Physik Meiermis

Bilanzieren

Summe aus Zu- und Abflüssen, Quellen und Senken

→ mittlere Änderungsrate $\frac{G(t_2)-G(t_1)}{t_2-t_1}$ → momentane Änderungsrate $\lim_{t_1 \to t_2} \frac{G(t_2)-G(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{dG}{dt} = \dot{G}$

→ mittlere Strömungsgeschwindigkeit $I_V = \bar{v} \cdot A$

G	Grösse	1
I_V	Volumenstrom	$\frac{m^3}{s}$
$\bar{v}$	mittlere Geschw.	$\frac{m}{s}$
A	Strömungsquerschnitt	m^2

Impuls & Kraft | Impulsbilanz

→ Ohne Externe Kräfte: $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = -\frac{m_1}{m_2}$ → Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}_p \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

→ Änderungsrate Impuls: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{p} = \vec{F}_{res}$ → Bei konstanter Masse: $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$

→ Reibungskraft: Haftreibung $F_H = \mu_{HR} \cdot F_N$ Rollreibung $F_R = \mu_{RR} \cdot F_N$ Gleitreibung $F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$

Vorgehen:
1. Freischneiden
2. Kräfte identifizieren
3. Impulsbilanz (vektoriell)

3b. Drehimpulsbilanz
4. Bezugssystem def.
5. Vektorkomponenten
6. Impulsbilanz (komponenten)
7. Randbedingungen
8. Bewegungsgleichung

v	Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
m	Masse	kg
p	Impuls	$Ns = kg \cdot \frac{m}{s}$
F_{res}	resultierende Kraft	N
a	Beschleunigung	m/s^2
μ	Reibungzahl	1
F_N	Normalkraft	N

Arbeit, Leistung & Energie

→ $P = W \cdot t$ → $P = F \cdot v$ → Arbeit der Kraft: $W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ (Skalarprodukt)

→ Bekannter Ort: $W_{s_1 \to s_2} = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds$ → Bekannte Zeit: $W_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot v(t)\, dt$

→ Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ → $\Delta E_{kin} = W$ (Änderung der kin. Energie ist die am Körper verrichtete Arbeit)

→ Potentielle Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

→ Federenergie $E_{Spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Delta x^2$

P	Leistung	$W = \frac{J}{s}$
W	Arbeit	$J = Nm$
t	Zeit	sek.
E	Energie	$J = Nm$
h	Unterschied zur Referenzhöhe	m
D	Federkonstante	$\frac{N}{m}$
Δx	Auslenkung der Feder	m

1 PS = 735.5 Watt

Auftrieb & Luftwiderstand

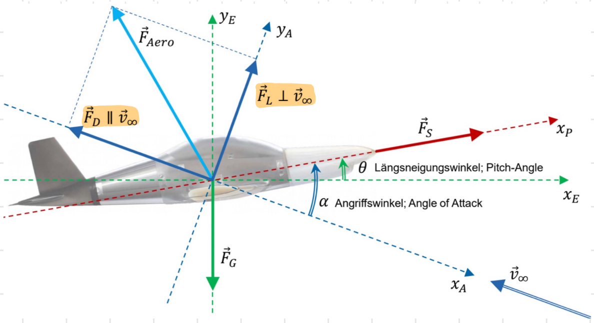
→ Statische Auftriebskraft $\vec{F}_A = -\rho_{Fl} \cdot V \cdot \vec{g} = -m_{Fl} \cdot g$

→ Hydrostatischer Druck $p = \rho \cdot g \cdot h$

ρ_{Fl}	Dichte des Umgebungsmedium	$\frac{kg}{m^3}$
p	Druck	Pa

→ Dynamischer Auftrieb:

→ Staudruck: $q = \frac{1}{2} \rho_{Luft} \cdot v^2$



q	Staudruck	$P = \frac{N}{m^2}$
ρ_{Luft}	Luftdichte	kg/m^3
v	Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$

