FUM Zusammenfassung

Abkürzungen/Befehle

Befehl events():

Dieser Befehl erzeugt folgende Spalten:

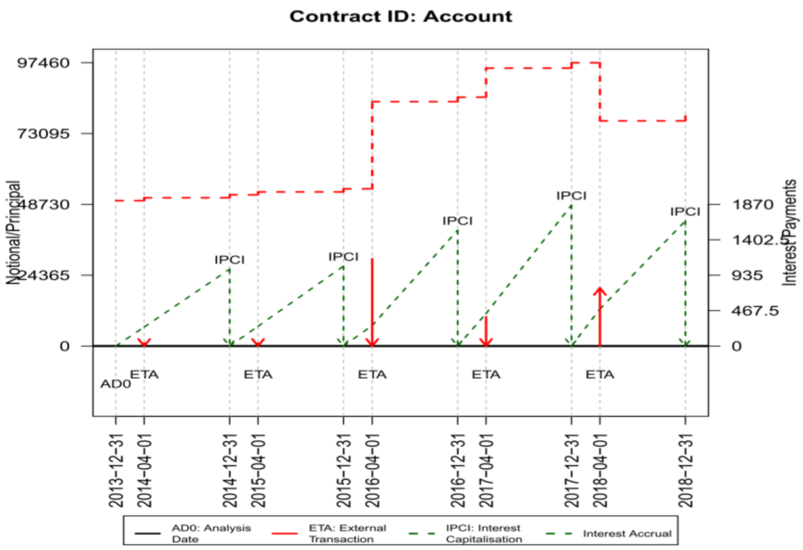
Date	Value	Type	Level	Currency	Time	Nominal Value	Nominal Rate	Nominal Accured
Datum	Wert	siehe unten		Währung	Zeit in **Jahren** ab Beginn der Simulation	aktueller Wert	Zinssatz	Aufgelaufene Zinsen

Spalte Type:
AD0 = Analysis Data 0: Start der Simulation. (gibt es bei allen Typen)
bankAccount():
ETA = External Transaction: Ein einziger Mittel zu- oder -abfluss.
IPCI = Interest Payment Capital Increase Kontogutschrift der Zinszahlung
OperationalCF():
OPS = Operational cash flow Cashflow, der aus betrieblichen Tätigkeit entsteht
Investments():
IED = Initial Exchange Date Datum, an dem der erste Cashflow erfolgt
DPR = Depreciation Abschreibung des Wertes der Investition
bond(): *auch IED*
IP = Interest payment Auszahlung der Zinsen / Zinszahlungen
MD = Maturity Date Datum, an dem Vertrag endet und Kapitalrückzahlung
annuitiy(): *auch IED, IP, MD*
regelmäßig jährlich fließende Zahlung, die sich aus den Zins und Tilgung zusammensetzt.
PR = Prinzipal Repayment
PRF =
loan(): *auch IED, PR, IP, MD*

Time = Zeit in **Jahren** ab Beginn der Simulation
Nominal = Saldo
IR = Prevailing interest rate Geltender Zinssatz
Accrued = Aufgelaufene Zinsen

Darstellung des Kontrakts bankAccount() mit Geldflüssen und Zinsen

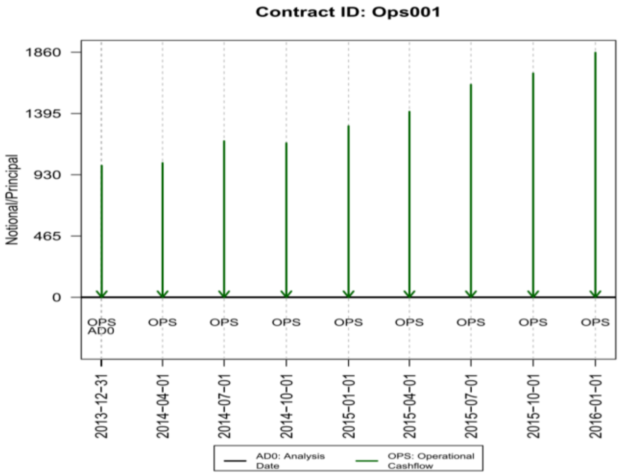
- plot(my.account, "2013-12-31")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Die **vollen roten Pfeile nach unten und oben** sind die eingehenden und ausgehenden **Geldströme** des Kontraktes
- Die **gestrichelte rote Linie** stellt den Verlauf des **Saldos** dar.
- Die **gestrichelten grünen Pfeile nach unten und oben** stellen die dem Kontrakt **gutgeschriebenen Zinsens** dar.
- Die **steigende grüne gestrichelte Linie** stellt die **aufgelaufenen Zinsen** bis zum Zinszahlungsdatum dar.



- **Die linke Skala bezieht sich auf das Kapital und die rechte Skala auf die Zinsen.**

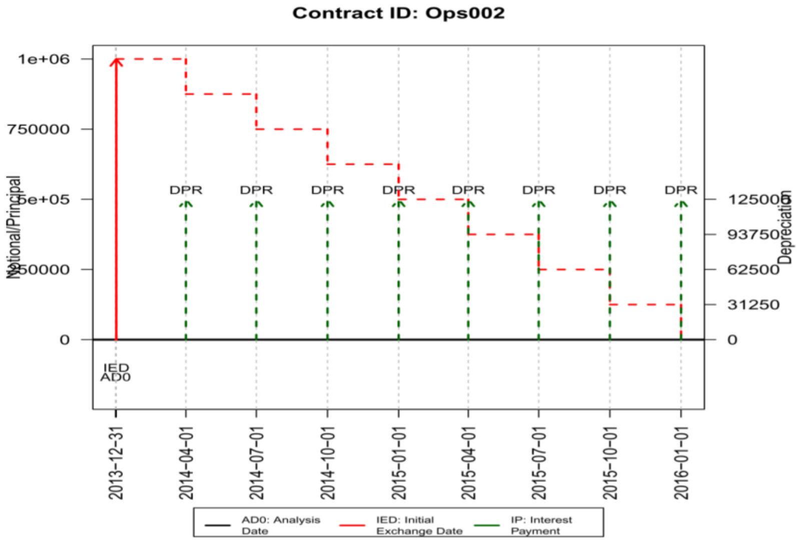
Darstellung des Kontrakts bankAccount() mit Geldflüssen und Zinsen

- plot(OpCFs, "2013-12-31")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Die **vollen grünen Pfeile** nach unten zeigen hier die Geldzuflüssen / den Cashflow ins Unternehmen auf. Ein Pfeil nach oben würde bedeuten, dass Geld die Unternehmung verlassen hat.



Darstellung des Kontrakts Investments() mit Geldflüssen und Abschreibungen

- plot(invest, "2013-12-31")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Der **volle rote Pfeile nach oben** ist der Investitionsbetrag für die Investition und damit auch ein ausgehender **Geldstrome** des Kontraktes.
- Die **gestrichelte rote Linie** stellt den Verlauf des **aktuellen Buchwerts** der Investition dar. Dieser nimmt durch die lineare Abschreibungen laufend um den gleichen Schritt ab.
- Die **gestrichelten grünen Pfeile nach oben** stellen die **Abschreibungen** der Investition dar. Es handelt sich hierbei um KEINEN Geldfluss.



- **Die linke Skala bezieht sich auf den Investitionsbetrag und seinen aktuellen Buchwert und die rechte Skala auf die Abschreibungen.**

Financial contracts - Finanzielle Verträge

Wir betrachten die folgenden Basisverträge:

- Anleihe (PAM)
- Annuität (ANN)
- Darlehen mit konstanter Tilgung (LAM)

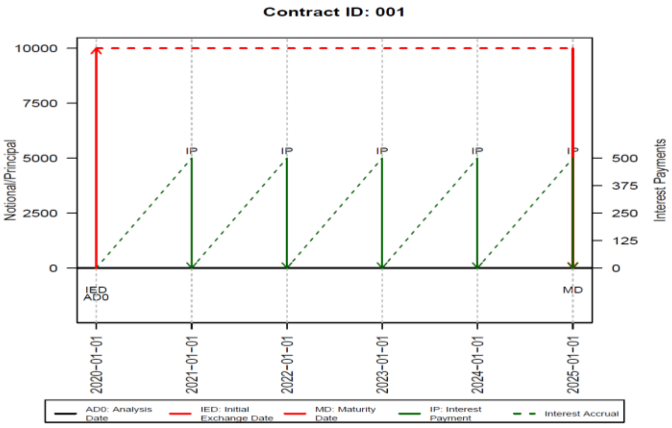
Jeder dieser Verträge hat ein charakteristisches Cashflow-Muster.

Anleihen (PAM)

Anleihen sind weit verbreitete Finanzinstrumente. Eine Standardanleihe weist folgende Merkmale auf:

- Der Käufer einer Anleihe zahlt den Marktpreis der Anleihe.
- Dieser Marktpreis entspricht in der Regel dem Nennwert der Anleihe.
- Die Anleihe zahlt dann in der Regel (aber nicht unbedingt) Zinsen an den Anleger.
- Aus historischen Gründen werden diese Zahlungen als "Kuponzahlungen" bezeichnet.
- Am Ende der Vertragslaufzeit (der sogenannten Fälligkeit) wird der Nennwert in einer einzigen Zahlung an den Anleger zurückgezahlt.
- Kontrakt wird im R mit bond() erstellt.

