Zusammenfassung Analysis 1

3. Januar 2023; rev. 16. Juni 2023

Linda Riesen (rieselin)

Inhaltsverzeichnis

1 Konzepte der Differential- und Integralrechnung

1.1 Integralrechnung

1.1.1 Integrieren von Flächen

Nullstellen bestimmen: => Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

1.2 Integrationsregeln

1.2.1 Substitution

1. Äussere Funktion bestimmen

$\int (3x+2)^2 \, dx \rightarrow x \rightarrow x^2$

2. Äussere Funktion aufleiten

$\int \frac{1}{3}(3x+2)^3 \, dx$

3. Innere Funktion:

- x mit t ersetzen

$u = 3t + 2$

- Ableiten

$u' = 3 = \frac{du}{dx}$

- nach dx umformen

$dx = \frac{du}{3}$

- Falls mit Grenzen (Integrale) dann Grenzen anpassen

→ wäre hier 3t+2 bei beiden Grenzen ausrechnen

- Einsetzen

$\int \frac{1}{3}(3x+2)^3 \cdot \frac{1}{3} \, du$ vorziehen von $\frac{du}{3}$

Abbildung 1: Substitution Anleitung

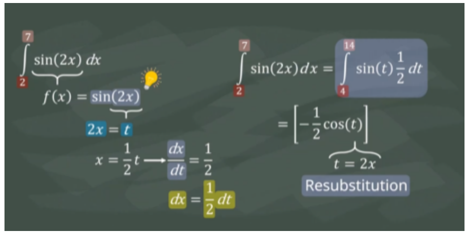


Abbildung 2: Substitution Anleitung -> **falsch!!! dt/dx = t'**

Substitution: Bei mehreren x's in f(x) juggle mit u' = du/dx machen und dann mit bestehenden x verrechnen

1.3 Zeichnen des Graphen

1.3.1 Transformationen

- $y = f(x) \Rightarrow y = f(a \cdot x)$: Streckung des Graphen um Faktor $\frac{1}{a}$ in x Richtung
- $y = f(x) \Rightarrow y = f(x + b)$: Verschiebung des Graphen um $|b|$ in x Richtung
- $y = f(x) \Rightarrow y = c \cdot f(x)$: Streckung des Graphen um Faktor c in y Richtung
- $y = f(x) \Rightarrow y = f(x) + d$: Verschiebung des Graphen um d Einheiten in y Richtung

1.3.2 Graphen von Polynomen

- Hat so viele Nullstellen wie Grad des Polynoms (Fundamentalssatz der Algebra)
- bei Faktorisiertem angeben, noch Vorfaktor beachten => Falls Punkt gegeben kann dieser berechnet werden
- für jede Nullstelle:
  - Einfach: Schneidend
  - Doppelt: Berührend
  - Dreifach: Wie x^3
- für Asymptoten: anlehnend

1.3.3 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

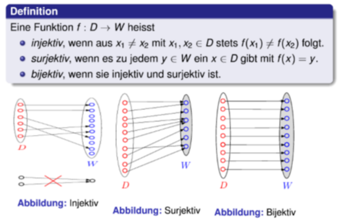


Abbildung 3: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

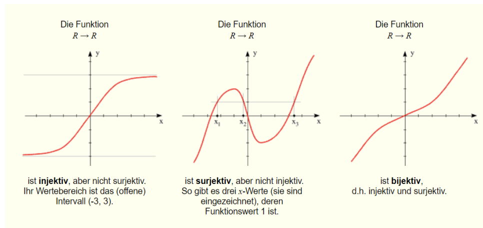


Abbildung 4: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv Graph Beispiele

1.3.4 Horner-Schema

Um nach Nullstellen aufzulösen: Nullstelle einsetzen und das Resultat (ohne Null am Ende) mit Grad -1 auffüllen = Lösung der Polynom Division...

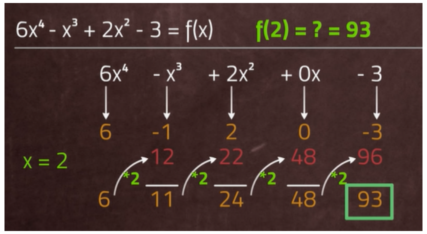


Abbildung 5: Horner Schema (Rest würde als + 0 / (x-5) angefügt werden)