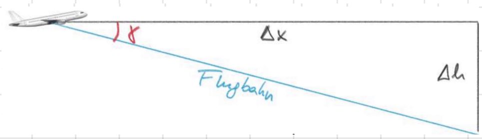
→ $F_{Lift} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v^2 \cdot c_L \cdot A$ → $c_L = \frac{F_L(\alpha)}{q \cdot A}$

→ $F_{Drag} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot v^2 \cdot c_D \cdot A$ → $c_D = \frac{F_D(\alpha)}{q \cdot A}$

c_L	Auftriebsbeiwert	1
c_D	Widerstandsbeiwert	1
A	Referenzfläche	m^2
α	Angle of Attack	$1°$

→ Stationärer Gleitflug bei Windstille: $(\dot{p} = 0)$

↳ Gleitverhältnis $\varepsilon = \tan\varphi = \frac{c_D}{c_L} = \frac{\Delta h}{\Delta x}$



↳ Gleitzahl $E = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{c_L}{c_D} = \frac{\Delta x}{\Delta h}$

$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

Mechanische Schwingungen

→ $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$

Ungedämpftes Federpendel

→ $\ddot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$ → $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

→ $U = f \cdot \frac{60s}{min}$ → $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$ → $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{1}{f}$

→ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2\pi \cdot f$ → $F(t) = D \cdot \Delta l(t)$

→ $v(t) = \dot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \delta)$

→ $a(t) = \ddot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \delta)$

$x(t)$	Ortsfunktion	m
$\dot{x}(t)$	↳ Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
$\ddot{x}(t)$	↳ Beschleunigung	$\frac{m}{s^2}$
D	Federkonstante	$\frac{N}{m}$
ω_0	Kreisfrequenz	$\frac{rad}{s}$
f	Frequenz	Hz
T	Periodendauer	s
U	Umdrehungen pro Minute	$\frac{1}{min}$
$\hat{x}$	Amplitude in Ruhelage	m
δ	Phasenverschiebung	$1°$

Mathematisches Pendel

→ $\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \varphi(t) = 0$ → $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

l	Pendellänge	m

Linear gedämpftes horizontales Federpendel

→ $\ddot{x}(t) + \frac{M_R}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$

→ $x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$

→ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $\gamma = \frac{M_R}{2m}$

x_0	Anfangsauslenkung	m
γ	Abklingkonstante	$\frac{1}{s}$
ω_d	Kreisfrequenz gedämpft	$\frac{rad}{s}$
M_R	Reibungskoeffizient	$\frac{Ns}{m}$

Harmonisch Angeregtes, Linear gedämpftes Federpendel

→ $\ddot{x}(t) + \frac{M_R}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) \cdot x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_A \cdot t)$

→ $x(t) = A(\omega_A \cdot t - \gamma(\omega_A))$

→ $A(\omega_A) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)^2 + (M_R \cdot \omega_A)^2}}$ (Amplitude des Oszillators)

→ $\gamma(\omega_A) = \arctan\left(\frac{M_R \cdot \omega_A}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)}\right)$ (Phasenverschiebung zwischen der Anregung und der Schwingung des Oszillators)

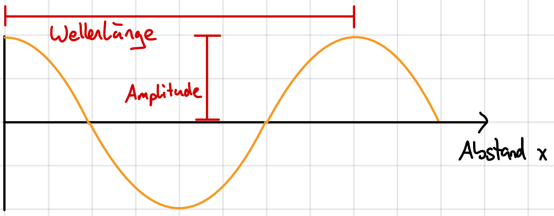
ω_A	Kreisfrequenz Anregung	$\frac{rad}{s}$
γ	Abklingkonstante	$\frac{N \cdot s}{m}$

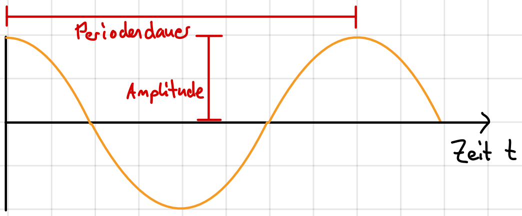
→ Resonanzüberhöhung $\frac{A_{wR}}{A_{stat}} = Q$ (Verlorene Energie durch Dämpfung)