Darstellung des Kontrakts bond() mit Geldflüssen und Zinsen



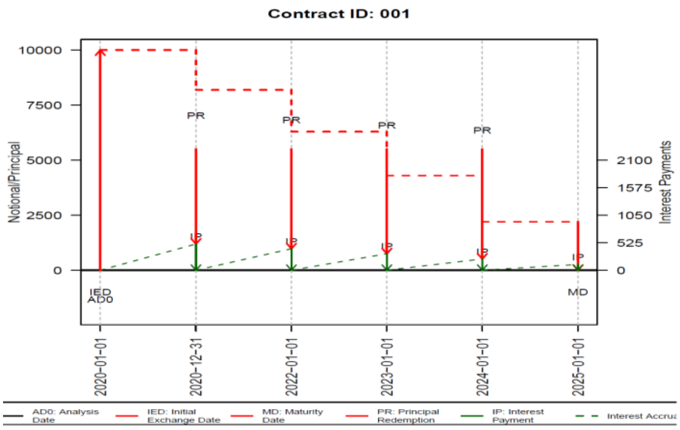
- plot(b1, "2020-01-01")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Die **vollen roten Pfeile nach unten und oben** sind die Investition in den Bond (Kauf / nach oben) und die Rückzahlung des Bond (Pfeil nach unten).
- Die **gestrichelte rote Linie** stellt den Verlauf des **Saldos** dar. Dieser bleibt konstant beim Bond und ändert sich erst bei Fälligkeit.
- Die **vollen grünen Pfeile nach unten** stellen die dem Kontrakt **gutgeschriebenen Zinsen** dar.
- Die **steigende grüne gestrichelte Linie** stellt die **aufgelaufenen Zinsen** bis zum Zinszahlungsdatum dar.
- **Die linke Skala bezieht sich auf das Kapital und die rechte Skala auf die Zinsen.**

Annuitäten (ANN)

Annuitäten sind eine weitere Art von Finanzinstrumenten, die weit verbreitet ist, z.B. für Rentenzahlungen. Sie haben die folgenden Eigenschaften:

- Im Gegensatz zu Anleihen wird das Kapital während der Vertragslaufzeit sukzessive getilgt.
- Die periodischen Zahlungen setzen sich also aus Zins- und Tilgungszahlungen zusammen.
- Annuitäten sind so strukturiert, dass die Summe aus Zins- und Tilgungsleistung eine **Konstante** ist.
- Mit der letzten Zahlung am Fälligkeitstag wird das Kapital vollständig zurückgezahlt.

Darstellung des Kontrakts annuity() mit Geldflüssen und Zinsen



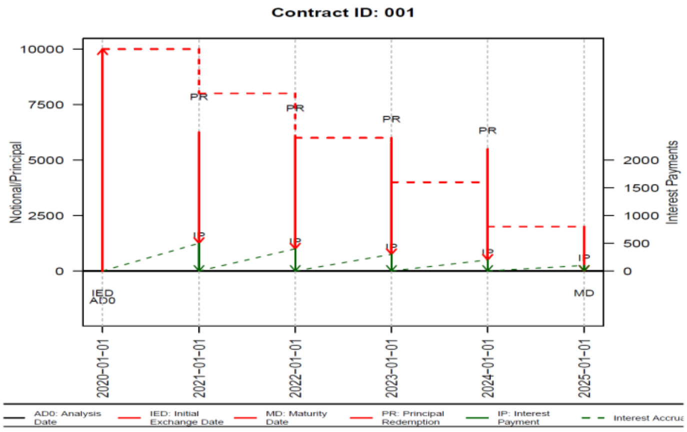
- plot(a1, "2020-01-01")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Die **vollen roten Pfeile nach unten und oben** sind die Kapitalzahlungen in die Annuität (Kauf / nach oben) und die laufende Rückzahlung der Annuität (Pfeile nach unten).
- Die **gestrichelte rote Linie** stellt den Verlauf des **Saldos** dar.
- Die **gestrichelten grünen Pfeile nach unten** stellen die dem Kontrakt **gutgeschriebenen Zinsen** dar.
- Die **steigende grüne gestrichelte Linie** stellt die **aufgelaufenen Zinsen** bis zum Zinszahlungsdatum dar.
- **Die linke Skala bezieht sich auf das Kapital und die rechte Skala auf die Zinsen.**

Kredite mit linearer Amortisation (LAM)

Eine dritte häufig anzutreffende Art von Finanzverträgen ist der Kredit mit konstanter Tilgung (kurz: Kredit). Dieser Vertrag hat die folgenden Eigenschaften:

- Hier ist die periodische Amortisation konstant.
- Da das Kapital mit der Zeit abnimmt, sinken auch die Zinszahlungen mit der Zeit.
- Im Laufe der Zeit bleiben die Amortisationszahlungen konstant und die Zinszahlungen nehmen ab.
- Im Gegensatz zu Rentenversicherungen sinkt dort also die Summe aus Tilgung und Zinszahlung im Laufe der Zeit.

Darstellung des Kontrakts loan() mit Geldflüssen und Zinsen



- plot(l1, "2020-01-01")
- Übergabe des Kontrakts und des Startdatums der Zeitserie des Plots
- Die **vollen roten Pfeile nach unten und oben** sind die Kapitalzahlungen in den Kredit (Kauf / nach oben) und die laufende lineare Rückzahlung des Kredites (Pfeile nach unten).
- Die **gestrichelte rote Linie** stellt den Verlauf des **Saldos** dar. Dieser nimmt konstant ab.
- Die **gestrichelten grünen Pfeile nach unten** stellen die dem Kontrakt **gutgeschriebenen Zinsen** dar, welche über die Laufzeit aufgrund der Kapitalamortisationen abnehmen.
- Die **steigende grüne gestrichelte Linie** stellt die **aufgelaufenen Zinsen** bis zum Zinszahlungsdatum dar.
- **Die linke Skala bezieht sich auf das Kapital und die rechte Skala auf die Zinsen.**

Übersicht Abkürzungen der wichtigsten Formeln

- A = Investitionsbetrag
- r = Nominalzinssatz (8 % Zinssatz wäre r = 0.08)
- r' = Effektivzins (Abhängig von Verzinsungsperiode)
- n = Anzahl Jahre
- V = Endkapital nach Verzinsungen
- m = Anzahl Perioden im Jahr (m = 12 → monatlich, m = 4 → quartalsweise, m = 2 → halbjährlich)
- k = Anzahl Perioden
- EW = Endwert
- BW = Barwert
- NBW = Nettobarwert = (Barwert der Einnahmen) – (Barwert der Kosten)

Aus dem Englischen

- Net present value = NPV = Barwert
- Internal rate of return = Interner Zins

Zinsen

Berechnung von Marchzinsen erfolgt in diesem Modul mit der Methode "Actual/Actual AFB" (kurz A/A) Sei d ein Datum im Jahr n, dann sollte die Dauer in Jahren gegeben sein als:

$$x(d) = \frac{\#(vom\ 31.12. des\ Vorjahres\ bis\ d)}{\#(Tage\ im\ Jahr)}$$

Daumenregeln

Die 7–10-Regel:

- Geld, das zu 7% Zinsen im Jahr angelegt ist, verdoppelt sich in ca. 10 Jahren.
- Geld, das zu 10% Zinsen angelegt ist, verdoppelt sich in ca. 7 Jahren.

Genauer:

- Geld, das zu 7% angelegt ist, wächst in 10 Jahren um den Faktor 1.97.
- Geld, das mit 10% angelegt ist, wächst in 7 Jahren um den Faktor 1.95.

Verallgemeinerung:

- Für Zinsen kleiner als 20% beträgt die Verdopplungszeit ca. 72/i.
- Dabei ist i der Zinssatz ausgedrückt in Prozent.

Zinseszinsen bei unterjähriger Verzinsung

Zinsen werden in der Regel nicht jährlich gezahlt, sondern vierteljährlich, monatlich und in gewissen Fällen sogar täglich. Die **Verzinsungsperiode** ist also der entsprechenden Bruchteil eines Jahres. Der Zinssatz r (der sogenannte Nominalzins) wird aber weiterhin auf ein Jahr bezogen. Bei vierteljährlicher Verzinsung ist das Vermögen nach 1 Jahr also um den Faktor $(1 + \frac{r}{4})^4$ gewachsen. Dies ist mehr als 1 + r!

Bei m Perioden im Jahr ist der Zins per Periode r/m. Nach k Perioden ist das Vermögen dann um folgenden Faktor gewachsen: $\boldsymbol{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k}$

Stetige Verzinsung: Wenn man die Anzahl m der Intervalle immer grösser macht, erhält man im Limes m →∞ e^r die Euler-Zahl 2.7818

Nominalzins und Effektivzins

Wichtige Frage bei unterjähriger Verzinsung: Um wieviel erhöht sich der Wert von 1 Franken in 1 Jahr?
Bei einem (nominellen) Zinssatz von 8% und vierteljährlicher Verzinsung ergibt sich z.B.:
$1.02^4 = 1.0824$
Das Vermögen wächst also innerhalb eines Jahres effektiv um 8.24%. Deshalb heisst dieser **Wachstumsfaktor** der **jährliche Effektivzins**. Er ist höher als der Nominalzins, in diesem Fall um 0.24 Prozentpunkte.
→ Je kürzer die Verzinsungsperiode und je höher der Nominalzins, desto grösser wird diese Differenz.
Die Beziehung zwischen Nominalzins r und Effektivzins r' ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\boldsymbol{1+r' = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m}$$

Im Fall der stetigen Verzinsung genügt der Effektivzins der Gleichung $1 + r' = e^r$, also: $r' = e^r - 1$

Schulden

Schulden wachsen gemäss denselben Formeln wie Guthaben. Schuldzinsen (= Sollzinsen) sind in der Regel grösser als Habenzinsen. Die Differenz heisst "Zinsaufschlag".

Barwert und Endwert eines Zahlungsstroms

Zentral in diesem Abschnitt ist die Bewertung von Cashflow-Strömen mit Hilfe von Zinsen.

Endwert

- Wir betrachten einen Zahlungsstrom (x_0, x_1, ..., x_n) von Zahlungen x_i, die zu Zeiten t_i, i = 0, ..., n eintreffen.
- Die t_i sind so geordnet, dass $t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_n \equiv T$.
- Wir interessieren uns für den **Wert** der Zahlungen am **Ende** des **Zahlungsstroms** zum Zeitpunkt T
- Der Wert lässt sich berechnen, in dem jede Zahlung x_i gleich bei Eingang zum Zeitpunkt t_i auf einer KIB deponiert und zum Zeitpunkt T wieder abgehoben wird.
- Jede Zahlung x_i wird also für die Zeitspanne $T - t_i$ gemäss der Zinseszinsrechnung verzinst.

Für die konkrete Rechnung werden noch folgenden technische Annahmen getroffen:

- Der Nominalzins beträgt r. Die Verzinsungsperiode ist auf 1 Jahr festgesetzt.
- Zahlungen erfolgen immer am Ende einer Verzinsungsperiode.
- Für ausgehende Zahlungen wird ein entsprechendes Darlehen aufgenommen.
- Den Gesamtwert des Zahlungsstroms erhält man folgendermassen: Jede Zahlung x_i wird mit der Formel $\boldsymbol{(1+r)^{n-i}}$ auf das Datum $T = t_n$ der letzten Zahlung aufgezinst, und diese auf diskontierten Werte werden addiert.

