsmatrix $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = (\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \vec{b_n})$$

Für die Basistransformationsmatrix $P_{\mathcal{E}\to B}$ ist die Inverse der aus den Vektoren von B bestehenden Matrix.

$$P_{\mathcal{E}\to B} = (\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \vec{b_n})^{-1} = P_{B\to\mathcal{E}}{}^{-1}$$

KOMPLEXE ZAHLEN

KARTESISCHE FORM

DEFINITIONEN

- Imaginäre Einheit

$$i^2 = -1$$

- Komplexe Zahl z

$$z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$$

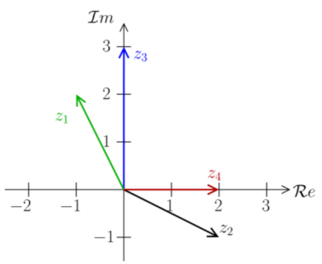
$$a = \mathcal{Re}(z); b = \mathcal{Im}(z)$$

- Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{\forall z = a + bi \dashv |a, b \in \mathbb{R}\}$$

GAUSS'SCHE ZAHLENEBENE

$z = a + bi$ kann als Zahlenpaar bzw. als Vektor $\binom{a}{b}$ aufgefasst werden. a stellt Werte auf der $\mathcal{Re}$-Achse und b Werte auf der $\mathcal{Im}$-Achse dar.



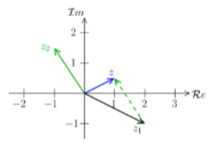
OPERATIONEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

Es können verschiedene Operationen mit komplexen Zahlen durchgeführt werden. Bei der Summe und der Differenz verhalten sich die Zahlenpaare bzw. Vektoren der komplexen Zahl wie bei Linearkombinationen.

$$z_1 = a_1 + b_1 i\ ;\ z_2 = a_2 + b_2 i$$

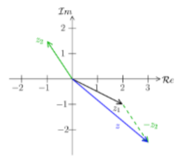
SUMME

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$



DIFFERENZ

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$



PRODUKT ⊙

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

- In $\mathbb{R}^2$ keine Multiplikation vorhanden
- Keine Nullteilung

für skalare Multiplikation:

$$\lambda z = \lambda a + \lambda bi \mid \lambda \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$$

BETRAG

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

KONJUGIERTE KOMPLEXE ZAHL

- Führt zu einer Spiegelung an der x-Achse

$$\bar{z} = a - bi$$

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 * z_2} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\mathcal{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\mathcal{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z + \bar{z})$

INVERSE ELEMENTE

$$z^{-1} = \frac{1}{(|z|^2)}(a - bi)$$

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

DIVISION / QUOTIENT

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2$$

POTENZEN VON I

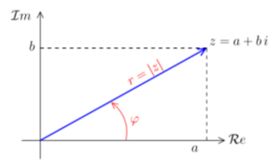
$\boldsymbol{i^0}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^1}$	i
$\boldsymbol{i^2}$	-1
$\boldsymbol{i^3}$	$-i$
$\boldsymbol{i^4}$	1

POLARFORM

DEFINITION

Eine komplexe Zahl kann neben ihrer kartesischen Form auch in Polarform dargestellt werden. Wobei:

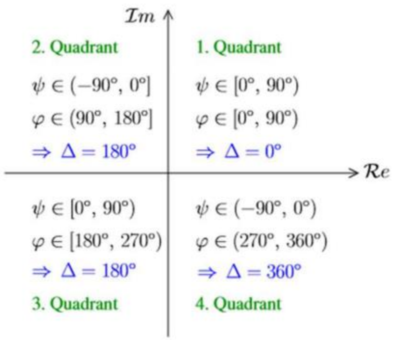
- $r =$ Abstand vom Koordinatenursprung
- $\varphi =$ Winkel zu positiv reeller Achse
- $\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r * \cos(\varphi)$
- $\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r * \sin(\varphi)$



KARTESISCHE FORM → POLARFORM

Die Polarform einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ lautet:

- $z = a + bi = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi)\, i$
- $r = |z|$
- $\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta = \psi + \Delta$



Wenn Hauptwert 4. Quadrant + 360°

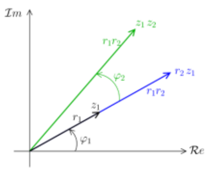
KONJUGIERTE POLARFORM

$$\bar{z} = r * \cos(-\varphi) + r * \sin(-\varphi) i =$$

$$r * (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\, i)$$

MULTIPLIKATION POLARFORM

$$z_i z_2 = r_i r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\, i)$$



- Drehung (um φ_2) und Streckung (um r_2)