1.3.5 Polynomdivision

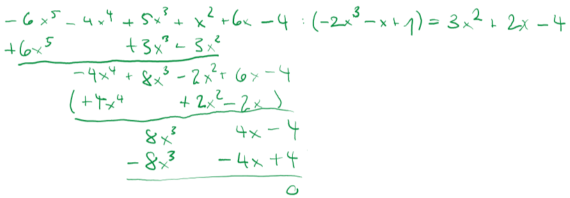


Abbildung 6: Polynomdivision

1.4 Begriff des Polynoms, Eigenschaften von Polynomen

1.5 Ableitung (Tangente, Kurvendiskussion)

1.6 Stammfunktion und Hauptsatz

2 Hopital / Bernoulli

Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$	Funktion $f(x)$	Umformung
$\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{g(x)}{h(x)}$	/
$0 \cdot \infty$	$g(x) \cdot h(x)$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$
$\infty - \infty$	$g(x) - h(x)$	$\frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)}}$
0^∞ oder ∞^0	$g(x)^{h(x)}$	$e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$

Abbildung 7: Hoptial Umformungen

Hoptial sooft anwenden bis ein Grenzwert gefunden werden kann.

3 Folgen und Reihen

3.1 Begriff der Folge (direkt, rekursiv, arithmetisch, geometrisch)

3.2 Grenzwertbegriff (Monotonie, Beschränktheit, Rechenregeln, Limes einer Funktion)

3.2.1 Beschränktheit

- nach oben beschränkt: falls es eine reelle Zahl M gibt so dass $a_n \leq M$ für alle n in $\mathbb{N}$

- nach unten beschränkt: falls es eine reelle Zahl M gibt so dass: $a_n \geq M$ für alle n in $\mathbb{N}$
- Dabei gilt a_n konvergent $\Rightarrow a_n$ beschränkt aber nicht umgekehrt
- M (Grenze) muss nicht optimal gewählt werden
- **Monotoneikritierium** Monoton wachsend und nach oben beschränkt ist konvergent | Monoton fallend und nach unten beschränkt ist konvergent (gilt auch bei abgeleitet für Umgebungsbereich).

3.2.2 Monotonie

- monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$
- monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$

Beweis:

- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend (bzw. umgekehrt fallend)
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0$ dann monoton wachsend

3.3 Reihen (Summenzeichen, arithmetisch, geometrisch)

3.3.1 Eigenschaften Summenzeichen

- Homogenität:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$
- Additivität:
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- Konstanter Summand:
$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$
- Teleskopsumme:
$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$
- Indexverschiebung (Substitution):
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

3.3.2 Spezielle Reihen

- kleiner Gauss:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
- Bernoulli Ungleichung: $(1+x)n \geq 1 + nx$

3.3.3 Berechnung von Grenzwerten

Grenzwert mit gegebenen Grenzen:

- $\lim_{x \to 5} \frac{n+1}{x-1}$ => Grenzwert direkt bei x Einsetzen
- Damit Grenzwert existiert muss stetig sein (bei von Fallunterscheidung der gleiche Wert)

Grenzwert Berechnen Tricks

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)
  $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6-n^3}{7n^6+n^5-3} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{2}{7}$
- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent)
  $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1}+2^{n+1}}{7^n+5} \cdot \frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}} = \frac{1}{7}$
- "$\infty - \infty$" Trick: Erweitern mit $\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}$
  $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = 1/2$
- Kettenfunktionen: Trick Stetigkeit von f(x) ausnützen $\Rightarrow$ zuerst $\lim_{n\to\infty} a_n$ berechnen, danach f(x) (ohne nochmals lim) anwenden.
- e-like...: Trick: umformen zu $((1+\frac{1}{x})^x)^a \Rightarrow e^a$

3.3.4 Stetigkeit

- Stetig wenn keine Sprünge (ungenaue definition)
- Stetig an Stelle x_0 falls Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$
- Stetig alls sie in jedem Punkt x0 in D ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Die folgenden elementaren Funktionen sind stetig:

- Polynome $y = a_n x^n + \ldots + a_0$ sind stetig.
- Gebrochenrationale Funktionen $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind stetig.
- Exponentialfunktionen $y = a^x$ sind stetig.
- Logarithmusfunktionen $y = log_a(x)$ sind stetig.
- Trigonometrischen Funktionen $y = sin(x)$, $y = cos(x)$, $y = tan(x)$ sind stetig

Rechnen mit stetigen Funktionen: Seien f(x) und g(x) in der Stelle x_0 stetig. Dann gilt:

- Die Funktion $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ist in x_0 stetig.
- Die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ ist in x_0 stetig.
- Die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist in x_0 stetig, falls $g(x_0) \neq 0$.
- Falls f(x) an der Stelle $g(x_0)$ stetig ist, dann ist auch die Verknüpfung (f ∘ g)(x) an der Stelle x_0 stetig.