Am Ende der **n Perioden** ist x_0 auf $x_0 \cdot (1+r)^n$, x_1 auf $x_1 \cdot (1+r)^{n-1}$, etc. gewachsen. Damit ergibt sich der Endwert des Zahlungsstrom zu $\boldsymbol{EW = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (1+r)^{n-i}}$

Beispiel: Der Zahlungsstrom (−2, 1, 1, 1) hat bei einem Nominalzins von 10% den Endwert
$EW = -2 \cdot (1.1)^3 + 1 \cdot (1.1)^2 + 1 \cdot 1.1^1 + 1 \cdot 1.1^0 = 0.648$

Barwert

Wir sind am heutigen (Zeitpunkt t_0) am Wert eines zukünftigen Zahlungsstroms interessiert. Für eine einzelne Zahlung x_i lautet die Frage jetzt:

- Wieviel Geld müssen wir zum heutigen Zeitpunkt t_0 auf der KIB einzahlen bzw. leihen, damit wir zum Zeitpunkt t_i den Betrag x_i erhalten bzw. zurückzahlen müssen.
- Es gilt also: $x_i = x_0(i) \cdot (1+r)^i$ → $x_0(i) = \frac{x_i}{(1+r)^i} \equiv d_i \cdot x_i$ mit dem Abzins- (oder Diskontierungs-)faktor $d_i = \frac{1}{(1+r)^i} \cdot x_0(i)$ wird Barwert (BW) von x_i zum Zinssatz r genannt.
- Der Barwert des Zahlungsstroms ergibt sich $\boldsymbol{BW = \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (1+r)^{n-i} = \frac{EW}{(1+r)^n}}$

Beispiel: Der Zahlungsstrom (−2, 1, 1, 1) hat bei einem Nominalzins von 10% den Barwert von
$BW = -2 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{1}{1.1^3} = 0.487 = \frac{0.648}{1.1^3}$

Barwert bei unterjähriger Verzinsung

Barwert einer einzelnen Zahlung:
Angenommen, der jährliche Nominalzinssatz sei r und die Verzinsung unterjährig mit m Perioden pro Jahr. Der Barwert einer einzelnen Zahlung A nach k Perioden ist dann $d_k A$ mit Diskontfaktor $d_k = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k}$

Barwert eines Zahlungsstroms:
Gegeben sei ein Zahlungsstrom von n Perioden Länge, (x_0, x_1, ..., x_n) und verzinst werde wie oben. Dann ist der Barwert des Zahlungsstroms gegeben als $\boldsymbol{BW = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k}}$

Barwert bei stetiger Verzinsung
Der jährliche Nominalzins sei r und es werde stetig verzinst. Die Zahlungen eines Zahlungsstromes treten zu den Zeitpunkten t_1, t_2, ..., t_n auf. (Bei unterjähriger Verzinsung gilt t_k = k/m.) Ausserdem benutzen wir für die Zahlung zum Zeitpunkt t_k die Schreibweise $x(t_k)$: {x(t): t ∈ (t_1, t_2, ..., t_n)}
Dann ergibt sich der Barwert des Zahlungsstromes zu $\boldsymbol{BW = \sum_{k=1}^{n} x(t_k) e^{-rt_k}}$

Barwert und die ideale Bank

Die ideale Bank kann benutzt werden, um das Muster eines Zahlungsstroms zu verändern. Der Zahlungsstrom (1, 0, 0) kann zum Beispiel in den Zahlungsstrom (0, 0, 1.21) überführt werden (Zinssatz p.a. 10%). Dazu wird jetzt Fr 1 einbezahlt und erhält in 2 Jahren den verzinsten Betrag zurück:
$(1,0,0) \xrightarrow{KIB} (0,0,1.21)$ oder in die andere Richtung, wenn Geld geliehen wird. $(1,0,0) \xleftarrow{KIB} (0,0,1.21)$

Hauptsatz über Barwerte:
Zwei Zahlungsreihen x = (x_1, x_2, ..., x_n) und y = (y_1, y_2, ..., y_n) sind bezüglich einer konstanten idealen Bank mit Zinssatz r genau dann äquivalent, wenn die Barwerte beider Zahlungsreihen, berechnet mit dem Zinssatz der idealen Bank, gleich sind.

Barwert, Endwert, Zinssatz und Laufzeit

Eine einzelne Zahlung x_n zum Zeitpunkt t_n = n = Jahre. Zinssatz sei r und es werde jährlich verzinst. Dann gilt folgende Beziehung zwischen x_n, n, r und Barwert x_0: $f(x_0, x_n, r, n) = x_0 \cdot (1+r)^n - x_n = 0$

Endwert: $\boldsymbol{x_n = x_0 \cdot (1+r)^n}$ **Barwert:** $\boldsymbol{x_0 = \frac{x_n}{(1+r)^n}}$

Laufzeit: $\mathbf{n} = \frac{\log\left(\frac{x_n}{x_0}\right)}{\log(1+r)}$ **Zinssatz** $\boldsymbol{r = \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$

Rechenbeispiele zum Barwert

Wann soll der Baum gekürzt werden?

Ein junger Investitionsexperte möchte gleichzeitig Theorie und Anwendung der Investitionstheorie erlernen. Er hat von einem Waldbesitzer, der Bäume für Bauholz pflanzt, erfahren, dass es möglich sei, das Fällen der Bäume um ein zusätzliches Jahr hinauszuzögern. Der Waldbesitzer sagt gleichzeitig, dass dieses Vorgehen allerdings aus einer Barwert-Sicht nicht vorteilhaft ist. Der Experte schliesst daraus, dass das erzielte Einkommen kleiner als x sein muss. Welchen Wert hat x?

Fällen nach einem oder zwei Jahren mit Zinssatz von 10% und folgenden beiden Zahlungsreihen:

a) (-1, 2) $NBW = -1 + \frac{2}{1.1^1} = 0.82$
b) (-1, 0, 3) $NBW = -1 + \frac{3}{1.1^2} = 1.48$ wäre besser

Damit es sich nicht lohnt muss folgendes gelten:
$1.48 \geq -1 + \frac{x}{1.1^3} \Leftrightarrow 1.96 \geq -1.331 + x \Leftrightarrow \sim 3.3 \geq x$ Das Einkommen aus dem Baumverkauf nach drei Jahren muss somit kleiner oder gleich als 3.3 sein, dass es sich nicht lohnt.

Die Begutachtung

Sie sind dabei, sich für den Kauf eines Hauses zu entscheiden. Das Haus ist in jeder Hinsicht Ihren Erwartungen entsprechend und bis auf das Dach in sehr gutem Zustand. Das Dach hat eine erwartete verbleibende Lebensdauer von 5 Jahren. Die erwartete Lebensdauer von einem neuen Dach wäre 20 Jahre und würde CHF 20'000 kosten. Des Weiteren kann für diese Überlegungen davon ausgegangen werden, dass das Haus unendlich lange hält. Nehmen Sie an, dass die Kosten für das Dach konstant bleiben und rechnen Sie mit einem Nominalzins von 5%. Welchen Wert würden Sie dem älteren Dach geben?

Sofortiges Ersetzen des Daches kostet jetzt C = CHF20'000. Wenn Sie das Dach in 5 Jahren ersetzen würden, könnten Sie heute den Betrag x so zum Marktzins investieren, dass Ihnen in 5 Jahren C ausbezahlt würde. Der Betrag x ist der Barwert von C mit Fälligkeit in 5 Jahren und bei Nominalzins von 5% mit jährlicher Verzinsung. Wir erhalten also für x: $x = \frac{CHF\ 20\,000}{1.05^5} = CHF\ 15\,671$

Der heutige Wert v_0 des vorhandenen Dachs ergibt sich aus Differenz von C und x: $v_0 = C - x = 4329$

Diskontierungsfaktoren $d(T)$	$T =$ 1 Monat	$T =$ 3 Monat	$T =$ 6 Monat	$T =$ 1 Jahr
Jährliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{12}}}$	$\frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{(1+r)}$
Halbjährliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{6}}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}}$
Vierteljährl. Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{4}\right)}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^{2}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4}}$
Monatliche Verzinsung zum Zinssatz r	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{3}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{6}}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}}$
Stetige Verzinsung zum Zinssatz r	$\exp(-\frac{r}{12})$	$\exp(-\frac{r}{4})$	$\exp(-\frac{r}{2})$	$\exp(-r)$

Interner Zinssatz – IZS

Ist ein alternatives Konzept zur Analyse von Zahlungen. Er bezieht sich nicht auf eine einzelne Zahlung, sondern auf die gesamte mit einer Investition verbundenen Zahlungsreihe. Zahlungsreihen, auf die man dieses Konzept anwendet, setzen sich in der Regel zusammen aus

- positiven (eingehenden) und
- negativen (ausgehenden) Zahlungen.

Beispiel: Investition in ein festverzinsliches Wertpapier mit Aufzinsung und einjähriger Laufzeit. Die dazugehörige Zahlungsreihe enthält genau zwei Zahlungen:

- die Anfangsinvestition (negative Zahlung)
- die Auszahlung nach einem Jahr (positive Zahlung).

Der Barwert der Zahlungsreihe ist Null.

Betrachte die Zahlungsreihe ($x_0, x_1, ..., x_n$) mit Barwert $BW = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k}$

Man kann die Reihe aus einer Folge von Ein- und Auszahlungen auf eine konstante ideale Bank mit Zinssatz r konstruieren. Nach dem Hauptsatz über Barwerte verschwindet der Barwert dieser Reihe.

Dem IZS liegt die Idee zugrunde, dieses Verfahren umzukehren:
Für eine gegebene Zahlungsreihe schreiben wir den Ausdruck für ihren Barwert auf und suchen den Zinssatz r, für den dieser Barwert verschwindet. Der entsprechende Zinssatz wird IZS genannt, weil es sich um den Zinssatz handelt, der durch die interne Struktur der Zahlungsreihe impliziert wird. Diese Idee lässt sich auf jede Zahlungsreihe anwenden.

Sei ($x_0, x_1, ..., x_n$) eine Zahlungsreihe. Dann ist der interne Zinssatz dieser Reihe die Zahl r, die folgende Gleichung erfüllt: $0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i}$

Gleichwertig dazu ist die Aussage, dass der interne Zinssatz r durch die Zahl c = 1/(1 + r) bestimmt wird, die folgende polynomiale Gleichung erfüllt: $0 = \sum_{i=0}^{n} x_i\, c^i$
Dies ist eine vorläufige Definition, da Polynome n-ter Ordnung mehrere nicht notwendigerweise reell-wertige Nullstellen haben können.