DIVISION POLARFORM

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\, i)$$

- Drehung (um φ_2) und Streckung (um $\frac{1}{r_2}$)
  - $\varphi_2 > 0: Drehung\ negativ$
  - $\varphi_2 < 0: Drehung\ positiv$

EULERSCHE FORM

DEFINITION

$$z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

kartesische Form	Polarform	Eulersche Form
$z = a + b\,i$	$z = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$	$z = r\,e^{i\,\varphi}$
$a = r\,\cos(\varphi)$ $b = r\,\sin(\varphi)$	$r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Delta$ mit $\Delta = \begin{cases} 0°, & z \text{ in 1. oder 4. Quadrant} \\ 180°, & z \text{ in 2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$	

- $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
- $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

KONJUGIERTE ZAHL IN EULERSCHEN FORM

$$\bar{z} = \overline{r * e^{i\varphi}} = r * e^{-i\varphi}$$

POTENZIEREN - SATZ VON MOIVRE

Eulersche Form:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Polarform:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)\, i)$$

Wenn: ni Vielfaches von 360° -> 0°

WURZELN

FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

$$wobei\ a_i \in \mathbb{C}, i = 0, \ldots n$$

- Maximal n reelle Lösungen.
- Unbekannte in $\mathbb{C}$ mit z bezeichnet anstatt x
- $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
  - $D > 0$: zwei reelle Lösungen
  - $D = 0$: doppelte reelle Nullstelle
  - $D < 0$: zwei konjugierte komplexe Zahlen

N-TE WURZEL AUS A

$$z^n = a = a_0 e^{i\alpha}\ mit\ a\ \in \mathbb{C}$$

$$z = \sqrt[n]{a}$$

EULERSCHE FORM

$$z_k = re^{i\varphi k}$$

$$r_k = \sqrt[n]{r}$$

$$\varphi_k = \left(\frac{\alpha}{n} + k * \frac{360°}{n}\right), k = 0, \ldots n - 1$$

- z^n hat n Lösungen

ZUSATZ

- sei $z_1 = 1 - i$ eine Lösung der Wurzel
  - so ist $\overline{z_1} = 1 + i$ auch eine Lösung

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

DEFINITION

$$\lambda \in \mathbb{C}: Eigenwert$$

Eine Matrix kann max. **n** Eigenwerte haben in $\mathbb{R}^{nxn}$

$$\vec{x}: Eigenvektor\ zu\ Eigenwert\ \lambda$$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}\,; \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$mit\ \vec{x} \neq 0\ und\ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

CHARAKTERISTISCHES PLOYNOM

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$$

EIGENRAUM

Der Eigenraum V_λ besteht aus allen Eigenvektoren zu dem Eigenwert λ unter Hinzunahme des Nullvektors.

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in V\ |A\vec{x} = \lambda\vec{x};\ \lambda\ \in \mathbb{C}\} \subseteq V$$

BERECHNUNG EIGENWERTE

- $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$
- Determinante berechnen
- $\begin{pmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} - \lambda \end{pmatrix}$
- Faktorisieren
- Nullstellen bestimmen = Eigenwerte

BERECHNUNG EIGENVEKTOREN

- Die berechneten λ_i in die Gleichung $(A - \lambda_i I_n)\vec{x} = \vec{0}$ einsetzen
- LGS lösen
- Lösungsmenge = Eigenraum zu λ_i

VIELFACHHEIT

$$1 \leq \gamma \leq \mu$$

ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT

Vielfachheit des Polynoms $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$

- Algebraische Vielfachheit von λ_i wird als μ beschrieben
- $(\lambda_i - 4)^3(\lambda_i - 1)^1 \rightarrow \mu_1 = 3, \mu_2 = 1$

GEOMETRISCHE VIELFACHHEIT

Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraums V_λ. Sie gibt bei einem Eigenraum die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren an.