3.3.5 Differenzierbarkeit

Damit eine Funktion f an der Stelle x0 differenzierbar ist, muss der Grenzwert $f'(x_0)$ existieren. Das bedeutet insbesondere, dass die linksseitige Ableitung = der rechtsseitigen Ableitung sein muss. $\lim_{h\uparrow 0}$ or $\lim_{h\downarrow 0}$ Differenzierbar => Stetig!
aber Stetig $\neq>$ Differenzierbar!

4 Erweiterung der Differentialrechnung

4.1 Ableitung elementarer Funktionen

4.2 Ableitungsregeln

4.3 Kurvendiskussion

- Monotonieverhalten (monoton wachsend / fallende Bereiche bestimmen)
- Krümmungsverhalten / Minima / Maxima etc überprüfen
- Kritische Punkte: hinreichende Bedingung nicht erfüllt
  1. Keine Aussage!
  2. Leite f(x) so lange ab bis die n-te Ableitung an Stelle $\neq 0$ ist. Dann gilt:
  3. Wenn n gerade ist, hat f(x) an der Stelle x0 ein relatives Extremum, und zwar ein relatives Maximum im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein relatives Minimum im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$

4. Wenn n ungerade ist, hat f(x) an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (und damit einen Sattelpunkt).

4.3.1 Differentialrechnung

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an einer Stelle x0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (**Linearisierung**): $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

4.4 Extremwertaufgaben

1. Gleichung aufstellen
2. Ableiten
3. Kandidaten für Min/Max finden
4. Begründen durch 2. Ableitung / Graph

4.5 Newton-Verfahren (Approximation einer Nullstelle)

5 Ungleichungen

No flipping

- $log_a()$ [mit a > 1] (oder andere monoton wachsende Funktion)
- Addition / Subtraktion
- Mult. mit Positiver Zahl
- Divi. durch Positive Zahl

Flipping needed

- $log_a()$ [mit 0 < a < 1] (oder andere monoton fallende Funktion)
- Mult. mit Negativer Zahl
- Divi. durch Negative Zahl

6 Partialbruchzerlegung

Darf nur bei echt gebrochenrationalen Funktionen durchgeführt werden, bei unecht-gebrchenrationalen zuerst Polynomivision durchführen.
Gesucht: Integral d. Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
Konstanten A werden durch einsetzen der Nullstelen gefunden

- Fall 1: q(x) hat nur einfache Nullstellen: $\frac{p(q)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$ => Integriert: $A_i * ln(|x - x_i) + C$
- Fall 2: q(x) hat eine m-fache Nullstelle: $\frac{p(q)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{B_1}{x-x_1} + ... + \frac{B_n}{x-x_n} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$ => Integriert: $-\frac{a}{k-1} * \frac{1}{x-c^{k-1}} + C$

7 Geometrie

Schwerpunkt(xs/ys)

- $A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx$
- $x_s = \frac{1}{A} \int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx$
- $y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x))dx$

8 Uneigentliche Integrale

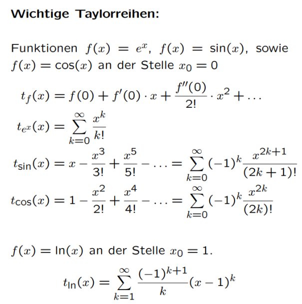
Eigentschaften: uneigentliches Integral ist vom Typ:

- $\int_a^\infty f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$
- Typ2: $\int_a^b f(x)dx$ [mit f(x) hat Pol in [a,b]

Berechnung:

- $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx = lim_{\lambda\to-\infty} \int_\lambda^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^0 f(x)dx + lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(x)dx$
- Pol bei x = a: $\int_a^b f(x)dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$
- Pol bei x = b: $\int_a^b f(x)dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$
- Pol bei x = c [a,b]: $\int_a^b f(x)dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + lim_{\epsilon\to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$

9 Tailorreihen


Wichtige Taylorreihen:

Funktionen $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$, sowie $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$t_f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots$$
$$t_{e^x}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$t_{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$t_{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

$$t_{\ln}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

Abbildung 8: Wichtige Taylorreihen

10 Konvergenz

Konvergenzbereich (Intervall um x_0):

$$\{x\epsilon\mathbb{R} | P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \; ist \; konvergent\}$$

Konvergenzradius ρ (Abstanz zw. x_0 und dem Rand des Konvergenzintervalls) :

$$\rho = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_k + 1}| \; oder \; \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k}}$$

Konvergenzintervalle: innerhalb diesen kann man mit Potenzreihen rechnen wie mit Polynomen:

- Einsetzen oben, gibt als Resultat den Radius = ist das Intervall indem es konvergiert: Die Grenzen müssen separat behandelt werden wenn Konvergenzintervall mit Rand verlangt.
- Innerhalb ihres Konvergenzintervalls ist eine Potenzreihe eine **stetige** Funktion.