Beispiel (Polynomiale Zahlungsreihe)
Betrachten das obige Beispiel mit der Zahlungsreihe (−2, 1, 1, 1).
Der interne Zinssatz ergibt sich als Lösung der Gleichung $0 = -2 + c + c_2 + c_3$.
Die Lösung c = 0.81 lässt sich durch Versuch und Irrtum finden. Der IZS beträgt damit r = 1/c − 1 = 0.23.

Bemerkungen:

- Der IZS hat keine Beziehung zum gerade gültigen Zinssatz. Im Gegenteil, er ist vollständig durch die Zahlungsreihe definiert.
- **Es ist der Zinssatz, den eine ideale Bank anwenden müsste, um den Zahlungsstrom ohne anfänglichen Kapitaleinsatz zu generieren.**
- $0 = \sum_{i=0}^{n} x_i\, c^i$ ist ein Polynom n-ter Ordnung.
- Sie hat im Allgemeinen keine analytischen Lösungen, lässt sich aber numerisch lösen.
- Nach der Theorie gibt es mindestens eine Lösung. Diese Lösung kann aber komplex sein.
- Für die am häufigsten vorkommenden Zahlungsreihen mit einer anfänglichen negativen Zahlung gibt es glücklicherweise immer eine eindeutige positive Lösung. Der IZS ist dann wohldefiniert und relativ einfach zu berechnen.
- Wenn es auch komplexe Lösungen gibt, wird die Interpretation des IZS schwierig. Es ist vernünftig, die Lösung mit dem grössten Realteil zu wählen. Das ist in der Praxis selten ein Problem.

Bewertungskriterien

Das Wesen einer Investition: Auswahl aus einer Anzahl alternativer Zahlungsreihen.
Um dies auf intelligente Art und Weise zu tun, müssen Zahlungsreihen nach logischen Standardkriterien bewertet werden. In der Praxis am wichtigsten sind

- Barwert
- interner Zinssatz.

Barwert

Investitionen werden entsprechend dem Barwert der zugeordneten Zahlungsreihen angeordnet.
Wichtig: Sämtliche (positive und negative) Zahlungen müssen berücksichtigt werden. Zur Unterstreichung dieser Tatsache sprechen wir von **Nettobarwert = (Barwert der Einnahmen) – (Barwert der Kosten).**
Eine Investition wird interessant, wenn ihr Barwert positiv ist.

Beispiel: Wann sollen die Bäume gefällt werden? Ein Waldbesitzer Pflanzt Bäume für Bauholz.
Die Frage ist, ob sie nach einem Jahr oder zwei Jahren gefällt werden sollen.

Man erhält folgende Zahlungsreihen:
(a) (-1,2)
(b) (-1,0,3)

Mit Zinssatz von 10% ergibt sich
(a) NBW = $-1/1.1^0 + 2/1.1^1 = 0.82$
(b) NBW = $-1/1.1^0 + 3/1.1^2 = 1.48$

Nach NBW-Kriterium wird der Baum besser nach 2 Jahren gefällt.

- Das NBW-Kriterium ist das am meisten benutzte Maß.
- Vorteil: **Additivität**, weil linear: Die Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen ist gleich dem Barwert der gesamten Zahlungsreihe. Vergleich verschiedener Zahlungsreihen möglich, auch wenn die Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten.
- Lässt sich sowohl auf individuelle Investitionen als auch auf ganze Portfolios anwenden.

Interner Zinssatz – IZS

Je höher der IZS, desto interessanter ist die Zahlungsreihe. **Damit eine Investition interessant ist, muss der IZS grösser als der gerade gültige Marktzins sein**: Die Investition liefert dann eine höhere Rendite, als am Markt zu erzielen ist.

Gleiches Beispiel wie oben:
(a) $-1 + 2c^1 = 0$
(b) $-1 + 3c^2 = 0$.

Mit c = 1/(1 + r) ergibt sich
(a) c = 1/2, also r = 1.0.
(b) $c = \sqrt{3}/3$, also $r = \sqrt{3} - 1 \cong 0.7$.

Mit anderen Worten: Fällen der Bäume nach einem Jahr liefert eine interne Rendite von 100%/Jahr. Fällen nach zwei Jahren liefert eine Rendite von 70%/Jahr. Nach dem IZS-Kriterium ist (a) die beste Lösung.

Diskussion

Beide Kriterien haben Vorteile und Nachteile.

Für NBW:

- Einfach zu berechnen.
- Keine Zweideutigkeiten bei der Lösung.
- Kann (wegen Linearität) in Teile zerlegt und zu Portfolios aggregiert werden.
- sagt nichts über die Rendite aus

Für IZS:

- Hängt nur von den Eigenschaften der Zahlungsreihe (und nicht vom Marktzins) ab.

Übersicht:

- Beide Kriterien haben ihren Anwendungsbereich.
- Der wichtigste Unterschied wird klar, wenn man über einen einzigen Zyklus des Baum-Anbauens hinausschaut. Betrachte die Situation, in welcher der Gewinn reinvestiert wird und vergleiche 2 Zyklen von (a) mit 1 Zyklus von (b). Dann liefert NBW dasselbe Ergebnis wie IZS, also IZS auch ok.

Andererseits:

- Bei einer einmaligen Gelegenheit ist der NBW angebracht. Die Investition wird mit dem Gewinn verglichen, der sich auf „normalem Weg" (d.h., am Kapitalmarkt) erzielen lässt.
- Unter Theoretikern herrscht Übereinstimmung, das NBW das beste Kriterium ist (wenn er intelligent angewandt wird). Im Baumbeispiel bedeutet dies: Man muss genügend viele Perioden betrachten, sodass die Zahlungsströme der Fälle a) und b) gleich lang werden.

Komplizierende Faktoren: Wahl des richtigen Zinssatzes. Es gibt verschiedene risikofreie Zinssätze:

- Depositen-Zertifikate
- 3m Staatsanleihen
- Zins für AAA-Industrieanleihen.
- Manchmal ist der Zinssatz von der Rendite eines alternativen Projekts abgeleitet.
- Ableitung des Zinssatzes von unsicheren Zahlungsreihen ist problematisch. Da die Zahlungsreihe als deterministisch angenommen wird, sollten „echte" Zinssätze benutzt werden.
- Zins-Spread (zwischen Haben-/Schuldzinsen)
- Bei Geschäftsentscheiden: „Cost of Capital"

Der NBW sagt nichts über die Rendite aus:

- Eine Investitionen mit NBW = Fr 100 kann Kapital von Fr 100 oder von Fr 1'000'000 erfordern.

Folgen

Grundlage vieler Zins-, Renten- und Investitionsrechnungen sind Folgen und Reihen. Zahlenfolge: Folge von Zahlen mit „mathematischer Gesetzmässigkeit", genauer: Eine Funktion, durch die den natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, heisst Zahlenfolge oder kurz Folge. Man schreibt $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Die a_n heissen Glieder der Folge.

Arithmetische Folgen

Eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist nennt man arithmetische Folge $a_{n+1} - a_n = d$ (rekursive Darstellung). $a_n = a_1 + (n-1)d$ (explizite Darstellung) d = konstante

Beispiel: Bei einer „Abwärtsauktion" wird ein Anfangspreis von 100 Euro alle 7 Sekunden um 80 Cent verringert. Nach welcher Zeit ist die Auktion wieder für Sie interessant, wenn Sie höchstens 60 Euro ausgeben möchten?

100 − 0.8n < 60 → n = 50 (Zeitschritten) → 50 mal 7 Sekunden = 350 Sek. = 5 Minuten und 50 Sek.

Geometrische Folgen

Eine Folge, bei der der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q$ (rekursive Darstellung). $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (explizite Darstellung) q = konstante

Beispiel: Bei einer Lebensversicherung steigen Beiträge und Leistung jährlich um 5%. Zu Beginn ist ein Beitrag von 50 Euro zu zahlen. Wie hoch ist der Beitrag nach 20 Jahren? $a_{20} = 50 \cdot 1.05^{20-1} = 126.35$

Reihen

Eine Reihe entsteht aus einer Folge durch Aufsummieren der Glieder. Es gibt un-/endliche Reihen.

Arithmetische Reihe $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $s_n \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrische Reihe $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

Bewertung von Standard-Cashflow-Mustern

Der Markt für künftiges Bargeld

Festverzinsliche Wertpapiere

- Ursprünglich: Das Wertpapier liefert seinem Besitzer einen festen, wohldefinierten Zahlungsstrom.
- Die einzige verbleibende Unsicherheit: Der Emittent kann seinen Verpflichtungen nicht nachkommen (z.B. wegen Konkurs) → Dies führt zum Abbruch oder zur Verzögerung des Zahlungsstroms.

Beispiele:

- **Sparkonten**: Über längere Sicht ist ein solches Konto strenggenommen nicht festverzinslich (Zinssatzänderung während der Laufzeit sind möglich).
- **Festgeldkonten**: Der Zinssatz ist garantiert und das Geld muss eine gewisse Zeit dort liegen.
- **Eurodollar-Konten**: Es handelt sich um Dollarkonten bei einer Bank ausserhalb der Vereinigten Staaten (muss nicht zwingend in Euro sein, kann auch eine andere Währung sein).
- **Staatsanleihen**: Regierungen verschaffen sich Darlehen. In der Regel sehr hohe Bonität/Rating
- **Nullcouponanleihen**: Das sind Anleihen ohne Zinszahlungen. Es gibt nur eine einzige Zahlung in Höhe des Nennwerts am Ende der Laufzeit. Der Kaufpreis einer Nullcouponanleihe ist der entsprechend abgezinste Nennwert.
- **Kommunalobligationen**: Von lokalen öffentlichen Stellen ausgegeben
- **Unternehmensanleihen:** Von Unternehmen zum Zweck der Kapitalbeschaffung ausgegeben. Einige werden an Börsen gehandelt, die meisten aber „over the counter" (OTC).
- **Anleihe mit Schuldnerkündigungsrecht**: Der Schuldner hat das Recht, die Anleihe zu einem festgesetzten Preis zurückzukaufen. Der Rückkaufpreis fällt im Allgemeinen im Laufe der Zeit. Häufig gibt es einen Schutz vor Rückkauf zu Beginn der Laufzeit.
- **Tilgungsfonds**: Nennwert wird nicht auf einmal am Ende, sondern verteilt über die Zeit zurückgezahlt. D.h., der Zeichner kann jedes Jahr einen gewissen Bruchteil der ausstehenden Anleihe zu einem festgesetzten Preis zurückkaufen.
- **Nachrangige Anleihen:** Der Halter der Anleihe kann auch die Garantie bekommen, dass im Fall des Konkurses Zahlungen an ihn Priorität vor der Zahlung anderer Schulden hat. Die anderen Schulden heissen nachgeordnet.