→ $Q = \omega_d \cdot T$ → $T = \frac{1}{2\gamma}$ → $\gamma = \frac{\mu_R}{2m}$

→ Resonanzfrequenz $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\cdot\left(\frac{\mu_R}{2\cdot m}\right)^2}$ (Maximale Schwingungsamplitude)

A_{wR}	Max. Amplitude
A_{stat}	Statische Amplitude
Q	Gütefaktor
ω_d	Kreisfrequenz gedämpft
T	Zeitkonstante
γ	Abklingkonstante
ω_R	Resonanzfrequenz





Kreisbewegungen & Trägheitskräfte

→ Kartesisch - Polar

$$\begin{cases} r_P(t) = \sqrt{x_P(t)^2 + y_P(t)^2} \\ \theta_P(t) = \arctan\left(\frac{y_P(t)}{x_P(t)}\right) \end{cases}$$

→ Polar - Kartesisch

$$\begin{cases} x_P(t) = r_P(t) \cdot \cos\theta_P(t) \\ y_P(t) = r_P(t) \cdot \sin\theta_P(t) \end{cases}$$

→ Bahn- / Winkelgeschwindigkeit $v(t) = \omega(t) \cdot r$

v	Bahngeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{1}{s}$
r	Bahnradius	m
θ	Drehwinkel	rad

Gleichförmige Kreisbewegung $\omega(t) = \text{konst.}$

→ Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$

→ Drehwinkel $\theta(t) = \omega \cdot t$

→ Koordinaten eines Punktes $\begin{cases} x_P = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y_P = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$

→ Umlaufperiode $T = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

→ Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$\Rightarrow \omega = 2\pi \cdot f$

→ Radialbeschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$

→ Resultierende Kraft $F_{res} = a_r \cdot m$

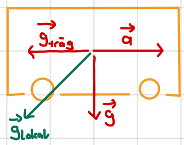
→ Looping: $F_N = -m \cdot \left(g - \frac{v^2}{r}\right)$ (Oben im Looping) → $v = \sqrt{g \cdot r}$

→ Zentrifugalkraft $\vec{F}_{ZF} = m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

→ Gravitationskraft $\vec{F}_{G12} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ $G = 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

F_{G12}	Gravitationskraft	N
G	Gravitationskonstante	

→ Trägheitsfeld $\vec{g}_{Lokal} = \vec{g}_{träg} + g$ mit $\vec{g}_{träg} = -a$

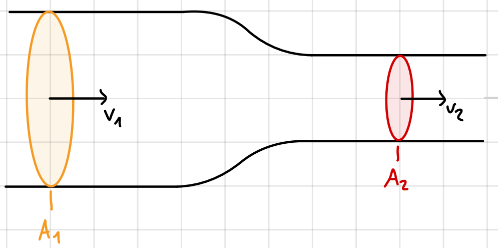


Offene Systeme - Energiebilanz

→ Gleichung von Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.}$ (für inkompressible Flüssigkeiten mit laminarer Strömung und ohne Reibungsverluste)

- p — (Umgebungs-) Druck Pa
- ρ — Dichte des Fluid $\frac{kg}{m^3}$
- v — Fliessgeschwindigkeit $\frac{m}{s}$
- h — Höhe über Referenzhöhe m

→ Venturi-Rohr.



— $h_1 = h_2$

→ $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

→ $v_2 > v_1$

→ $p_2 < p_1$

→ $p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \cdot \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$

→ $v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$ → $I_V = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)}}$

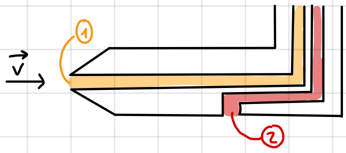
- I_V — Durchfluss $\frac{m^3}{s}$
- p — Druck
  - ⇒ 0,6 MPa
  - = 6 Bar
  - = 600 000 $\frac{N}{m^2}$ = Pa
  - = 6000 $\frac{N}{dm^2}$
  - = 60 $\frac{N}{cm^2}$
  - = 0,6 $\frac{N}{mm^2}$
  - = 600 hPa