- Im Durchschnitt der Konvergenzintervalle zweier Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt kann man diese Potenzreihen **addieren** und **multiplizieren**.
- Identische Potenzreihen besitzen dieselben Koeffizienten => **Koeffizientenvergleich**
- Potenzreihen können gliedweise **differenziert und integriert** werden.

11 Differentialgleichung

Beziehnung zw. n einer Funktion und ihren Ableitungen, gesucht sind Funktionen die diese Beziehung erfüllen.

- gewöhnliche Diffgl **n-ter Ordnung**: für eine gesuchte Funktion y(x), in der Ableitungen von y(x) auftreten (bis n-te Ableitung).
- gewönliche vs. partielle DGL: Ableitung nach einer/mehrerer Variabel
- lineare DGL: Funktion und Ableitungen kommen nur linear vor (kein Wurzel/Hoch2, e-Hoch etc.)
- Homogene DGL: Wenn alle Terme + Ableitungen links schreibt, gibts rechts 0

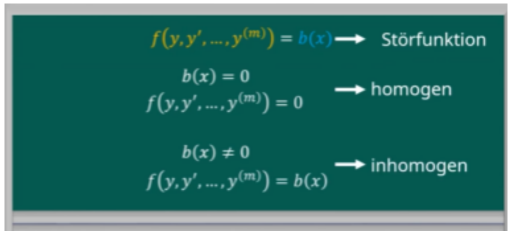


Abbildung 9: Homogen

- Falls nach y^n aufgelöst: explizit, sonst implizit
- Die Menge aller Lösungen: allgemeine Lösung der DGL
- Lösung wird eindeutig wenn: Anfangsbedingungen vorgegeben werden
- DGL + Anfgangsbedingungen = Anfangswertproblem (AWP)
- Lösung von AWP: **spezielle/partikuläre Lösung**
- separierbar: $y' = g(x) * h(y)$
- autonom (ist auch separierbar): $y' = h(y)$
- Richtunugsfeld: ordnet jedem Punkt P(x, y) den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ zu -> x ist immer 1, y wird berechnet als y'

11.1 Separierbare DGL

$\frac{y}{\prime} = dydx = g(x) * h(y)$

- Falls $h(y_0) = 0 => y = y_0$ ist eine Lösung
- Trennung von x/y: $\frac{1}{h(y)} dy = g(x)dx$, Integration auf beiden Seiten, evtl AWP einsetzen um C zu bestimmen.

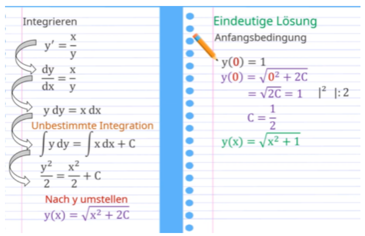


Abbildung 10: Separierbare Diffgl Anwendung

11.2 Euler Verfahren

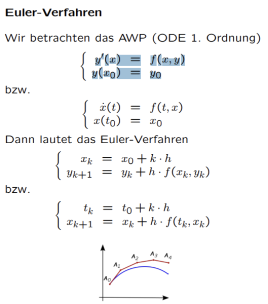


Abbildung 11: Euler Verfahren

Globaler Fehler: Abweichung d. Approximation v. exakten Lösung zu Zeit $t_k : e_k = |x(t_k) - x_k|$

Lokaler Fehler: Abweichung d. Approximation v. exakten Lösung nach einem Schritt

Konvergenzordung: Numerisches Verfahren ist konverenz mit Konvergenzordnung p falls: $e_k \leq Ch^p$

Konvergenzordnug v. Eulerverfahren = 1: $e_k \leq Ch$ (wird Schrittweite h um 10 Verkleinert, wird Fehler ebenfalls um Faktor 10 verringert

11.3 Lösunganätze

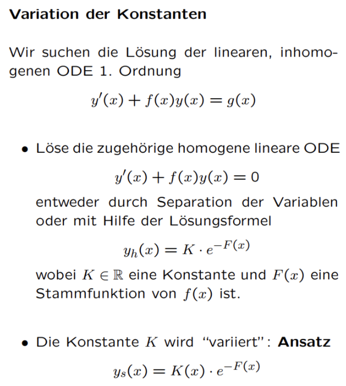


Abbildung 12: Dfgl Homogen machen, dafür Lösung finden, der Rest ist Konstante K

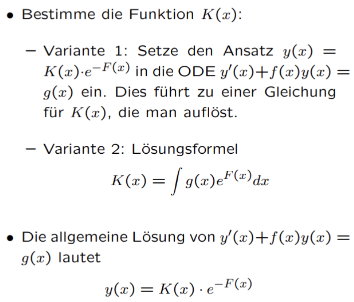


Abbildung 13: K mit Lösungsformel lösen