- **Hypotheken:** Bzgl. des Zahlungsstroms ist die Hypothek ohne Tilgung das Gegenstück zur Anleihe. Eine Standardhypothek mit Tilgung ist so strukturiert, dass während der Laufzeit im Gegensatz zur Anleihe, gleichbleibende monatliche Zahlungen geleistet werden (**Annuität**). Am Ende der Laufzeit ist die Hypothek dann vollständig amortisiert. Vom Standpunkt des Halters der Hypothek ist der Zahlungsstrom nicht vollständig festgelegt, da er durch eine einmalige Zahlung des ausstehenden Darlehens beendet werden kann.
- Hypotheken können jedoch zu grossen Paketen gebündelt und unter Finanzdienstleistern gehandelt werden. Diese **verbriefte Hypothekenforderungen** (MBS) waren in den USA ziemlich liquide.

- **Annuitäten:** sind Verträge, die dem Halter über einen gewissen Zeitraum eine regelmässige Zahlung zukommen lassen (Rente/Pension). Vom Standpunkt des Investors aus spielen sie dieselbe Rolle wie andere festverzinsliche Wertpapiere.

Bewertung von Annuitäten

Ewige Renten (Perpetuitäten): Der Zahlungsstrom hat die Form $(x_1, x_2, x_3, ...) = (A, A, A, ...)$. Dies ist die einfachste Form eines Zahlungsstroms. Bei einem Zinssatz von r und jährlicher Zahlung berechnet sich der (Bar-)Wert der ewigen Rente als Grenzwert einer unendlichen geometrischen Reihe:

$\boldsymbol{BW = P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^k} = \frac{A}{R}}$ Der Barwert liefert gleichzeitig den fairen Preis (BW = P).

Beispiel: Eine ewigen Rente von Fr 1000/Jahr hat beim Zinssatz von 10% einen Barwert von Fr 10'000.

Zahlungsströme endlicher Länge (Annuitäten): endliche Zahlungsströme

- Die Länge der Annuität sei n Jahre (= Zahlungen)
- Die jährliche Zahlung beginnt ein Jahr nach dem Analysezeitpunkt.
- Der Barwert P
- Die Höhe der periodischen Zahlung A
- Der Zinssatz r.

Die Formel zur Preisbestimmung ist also eine endliche geometrische Reihe der Form: $\boldsymbol{P = \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{(1+r)^k}}$

Die Summe lässt sich berechnen, indem man die Differenz von zwei ewigen Renten mit Start nach 1 Jahr und nach n + 1 Jahren bildet $\boldsymbol{P = \frac{A}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]}$ $\boldsymbol{A = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} P}$

Im Fall $r = 0$ ist die Formel: $P = n \cdot A$ oder $A = P/n$

Bewertung von Anleihen

Die Höhe der Couponzahlung wird in Prozenten des Nennwertes ausgedrückt. Für eine Anleihe mit Nennwert Fr 1000 entspricht ein 9% Coupon einer Zahlung von Fr 90 (bei einem Coupon/Jahr) oder Fr 45 (bei halbjährlichen Couponzahlungen). Je mehr Zeit vergeht, desto stärker weichen die gehandelten Preise von den Nennwerten ab.

Anleihen: Wichtige Grössen

- Couponrate: annualisierte Rate der zu zahlenden Zinsen
- Yield to Maturity: Durchschnittliche Umlaufrendite
- Fälligkeit (Maturity)
- Preis in Prozent des Nennwert

Barwert einer Anleihe

Der Zahlungsstrom einer Anleihe mit **Nennwert N**, jährlicher **Couponzahlung C**, dem **Zinssatz λ** und **Laufzeit** von **n Jahren** ist: $(\underbrace{C, C, \dots, C}_{n-1 \text{ mal}}, N + C)$

Abzinsen mit den entsprechenden Abzinsfaktoren liefert den Barwert: $BW = \frac{N}{[1+\lambda]^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+\lambda)^k}$

$BW = \frac{N}{[1+\lambda]^n} + \frac{C}{\lambda} \cdot \left\{1 - \frac{1}{[1+\lambda]^n}\right\}$ Zu **Beginn** einer **Periode** ist der **Barwert** gleich dem **Preis** der **Anleihe**

Beispiel: Anleihe mit Nennwert CHF 10'000, 5% Couponrate, jährlicher Couponzahlung und Start am 01.01.2020. Gesucht ist der Barwert dieses Bonds am 1.1.2020. Der Zahlungsstrom (in CHF) besteht ausfolgenden 5 Zahlungen: (500, 500, 500, 500, 10500). Die Zahlungen erfolgen jeweils am 1. Januar, die erste am 1.1.2021. Die Formel für den Barwert lautet also:

$$BW = \frac{10000}{[1+0.05]^5} + \sum_{k=1}^{5} \frac{500}{(1+0.05)^k} = \frac{10000}{1.05^5} + \frac{500}{0.05}\left\{1 - \frac{1}{1.05^5}\right\} = 10000$$

„Clean“ and '"Dirty“ Preis

- Die Gleichheit zwischen Barwert einer Anleihe und ihrem notierten Preis gilt nur zu Beginn einer Periode. Grund: Beim **Abzinsen inmitten** einer **Periode verkürzen** sich die **Zeiten**, über die abgezinst wird, um die Länge der angefangenen Periode. Folglich **steigt** der **Barwert**.
- Der **Anstieg** des **Barwerts** ist praktisch **gleich** den **aufgelaufenen Zinsen**, siehe Plot zum Cashflow. Die zeitliche Entwicklung des Barwert bei konstanten Marktzinsen hat also die Form einer **Sägezahnkurve**. Diese **Sägezahnform** macht es sehr **schwierig**, **Anleihen** mit **verschiedenen Zahlungszeitpunkten** miteinander zu **vergleichen**. Dieser Barwert wird deshalb „**Dirty Preis**“ genannt.
- Die Sägezahnform lässt sich wegtransformieren, indem man die **aufgelaufenen Zinsen** vom **Barwert abzieht**. Dann erhält man den notierten Preis, der auch „**Clean Preis**“ genannt wird:
  Clean Preis = Dirty Preis − aufgelaufene Zinsen.
  Die aufgelaufenen Zinsen berechnen sich: $AZ = \frac{\text{Anzahl der Tage seit letztem Coupon}}{\text{Anzahl der Tage in aktueller Couponperiode}} \cdot \text{Couponrate}$
- Bei der Berechnung der Tage muss die geltende „Day Count Convention“ angewandt werden.

Beispiel: Wie oben sollen Barwert und notierter Preis der Anleihe berechnet werden, diesmal aber inmitten der Periode am 1.7.2020. Die Abzinsperioden verkürzen sich um genau 6 Monate: Wir müssen die k-te Zahlung um k − 0.5 Jahre abzinsen, also $\boldsymbol{BW = \frac{1}{1+0.025}\left[\frac{10'000}{1.05^4} + \sum_{k=1}^{4} \frac{500}{(1+0.05)^k}\right] = 10'243.90}$

Der „Dirty“ Preis (in Prozent des Nennwerts) beträgt also 102.44.
Mit der 30/360 Day Count Convention betragen die aufgelaufenen Zinsen am 1. Juli genau CHF 250. Es ergibt sich also ein bereinigter Barwert von CHF 10'243.90 − CHF 250 = CHF 9'993.90 und damit ein „Clean“ Preis von 99.94. Der Unterschied zu 100 ist dadurch bedingt, dass aufgelaufene Zinsen linear interpoliert werden, die Abzinsfaktoren aber nichtlinear sind.

Barwert einer Anleihe mit unterjähriger Verzinsung

Bei unterjähriger Verzinsung ist der Zahlungsstrom einer Anleihe $(\underbrace{C/m, C/m, \dots, C/m}_{n-1 \text{ mal}}, N + C/m)$
mit **Nennwert N, jährlicher Couponzahlung C, Laufzeit n Perioden und m Perioden pro Jahr**:

$BW = \frac{N}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{C}{m}}{\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^k}$ Ausführung der Summe liefert: $BW = \frac{N}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n} + \frac{C}{\lambda} \cdot \left\{1 - \frac{1}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n}\right\}$

Mittlere Umlaufrendite - Der interne Zinssatz einer Anleihe - yield to maturity

- Die Umlaufrendite oder der Ertrag einer Anleihe (yield to maturity) ist der durch die Zahlungsstruktur implizierte Zinssatz. Sie entspricht dem Zinssatz, bei dem der Barwert des Zahlungsstroms gerade gleich dem Preis der Anleihe ist. (interner Zins)
- Die Umlaufrendite bezieht sich immer auf den aktuellen (Markt-)Preis der Anleihe. Beispiel: Anleihe zum Preis P mit Nennwert N, die jedes Jahr m Couponzahlungen C/m liefert und nach n Perioden fällig wird.

- Umlaufrendite $P = \frac{N}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{C}{m}}{\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^k}$ $\quad P = \frac{N}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n} + \frac{C}{\lambda} \cdot \left\{1 - \frac{1}{\left[1+\frac{\lambda}{m}\right]^n}\right\}$
- Der Wert der Umlaufrendite ist also der Zinssatz, der einer unterjährigen Verzinsung von m mal pro Jahr entspricht.
- Der k-te Term in der Summe ist der Barwert der k-ten Couponzahlung. Die Summe der Barwerte, bezogen auf die Umlaufrendite λ, ist gerade gleich dem Anleihepreis.

Bewertung von Amortisierendes Darlehen

Wir betrachten ein Darlehen mit konstanter periodischer Amortisierung. Zur Vereinfachung nehmen wir jährliche Zahlungen an. Im Folgenden seien:

- M Laufzeit - Wir nehmen an, dass am Ende der Laufzeit das Darlehen vollständig getilgt ist.
- N Nennwert des Darlehens
- D = N/M Jährliche Tilgung
- r Zinssatz.