Prandl'sches Staurohr

→ $p_1 - p_2 = p_{Stau}$

→ $p_{Stau} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2$

→ $v_s = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$



→ Impulsstrom $\frac{dp_r(t)}{dt} = I_{m,Gas} \cdot v_{Gas}$ $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ob;i} + \sum_i \vec{F}_{K,i} + \sum_i I_{m,i} \cdot \vec{v}_{m,i}$

- F_{ob} — Oberflächenkräfte z.B. Reibung
- F_K — Körperkräfte z.B. Gewichtskraft

→ Massestrom $I_m = \rho \cdot I_V(t)$

Festgehaltene Rakete

→ $\dot{p}_x = -F_{S \to R} + I_m \cdot v_{Gas}$ → $I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ → $v_{max} = v_A \cdot \ln \frac{m_0}{m_r}$

→ $\dot{p}_x = \dot{m \cdot v_x} = \dot{m} \cdot v_x + m \cdot \dot{v}_x$

- $\vec{F}_{S \to R}$ — Schubkraft N
- Δm — Gewichtsverlust kg
- V_A — Austrittsgeschwindigkeit m/s
- m_0 — Startmasse kg
- m_r — Restmasse kg

→ Strahltriebwerk $F_{Schub} = I_m \cdot (v_{out} - v_{in})$

→ Mantelstromtriebwerk $F_{Schub} = \underbrace{I_{m,K} \cdot (v_{out,K} - v_{in})}_{\text{Kerntriebwerk}} + \underbrace{I_{m,M} \cdot (v_{out,M} - v_{in})}_{\text{Zusatz Mantel}}$

⚠ Verhältnis Mantel-Kern von 4:1
↳ Mantel: $\frac{4}{5} I_V$, Kern: $\frac{1}{5} I_V$

→ Ausfluss an einem Punkt: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$

- h_1 — Höhe des Abflusses unter Flüssigkeitsspiegel m

Kinematik des Starren Körpers

→ Massemittelpunkt = Schwerpunkt: $\vec{r}_{mmp} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} m_k \cdot \vec{r}_k$ → $\vec{a}_{mmp} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{m}$

- $\vec{r}_{mmp}$ — Ortsvektor zum Massemittelpunkt $\begin{pmatrix} x_{mmp} \\ y_{mmp} \end{pmatrix}$
- $\vec{F}_{ext}$ — ges. externe Kraft N
- $\vec{a}_{mmp}$ — Beschleunigung des MMP m/s²

→ 2D: $v(t) = r \cdot |\omega(t)|$

→ 3D: $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin\varphi$

→ Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Beschleunigung eines Punktes um eine Achse

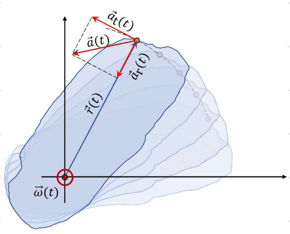
→ $\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_r(t)$

→ $\vec{a}_t(t) = r \cdot |\dot{\omega}(t)|$

→ $\vec{a}_r(t) = r \cdot \omega^2(t)$

→ $\vec{a}_t(t) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}(t)$

→ $\vec{a}_r(t) = \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))$



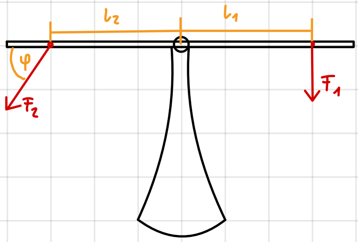
a	Gesamtbeschleunigung	
a_t	tangentialbeschleunigung	
a_r	radialbeschleunigung	
M	Drehmoment	Nm
l	Länge	m
F	Kraft	N