- Geometrische Vielfachheit von $V_\lambda = \gamma$
- $\gamma = \dim\,(V_\lambda)$

EIGENWERTE VON DREIECKSMATRIZEN

Die Eigenwerte einer Dreiecks-, *oder* Diagonalmatrix sind demnach genau die Elemente in der Hauptdiagonalen der Matrix.

$$\begin{pmatrix} x_{11} - \lambda_1 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} - \lambda_2 & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} - \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ \lambda_1 = x_{11}, \lambda_2 = x_{22}, \lambda_3 = x_{33}$$

EIGENWERTE VON DIAGONALMATRIZEN

- Eigenvektoren sind die Einheitsvektoren zu den Eigenwerten d_i

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots V_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

EIGENWERTE VON SYMMETRISCHE MATRIZEN

- Alle Eigenwerte sind reell
- $\forall\lambda: \gamma_\lambda = \mu_\lambda$
- Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind *orthogonal*. (Skalarprodukt = 0)

SPEKTURM

Die Menge der Eigenwerte einer $n \times n$ Matrix wird Spektrum genannt und $\sigma(A)$ geschrieben, also:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists\ \vec{x} \neq \vec{0}; A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

SPEKTRALRADIUS

Als Spektralradius bezeichnet man den grössten Betrag aller Eigenwerte $\rho(A) = |\lambda|$

SPUR EINER MATRIX - TR(A)

Die Spur ist die Summe der Diagonalelemente einer quadratischen Matrix. Mathematisch ausgedrückt:

$$tr(A) = a_{11}\ + a_{22}\ + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

INVERSE

$$\det(A) \neq 0$$

Ist 0 ein Eigenwert von A $\rightarrow$ $det(A) = 0$ damit ist A nicht invertierbar. Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist der Eigenwert von $A^{-1} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$

Für 2x2-Matrizen gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\,(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ÄHNLICHKEIT VON MATRIZEN

Seien zwei Matrizen A und B ähnlich, so gilt:

- $\det(A) = \det(B)$ (beide Invertierbar)
- Gleiches charakteristisches Polynom
- A & B haben die gleichen Eigenwerte

Eindeutige Bestimmung ($P^{-1}AP = B$)

$$AP = PB$$

$$A * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * B$$

- Gleichungssystem lösen (bei freien Variablen 1 einsetzen)
- Liefert Matrix P (ist nicht eindeutig)
- *Ist P invertierbar ($det(P \neq 0)$ → A&B ähnlich*

DIAGONALISIERBARE MATRIZEN

Eine Matrix A heisst diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix D (Eigenwerte von A in Diagonalen) existiert, zu der A ähnlich ist. Das heisst es gibt eine invertierbare Matrix P, wobei P aus Eigenvektoren als Spaltenvektoren:

$$AP = PD \rightarrow \ P^{-1}AP = D \rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$P = Lin(Eigenvektoren)$$

Die Reihenfolge der Eigenvektoren muss der Reihenfolge der Eigenwerte in der diagonalisierten Matrix entsprechen.

KRITERIEN – DIAGONALISIERBARKEIT

Eine n × n Matrix ist diagonalisierbar, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
2. A hat n verschiedene Eigenwerte
3. Für jeden Eigenwert λ von A gilt: $\gamma_\lambda = \mu_\lambda$
4. A ist reell und *symmetrisch*

POTENZEN EINER MATRIX

Ist A eine diagonalisierbare $n \times n$ - Matrix mit $P^{-1}AP = D$, dann ist die k-te Potenz der Matrix durch die Potenzierung der Diagonalmatrix berechenbar:

$$A^k = PD^kP^{-1}, k \geq 1 (A^kP = PD^k)$$

→ Ist λ ein Eigenwert von A und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zum λ, dann ist λ^k und $\vec{x}$ ein Eigenvektor zu λ^k.

ÜBERGANGSMATRIX

		von M	S	E
nach	M	0,5	0,4	0,1
	S	0,3	0,4	0,6
	E	0,2	0,2	0,3
	$\sum$	1	1	1

DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die folgende Form.

$$y' = a * y, wobei\ y = c * e^{at}$$

Ein System von n Differentialgleichungen:

$$\overrightarrow{y'} = A * \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

$$y_1' = -y_1 + 2y_2\ mit\ y_1(0) = 1$$
$$y_2' = 4y_1 + y_2\ mit\ y_2(0) = 5$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte und Eigenvektoren ermitteln
   a. $(-3, 3), v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\vec{y} = c_1 e^{-3t}\overrightarrow{v_1} + c_2 e^{3t}\overrightarrow{v_2}$
4. Bestimmen von c_i
5. $P\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$
6. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \vec{y} = 1 * e^{-3t}\overrightarrow{v_1} + 4e^{3t}\overrightarrow{v_2}$
7. $y_1(t) = -e^{-3t} + 2e^{3t}, y_1(t) = e^{-3t} + 4e^{3t}$