Der Zahlungsstrom der Tilgungen ist nach Definition: $\frac{N}{M}\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{M \text{ mal}}$

Der verbleibende Nennwert nimmt linear ab und erreicht bei Fälligkeit 0: $\frac{N}{M}(M-1, M-2, \ldots, 1, 0)$

Der k Perioden muss also auf den zu Beginn der k-ten Periode verbleibenden Nennwert N(1 − (k − 1)/M) Zins gezahlt werden: $(Zinszahlung\ nach\ k\ Perioden) = rN\frac{1-(k-1)}{M}$

Es ergibt sich also ein linear mit der Zeit abnehmender Zahlungsstrom: $\frac{rN}{M}(M, M-1, M-2, \ldots, 1, 0)$

Die Zinsbeträge nehmen ebenfalls ab. Der **gesamte Zahlungsstrom** ergibt sich als **Summe** der **Amortisierungen** und **der Zinszahlungen**: $\frac{N}{M}(1+rM, 1+r(M-1), 1+r(M-2), \ldots, 1+r)$

Zahlungsstrom abzinsen: $PV = N\left(\frac{\frac{1}{M}+r\left(1-\frac{1}{M}\right)}{1+r} + \frac{\frac{1}{M}+r\left(1-\frac{2}{M}\right)}{(1+r)^2} + \cdots \frac{\frac{1}{M}+\frac{r}{M}}{(1+r)^M}\right) = PV_{amor.} + PV_{interest}$

$$PV_{amor.} = \frac{N}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{(1+r)^k} = \frac{N}{rM}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right)$$

$$PV_{interest} = rN\sum_{k=1}^{M}\frac{1-\frac{k-1}{M}}{(1+r)^k} = \left(1-\frac{1}{M}\right)\left[1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right] + \frac{r}{(1+r)^M}$$

Der Gesamtbarwert $PV_{loan} = N\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdot\left[\frac{1}{rM} + \left(1-\frac{1}{M}\right)\right] + \frac{rN}{(1+r)^M}$

Dieser Ausdruck ist recht kompliziert und lässt sich intuitiv nicht mehr wirklich nachvollziehen. Im allgemeinen Fall für beliebige Cashflowströme lässt sich die Summe zur Berechnung der Barwerte in der Regel nicht mehr analytisch vereinfachen. Um für die Modellierung im weiteren Verlauf des Moduls trotzdem Bewertungen durchführen zu können, haben wir entsprechende Funktionen im Paket FEMS implementiert.

Jahresabschluss

Auswirkungen verschiedener Aktivitäten auf den entsprechenden Jahresabschluss und Strom:

Aktivität	Monetärer Strom	Virtueller Strom	Geldfluss-rechnung	Erfolgs-rechnung	Bilanz
Eine finanzielle Investition tätigen	-	+	-	0	0
Amortisation eines Schuldners	+	-	+	0	0
Aufnahme eines Darlehens	+	-	+	0	0
Amortisation eines Darlehens	-	+	-	0	0
Zinszahlungen (an uns/weg von uns)	+/-	0	+/-	+/-	+/-
Reale Investition	-	+	-	0	0
Abschreibung	0	-	0	-	-
Operative Einnahmen/Ausgaben	+/-	0	+/-	+/-	+/-
Bildung/Auflösung von Rückstellungen	0	-/+	0	-/+	-/+

Bilanz, Erfolgsrechnung und Geldflussrechnung

Balance Sheet = Bilanz	
Assets = Aktiven/Aktiva	**Liabilities (Debt) = Passiven/Passiva**
Current Assets = Umlaufvermögen	current liabilities = kurzfristige Verbindlichkeiten
Cash and equivalents = Liquide Mittel und Äquivalente	accounts payable = Kreditoren / VLL
Accounts receivable = Debitoren / FLL	long term liabilities = Langfristige Verbindlichkeiten
Inventory = Inventar (Material/Waren)	deferred taxes = latente Steuern
Fixed Assets = Anlagevermögen	long term debt = Langfristige Verschuldung
Property, plant and equipment = Sachanlagen	Stockholders Equity = Eigenkapital
less accumulated depreciation = abzüglich Abschreibungen	preferred stock = Vorzugsaktien
Intangible assets and others = Immaterielle Vermögenswerte und Sonstiges	common stock = Stammaktien (gewöhnliche)
	Capital surplus = Kapitalrücklagen
	accumulated retained earnings = Gewinnvortrag
	less treasury stock = abzüglich eigener Aktien
Total Assets =	**Total Liabilities and stockholder's equity**

Revenue − Expenses ≡ Income Einnahmen - Ausgaben ≡ Einnahmen

Profit & Loss P&L Statement = Gewinn- und Verlustrechnung - Erfolgsrechnung
total operating revenues = Betriebliche Einnahmen
./. Cost of good sold = Handelswarenaufwand / Aufwand der verkauften Waren
./. Selling, general and administrative expenses = Vertriebs-, Verwaltungs- und Gemeinkosten/-aufwand
./. Depreciation = Abschreibung
= Operation Income = Operationelles / betriebliches Ertrag/Einkommen
+ Other Income = Anderer / Weiterer Ertrag/Einkommen
= Earnings before interest and taxes (EBIT) = Ertrag/Ergebnis vor Zinsen und Steuern
./. interest expense = Zinsaufwand
= pretax income = Vorsteuergewinn
./. (current / deferred) Taxes = (aktuell / latent (zurückgestellt)) Steuern
= Net Income = Reingewinn
Addition to retained earnings = Zuführung zu den Gewinnrücklagen
Cash flow statement (CFS) = Geldflussrechnung
Operations = Operative Tätigkeit
Net Income = Reingewinn
+ Depreciation = Abschreibung
+ deferred Taxes = latente (zurückgestellt) Steuern
Changes in assets and liabilities = Veränderung der Aktiva und Passiva
+ / ./. Accounts receivable = Debitoren / FLL
+ / ./. Inventory = Inventar (Material/Waren)
+ / ./. accounts payable = Kreditoren / VLL
= Total Cashflow from operations =
Investing activities =

Risikofaktoren

Beispiele für Risikofaktoren:

- Preise der Produkte als:
  - Wertpapiere
  - Bestände
  - Rohstoffe
  - Konsumgüter
- Devisen/Fremdwährungen
- Zinssätze (Zeitwert des Geldes)
- Verbraucherpreisindizes
- Aktienkursindizes

Risikofaktoren sind nicht statisch, sondern verändern sich im Laufe der Zeit.
Die Geschwindigkeit der Veränderung ist bei den verschiedenen Risikofaktoren unterschiedlich.
Risikofaktoren sind in der Regel mit unterschiedlicher Häufigkeit verfügbar, wie z. B.:

- Jährlich
- Vierteljährlich
- Monatlich
- Wöchentlich
- Täglich
- Intradaily
- Hohe Frequenz (bis zu Millisekunden und weniger)

Historische Risikofaktordaten werden in der Regel von Datenanbietern bezogen. Bekannte Datenanbieter sind:

- Bloomberg
  - Breite Abdeckung
  - "Goldstandard" der Finanzdaten
  - Teuer

- Refinitiv (früher Thomson-Reuters):
  - breite Abdeckung
  - Teuer, aber erschwingliche Preise für den Unterricht.

Bloomberg und Refinitiv sind Wettbewerber und die von Finanzfachleuten bevorzugten Dienstleistungen.

Risikofaktoren als Zeitreihen

- Die zukünftigen Werte der Risikofaktoren sind nicht (sicher) bekannt.
- Daher müssen die Risikofaktoren mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie modelliert werden.
- Sie können mit Hilfe von statistischen Methoden analysiert werden.
- Insbesondere müssen Risikofaktormodelle der Tatsache Rechnung tragen, dass sich die Werte im Laufe der Zeit ändern. Solche Modelle werden als
  - "**Zeitreihenmodelle**", wenn die Menge der zulässigen **Zeitpunkte diskret** ist;
  - "**Stochastische Prozesse**", wenn die Menge der zulässigen **Zeitpunkte kontinuierlich** ist.
- Im Folgenden stellen wir ein spezielles Zeitreihenmodell vor, das sich für die Modellierung von Finanzpreisreihen eignet.

Modellierung von Zeitreihen

- Eine entscheidende Eigenschaft: **Stationarität**.
- Vereinfacht ausgedrückt, bedeutet Stationarität, dass die **statistischen Eigenschaften** der **zeitabhängigen Variablen nicht** von der **Zeit abhängen**.
- Insbesondere sind der Mittelwert μ und die Varianz σ für die gesamte Zeitreihe gleich.
- Diese Eigenschaft ist wichtig, denn nur dann können μ und σ aus den beobachteten historischen Daten dieser Reihe geschätzt werden.
- Leider sind viele Zeitreihen nicht stationär. Insbesondere sind sie **nicht stationär**, **wenn** sie einen **Trend** oder **saisonale Besonderheiten** aufweisen.
- In der Regel sind die **Finanzpreisreihen nicht stationär**. Sie haben oft einen Trend oder saisonale Schwankungen oder beides. Beispiel:
  - Saisonabhängigkeit: Frisches Obst und Gemüse ist im Sommer billiger als im Winter.
  - Tendenz: Die Aktien- und Immobilienpreise steigen oder fallen über längere Zeiträume.
- Die Herausforderung besteht in der Trennung der systematischen Eigenschaften wie Trends und Saisonabhängigkeiten von den rein stochastischen Eigenschaften. Dabei sollte die transformierte Zeitreihe sollte stationär sein.
- Bei finanziellen Zeitreihen wird dies häufig durch die Berechnung der Renditen erreicht.
- Die Eigenschaften einer Zeitreihe hängen von der Häufigkeit der Beobachtungen ab.

Risikomassnahmen: Value-at-Risk

- Für eine Maßnahme, die sich auf die am wenigsten leistungsfähigen Fälle einer Verteilung konzentriert, ist das Konzept der Quantile sehr nützlich.
- Niedrige Quantile mit q < 0,5 dienen dem oben genannten Zweck. Anstelle von q definieren wir einen **Prozentsatz α** und betrachten die **1α Quantil**.
- **α = 95%** gibt also das **5%-Quantil** an, Das ist der Preis, der in 95 % der Fälle überschritten wird. Oder anders ausgedrückt: Nur in 5 % der Fälle wird der Preis kleiner oder gleich diesem Wert sein.
- In der Risikomessung wird diese Größe als Value-at-Risk auf dem Konfidenzniveau α (Notation VaR_α) bezeichnet. Sie ist ein weit verbreitetes Risikomass.
- Ein **Manko** des Value-at-Risk ist, dass wir bei einem Preis, der niedriger ist als der VaR, keine Ahnung haben, wie niedrig er wahrscheinlich sein wird.
- Glücklicherweise können auch andere Risikomessungen durchgeführt werden.
- Eine weit verbreitete Möglichkeit ist der so genannte **Expected Shortfall (ES)**, der diesen Punkt berücksichtigt.
- Er ist wie folgt definiert: Bei einer Größe x ist der Expected Shortfall auf dem Konfidenzniveau α die bedingte Erwartung von x unter der Voraussetzung, dass x kleiner ist als der VaR_α (x).
- Der erwartete Fehlbetrag sagt uns also, was wir erwarten müssen, wenn x niedriger ist als der Value-at-Risk.