→ Drehmoment

Kraft ⊥ $M = l \cdot F$

mit Winkel: $M = l \cdot F \cdot \sin\varphi$

Vektoriell: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



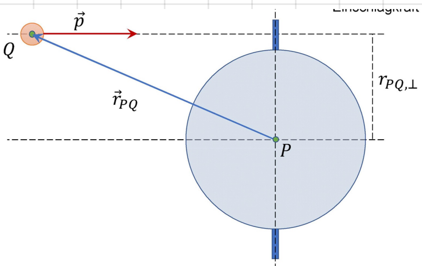
Drehimpuls

→ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\varphi$

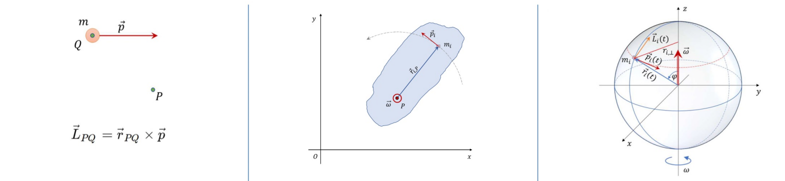
→ $\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$

→ $\vec{M}_{ext} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$

→ $\dot{\vec{\omega}} = \frac{M_{ext}}{J}$



L	Drehimpuls	$Nms = \frac{kg \cdot m^2}{s}$
J	Massenträgheitsmoment	$kg \cdot m^2$
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	
M	Drehmoment	
d	Verschobene Achse	m



Drehimpuls einer **Punktmasse** bezüglich Punkt P

$\vec{L}_{PQ} = J_{PQ} \cdot \vec{\omega}$

$J = m \cdot r_{PQ}^2$

Drehimpuls eines **«2D»-Körpers** bezüglich Punkt P

$\vec{L}_P = J_P \cdot \vec{\omega}$

$J = \sum_i m_i \cdot r_{i,P}^2$

Drehimpuls eines **«3D»-Körpers** bezüglich Symmetrieachse

$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

$J = \sum_i m_i \cdot r_{i,\perp}^2$

→ Verschobene Achse $J_d = J_{mmp} + m \cdot d^2$

→ Rotationsenergie

2D: $W_{kin,rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

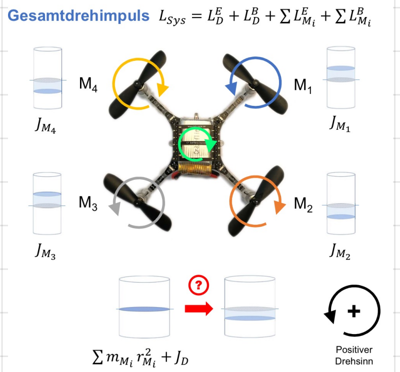
3D: $W_{kin,rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

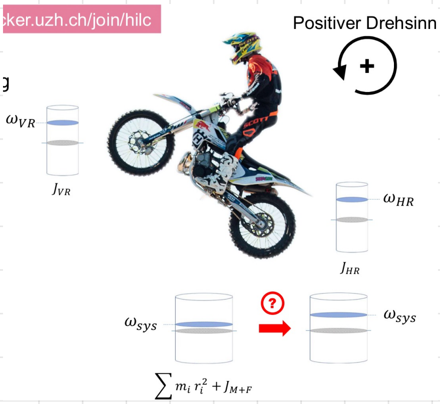
⚠ Rotation & Translation:

$W_{kin} = W_{kin,mmp} + W_{kin,rot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$

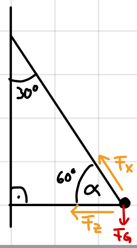
→ Eigen- und Bahndrehimpuls $L_{Ges} = L_{Bahn} + L_{Eigen}$

$L_{Ges} = \vec{r}_{mmp} \times (m \cdot \vec{v}_{mmp}) + J \cdot \vec{\omega}$





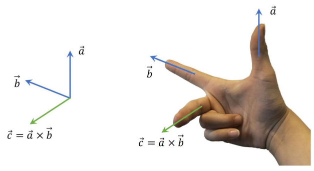
Tipps & Tricks



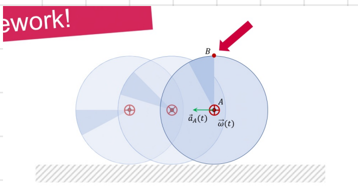
$F_x = F_z$

$F_z \cdot (\cos\alpha + 1) = m \cdot \omega^2 \cdot r$

$\omega = \sqrt{\frac{F_z \cdot (\cos\alpha + 1)}{m \cdot r}}$



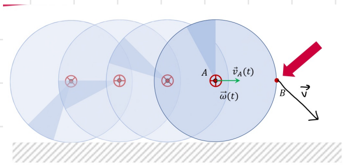
a vom Punkt B eines Rades



Cheat Sheet $\vec{a}_B(t) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}_{AB}(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AB}(t)\right)$