Detailliertere Zinssatztheorie

Anleihen: Detaillierter

- Es kann vorkommen, dass ein **Emittent** seinen **Verpflichtungen nicht nachkommen** kann. Das damit verbundene **Risiko** wird als **Ausfallrisiko** bezeichnet.
- Dieses Risiko spiegelt sich in den so genannten **Kreditratings** wider: Je besser das Rating, desto geringer ist das **Ausfallrisiko**.

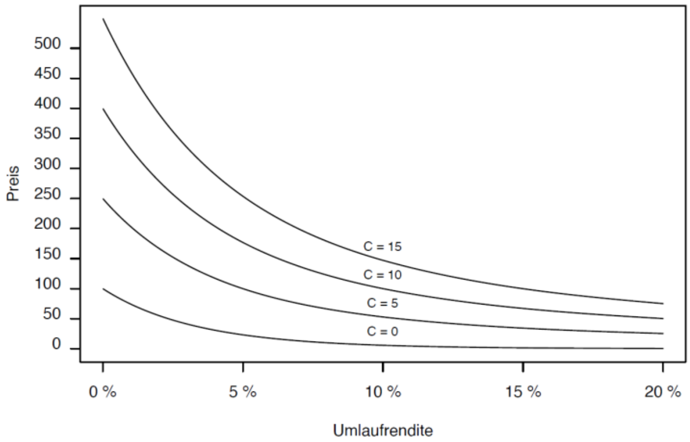
	Moody's	Standard & Poor's
Investment grade, high security	Aaa Aa	AAA AA
Investment grade: middle security Sicherheit	A Baa	A BBB
Speculative grade	Ba B	BB B
Danger of default	Caa Ca C	CCC CC C D

- Die Einstufung wird in der Regel durch eine Kombination von 1-3 Buchstaben angegeben, wobei AAA steht für das beste Rating (vernachlässigbarer Ausfall) und C für das schlechteste Rating (unmittelbare Gefahr von Ausfall) steht.
- Anleihen mit **hoher** oder **mittlerer Sicherheit** werden als **Investment Grade** bezeichnet.
- Anleihen mit **spekulativem Rating** werden oft als "**Schrottanleihen**" (**Junk Bonds**) bezeichnet.
- Aufgrund des **höheren Ausfallrisikos** ist eine **Anleihe** mit einem **niedrigeren Rating günstiger** als eine **vergleichbare Anleihe** mit einem **hohen Rating**.

Details Rendite (Yield)

- Ein qualitatives Verständnis des Verhältnisses zwischen **Preis**, **Rendite**, **Kupon** und **Laufzeit** lässt sich recht leicht gewinnen.
- Für uns gilt die folgende allgemeine Regel: Die Rendite verschiedener Anleihen ist sehr ähnlich und ähnelt auch sehr stark dem Zinssatz anderer festverzinslicher Wertpapiere. (Niemand wird eine 6 %ige Anleihe kaufen, wenn er auf einem Festgeldkonto 10 % bekommen kann.)
- Das bedeutet, dass sich die Renditen der verschiedenen Anleihen mehr oder weniger synchron verändern.
- Die Rendite einer Anleihe kann nur durch eine Änderung des Kurses verändert werden. Eine Änderung der Rendite einer Anleihe ist immer mit einer entsprechenden Kursänderung verbunden.
- Die Preisänderung, die durch eine bestimmte Renditeänderung hervorgerufen wird, kann jedoch von einer Anleihe zur anderen erheblich abweichen.
- Der Grund dafür ist, dass Kursänderungen, die einer bestimmten Renditeänderung entsprechen, von der Struktur der Anleihe abhängen (insbesondere Laufzeit und Kuponsatz).
- Um die Preisdynamik von Anleihen zu verstehen, ist es wichtig, das Verhältnis zwischen Preis und Rendite zu kennen.

Die Natur der Preis-Rendite-Kurve



- Die Grafik zeigt den Preis P in Prozent des Kapitals vs. der Umlaufrendite λ (Rendite bis zur Fälligkeit) für eine 30-jährige Anleihe mit unterschiedlichen Kuponsätzen C.
- Beispiel für die Kurve mit C = 10: Der Eigentümer erhält über einen Zeitraum von 30 Jahren jedes Jahr 10 Euro ausgezahlt.
- Die Kurven zeigen, wie Preis und Rendite zusammenhängen:
  - **Der Preis sinkt, wenn die Rendite steigt.**
  - Wenn ein fester Cashflow-Strom einem **höheren internen Zinsfuß** entsprechen soll, muss der **Wert** dieses **Cashflow-Stroms sinken**. (Je höher die Rendite, desto höher der Diskontierungsfaktor).
- Grundlege Eigenschaft der Anleihemärkte: Sinkende Anleihenkurse → steigende Zinssätze
- **Rendite = Kuponsatz**: Der Verlust durch die Diskontierung wird durch die Kuponzahlungen genau kompensiert. Der Preis der Anleihe entspricht also ihrem Kapital.
- Wenn die Rendite immer weiter steigt, tendiert der Anleihekurs gegen Null.

Einfluss der Zeit bis zur Fälligkeit:

- Anleihen mit kurzer Restlaufzeit werden durch flache Kurven beschrieben.
- Die Kurven werden mit zunehmender Restlaufzeit immer steiler.
- Daher reagiert der Kurs langfristiger Anleihen stärker auf Renditeänderungen als der Kurs kurzfristiger Anleihen.
- Die Preis-Rendite-Kurve ist wichtig, denn sie beschreibt die Zinsänderungsrisiko einer Anleihe.
- Die Besitzer von Anleihen sind also dem Zinsrisiko ausgesetzt: Der Anleihekurs ändert sich, wenn sich die Rendite ändert.
- Dies ist ein Risiko, das sich unmittelbar auf den Marktpreis einer Anleihe auswirkt.
- Natürlich ist es möglich, die Anleihe bis zur Fälligkeit zu halten und von den garantierten Zinszahlungen zu profitieren. Der Cashflow wird von den Marktzinsen nicht beeinflusst. (Schließlich handelt es sich um ein festverzinsliches Wertpapier.)
- Wenn Sie jedoch beabsichtigen, die Anleihe zu verkaufen, wird der erzielte Preis durch die Kurs-Rendite-Kurve bestimmt und unterliegt dem Zinsrisiko.

Die folgende Tabelle zeigt den Einfluss des Kurs-Rendite-Verhältnisses für 9% Anleihen.

- Die Tabelle zeigt überzeugend, dass eine 30-jährige Anleihe viel empfindlicher auf Renditeschwankungen reagiert als eine 1-jährige Anleihe.
- Das Preis-Rendite-Verhältnis ermöglicht es, dieses Risiko zu quantifizieren. Darin liegt seine wesentliche Bedeutung.

	Umlaufrendite				
Restlaufzeit	5%	8%	9%	10%	15%
1 Jahr	103.85	100.94	100.00	99.07	94.61
5 Jahre	117.50	104.06	100.00	96.14	79.41
10 Jahre	131.18	106.80	100.00	93.77	69.42
20 Jahre	150.21	109.90	100.00	91.42	62.22
30 Jahre	161.82	111.31	100.00	90.54	60.52

Dauer (Duration)

- Die Restlaufzeit allein ist kein vollständiges Maß für die Zinssensitivität.
- Das Maß, nach dem wir suchen, heißt Duration und hat die Einheit einer Zeitspanne.
- Die **Duration** eines festverzinslichen Wertpapiers ist das **gewogene Mittel** der **Zeitpunkte**, zu denen die **Zahlungen erfolgen**. Die **Gewichte** sind die **Barwerte** der **einzelnen Zahlungen**.
- Angenommen, die Zahlungen erfolgen zu den Zeitpunkten t_1, t_2, ..., t_n. Die Duration des Cashflow-Stroms D ergibt sich dann wie folgt $D = \frac{\sum_{i=0}^{n} PV(t_i)t_i}{PV}$ wobei $PV(t_i)$ der Barwert der Zahlung zum Zeitpunkt t_i ist und $PV = \sum_{i=0}^{n} PV(t_i)$
- D hat die Einheit der Zeit.
- Wenn alle Zahlungen nicht negativ sind (wie bei dem Cashflow-Strom einer Anleihe, die man bereits besitzt), dann ist $t_0 \leq D \leq t_n$.
- Die **Duration** einer **Nullkuponanleihe**, bei der nur eine einzige Zahlung bei Fälligkeit erfolgt, entspricht der **Zeit** bis **zur Fälligkeit**.
- Die **Duration** einer **kupontragenden Anleihe** ist **grundsätzlich kürzer** als ihre **Restlaufzeit**.
- Die allgemeine Definition der Duration lässt (absichtlich) offen, welcher Zinssatz bei der Berechnung des Barwerts verwendet wird.
- Bei Anleihen ist die Rendite (Yield to maturity) bis zur Fälligkeit eine natürliche Wahl.
- Die entsprechende Dauer wird als Macaulay-Dauer bezeichnet. Angenommen, ein Wertpapier
  - bietet m Zahlungen pro Jahr
  - mit einem Betrag c_k für die Zahlung nach der Periode k, und
  - es bleiben n Perioden bis zur Fälligkeit.
- Dann ist die Macaulay-Dauer D definiert als:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{m}\right) \cdot \frac{c_k}{\left[1 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)\right]^k}}{PV}$$

- Hier, λ ist die Rendite bis zur Fälligkeit (yield to maturity), der Gegenwartswert ist $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\left[1+\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right]^k}$
- wobei der Faktor k/m im Zähler die Bedeutung der in Jahren gemessenen Zeitspanne hat.

Beispiel: Wir betrachten eine Anleihe mit Coupon von 7 %, 3 Jahren Laufzeit. Annahme Rendite bis zur Fälligkeit (yield to maturity) beträgt 8 % = λ. Für die Berechnung der Abzinsungsfaktoren verwenden wir eine 6 monatige Zinseszins.