- Richtung der Vektoren in der Summe …
- Geeignetes Bezugssystem …
- Komponenten der Vektoren ...
- Komponenten von $\vec{v}_B(t)$ …
- Betrag …

v vom Punkt B eines Rades



Cheat Sheet $\vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AB}(t)$

- Richtung von $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AB}(t)$ …
- Geeignetes Bezugssystem …
- Komponenten der Vektoren ...
- Komponenten von $\vec{v}_B(t)$ …
- Betrag …

Bremsdauer: $\rightarrow v = 0 \rightarrow p = 0$

$\rightarrow \Delta t_s = \frac{p_c}{F_R} = \frac{m \cdot v}{\mu \cdot m \cdot g} = \frac{v}{\mu \cdot g}$

Querschwingung

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \underbrace{\vec{F}_G + \vec{F}_N}_{F_G = -F_N} = \dot{\vec{p}}$

$m \cdot \ddot{x}(t) = m \cdot a = \dot{p}$

↳ Vergleich mit Formel

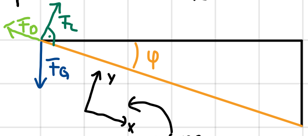
↳ $\omega_0^2 = \frac{2D}{m}$

→ Amplitude halbiert nach $n \cdot T$

$x(n \cdot T) = e^{-\gamma \cdot n \cdot T} \cdot \hat{x} = \frac{1}{2} \hat{x}$

Gleitflug / Sinkflug

$\dot{\vec{p}} = 0 \rightarrow \vec{F}_{Aero} + \vec{F}_G = \vec{0}$



$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} m \cdot g \cdot \sin\varphi \\ -m \cdot g \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow |\vec{F}_D| \\ \rightarrow |\vec{F}_L| \end{matrix}$

Belastung im Looping

$g_t + g < 5g$

$a + g < 5g$

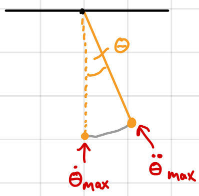
$\frac{v^2}{r} < 4g$

Oszillator

→ $v_{max} = \omega_0 \cdot \hat{x}$ > $[\sin(\omega_0 t) = -1]$

→ $a_{max} = \omega_0^2 \cdot \hat{x}$

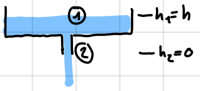
→ F_{max} wenn $x(t) = \hat{x}$



Bernoulli

→ Immer 2 Orte Vergleichen in Abhängigkeit einer Referenzhöhe

→ Absolutdruck an einem Ort:



$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$

p_1 → Umgebungsdruck

v_1 → $= 0 \ (v_1 = 0)$

h_1 ↳ h gegenüber Referenzhöhe

p_2 → Absolutdruck

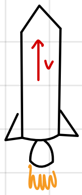
v_2 → $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$

h_2 → $= 0 \ (h_2 = 0)$

Rakete

→ Massenbilanz $-I_m = \dot{m}_R$

→ Impulsbilanz $m \cdot \vec{g} - I_m \cdot \vec{v} = \dot{\vec{p}}$



→ Beschleunigung $a = \dot{v}$

$\dot{p} = (m \cdot v)^{\cdot} = \dot{m} \cdot v + m \cdot \dot{v}$

$\rightarrow \dot{v} = \frac{I_m}{m} \cdot c_G - g$ | c_G: v des Austretenden Gas

⚠ Im offenen System ist $\dot{p} \neq \dot{v}$

Hohlzylinder vs. Vollzylinder

v_{max} bei kleinen Massenträgheitsmoment

(Energieerhaltungssatz)