Diskontierungsfaktor bei halbjährlicher Diskontierung $m = 2$ ist damit: $\frac{1}{(1+\frac{\lambda}{m})^k} = \frac{1}{(1+\frac{0.08}{2})^k}$

$k = hier\ Anzahl\ \boldsymbol{Halbjahre}$

Siehe auch R-Befehl/Funktion selbsterstellt…

Layout for the calculation of the Macaulay duration

A	B	C	D	E	F
Year	Payment	Discounting factor (8%)	Present value of payment ($B \times C$)	Weight (D/Price)	$A \times E$
0.5	3.5	.962	3.365	.035	.017
1	3.5	.925	3.236	.033	.033
1.5	3.5	.889	3.111	.032	.048
2	3.5	.855	2.992	.031	.061
2.5	3.5	.822	2.877	.030	.074
3	103.5	.790	81.798	.840	2.520
Total			97.379	1.000	2.753
			= Price		= Duration

Bei der modifizierten Dauer (Modified Duration) wird die Macaulay Duration noch mit $\frac{1}{1+\frac{\lambda}{m}}$ **multipliziert respektive durch** $\left(\mathbf{1} + \frac{\lambda}{m}\right)$ **geteilt**

- $\frac{dP}{d\lambda} = -\frac{1}{1+\frac{\lambda}{m}} DP = -D_M P$ $\quad D_M = \frac{D}{1+\frac{\lambda}{m}}$ = modifizierte Duration
- Die Renditesensitivität des Anleihekurses ist somit proportional zur Menge $-D_M$
- Diese Größe wird als **modifizierte Duration** bezeichnet. Es handelt sich um die übliche (Macauley-)Duration, die durch den Term im Nenner modifiziert wird.
- Für große Werte von m oder kleine Werte von λ, $D_M \approx D$

Anleihenskursänderung durch Zinsschwankungen

- Daraus ergibt sich eine explizite Formel zur Schätzung der durch Renditeschwankungen verursachten Anleihekursänderung: $\boldsymbol{\Delta P \approx -D_M \cdot P \cdot \Delta\lambda}$ wobei:
  - $\Delta P = Preisänderung$
  - $P = Preis$
  - $D_M = modifizierte\ Duration$
  - $\Delta\lambda = Zinsänderung\ in\ Dezimalstellen$
- 30-jährigen Anleihe mit Coupon von 10 %. Unter der Annahme einer halbjährlichen Aufzinsung und einer Zinserhöhung von 1 ProzentPUNKT von 10 % auf 11 % resultiert ein Verlust von 9.47% auf einen Marktwert der Obligation von 90.53 %. **Siehe Rechner in R**

Laufzeit eines Portfolios

- Wir betrachten ein **Portfolio** von **Anleihen** mit **unterschiedlicher Restlaufzeit**.
- Das **Portfolio** als **Ganzes** verhält sich wie ein **festverzinsliches Wertpapier** mit festen **regelmäßigen Zahlungen**. Aufgrund der **unterschiedlichen Laufzeiten** sind die **periodischen Zahlungen** jedoch **nicht gleich hoch**.
- Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass alle Anleihen die gleiche Rendite haben. (In der Regel gilt dies zumindest annähernd, da die Renditen der verschiedenen Anleihen vom Markt festgelegt werden und sich kaum voneinander unterscheiden).
- Die **Portfolioduration** ist dann einfach die **gewichtete Summe der Durationen** der **einzelnen Anleihen**. Die **Gewichte** sind **proportional** zu den **Anleihekursen**
- **D** ist die **gemittelte Duration**, wobei die einzelnen Durationen mit den **Anleihekursen gewichtet werden**. Das Ergebnis kann direkt auf ein Portfolio mit einer **beliebigen Anzahl** von **Anleihen** verallgemeinert werden.
- Genau wie bei einzelnen Anleihen misst die Duration eines Portfolios dessen Sensibilität gegenüber Renditeänderungen. (Es gilt die Empfindlichkeitsformel.)
- Selbst wenn die einzelnen Renditen (voneinander) abweichen, kann diese Formel zur Annäherung an die Portfolioduration verwendet werden.
- Die Barwerte der verschiedenen Anleihen werden im Hinblick auf eine einzige (z. B. die durchschnittliche) Rendite bis zur Fälligkeit bewertet.
- Natürlich sind diese Barwerte nicht mehr genau mit den Preisen der einzelnen Anleihen identisch.
- Der so berechnete gewichtete Durchschnitt der einzelnen Laufzeiten liefert jedoch in guter Näherung die Sensitivität des Barwerts des Portfolios in Bezug auf Änderungen der Rendite (oder des Marktzinssatzes).

Immunisierung

- Jetzt haben wir die Konzepte und Werkzeuge, die wir zur Lösung eines wichtigen praktischen Problems benötigen: Ist es möglich, ein Portfolio so zu strukturieren, dass es immun ist gegen Zinsänderungen?
- Das Verfahren wird als Immunisierung bezeichnet: Sie **immunisiert** den **Portfoliowert** gegen **Zinsänderungen**. Diese Methode ist (mit einigen Verbesserungen) eine der am häufigsten verwendeten Analysetechniken im Bereich der Investitions- und Finanzierungstheorie.
- Jemand hat eine Reihe von Zahlungsverpflichtungen und er möchte ein Portfolio zusammenstellen, mit dem er die fälligen Zahlungen leisten kann. (Anlageproblem einer Versicherungsgesellschaft.)
- Stattdessen können wir ein Portfolio so strukturieren, dass sein Barwert dem Gesamtbarwert aller künftigen Zahlungsverpflichtungen entspricht:
  - Wenn Bargeld benötigt wird, wird ein Teil des Portfolios verkauft.
  - Wenn Überschüsse vorhanden sind, werden zusätzliche Anleihen gekauft.

  Bleibt die Rendite konstant, entspricht der Portfoliowert immer dem Gesamtbarwert der verbleibenden Verbindlichkeiten. ⇒ Wir sind in der Lage, unseren Verpflichtungen genau nachzukommen.

Renditeänderungen

- Was passiert, wenn sich der Ertrag ändert?
- Sowohl der Portfoliowert als auch der Gesamtbarwert der Zahlungsverpflichtungen ändern sich entsprechend.
- Aber beide Teile ändern sich um einen unterschiedlichen Betrag. ⇒ Der Portfoliowert entspricht nicht mehr dem Gesamtbarwert der Zahlungsverpflichtung.

- Mit Hilfe der Techniken der Immunisierung kann dieses Problem annähernd gelöst werden.
- Dies **erfordert**, dass **neben** den **aktuellen Werten** auch die **Dauer angepasst** wird.
- Wenn die Laufzeiten von Portfolio und Zahlungsverpflichtungen übereinstimmen, stimmen auch die durch Renditeänderungen verursachten Wertänderungen überein (bis zu einer linearen Ordnung).
  - Steigt die Rendite, sinken Portfoliowert und Gesamtbarwert der Zahlungsverpflichtungen um den gleichen Betrag.
  - Sinkt die Rendite, steigen sowohl der Portfoliowert als auch der Gesamtbarwert der Zahlungsverpflichtungen um den gleichen Betrag.
- Folglich entspricht in beiden Fällen der Portfoliowert immer noch dem Barwert der Zahlungsverpflichtungen.
- Dieses Verfahren funktioniert, weil die Duration die erste (=lineare) Annäherung an die durch Zinsänderungen verursachte Preisänderung ist.
- Wenn Barwerte und Laufzeiten von Portfolio und Verbindlichkeiten übereinstimmen, müssen auch die Wertänderungen in linearer Näherung übereinstimmen.
- Dies wird anhand des folgenden Beispiels veranschaulicht:

Beispiel einer Immunisierung

Ein Unternehmen hat eine Verpflichtung, in **fünf Jahren Fr 2 Millionen** zu zahlen. Es möchte jetzt Geld investieren, das genügt, um die Verpflichtung zu erfüllen. Das Unternehmen plant daher, aus den drei Unternehmensanleihen, die in untenstehender Tabelle aufgelistet sind, ein geeignetes Portfolio zusammenzustellen.

	Anleihe	Laufzeit	Preis	Umlauf-rendite
Anleihe 1	6.5%	10 Jahre	129.86	3.00%
Anleihe 2	3%	5 Jahre	100.00	3.00%
Anleihe 3	8%	20 Jahre	174.39	3.00%

1. Durations der drei Anleihen berechnen / **siehe Rechner im R**

   Daraus schliessen, welche Anleihen in Frage kommen: Hier Kombination zwischen der ersten und der zweiten.

	Duration	modif. Dur.
Liab.	5.00	4.85
Anleihe 1	7.97	7.74
Anleihe 2	4.72	4.58
Anleihe 3	12.85	12.47

2. Barwert der Verpflichtung berechnen → $BW_V = \frac{Verpflichtung}{(1+\lambda)^n} = \frac{-2'000'000}{1.03^5} = -1'725'217.57$
3. Gleichungssystem aufstellen: $\begin{pmatrix} x \cdot P_1 + y \cdot P_2 = BW_V \\ \frac{x \cdot P_1 \cdot D_1 + y \cdot P_2 \cdot D_2}{BW_V} = D_V \end{pmatrix}$ wobei

   P_1 = Barwert (Preis) Anleihe 1, P_2 = Barwert (Preis) Anleihe 2,
   D_1 = Duration (normale/ Macaulay) Anleihe 1, D_2 = Duration (normale/ Macaulay) Anleihe 2,
   D_V = Duration (normale/ Macaulay) Zahlungsverpflichtung,
   BW_V = Barwert Zahlungsverpflichtung,
   x, y = unbekannte gesuchte Grössen → Total zu investierender Betrag in Anleihe 1 und 2

   Gleichung 1: Abgleich der aktuellen Werte. Gleichung 2: Übereinstimmende Dauern.

   Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} x \cdot 129.86 + y \cdot 100 = 1'725'217.57 \\ \frac{x \cdot 129.86 \cdot 7.97 + y \cdot 100 \cdot 4.72}{1'725'217.57} = 5 \end{pmatrix}$

   $x = 1'144.57$, $y = 15'765.8$
   $1'144.57 \cdot 129.86 + 15'765.8 \cdot 100 = 1'725'213.86 \approx 1'725'217.57$

Weiteres Beispiel einer Immunisierung

Ein Unternehmen hat eine Verpflichtung, in **zehn Jahren Fr 1 Millionen** zu zahlen. Es möchte jetzt Geld investieren, das genügt, um die Verpflichtung zu erfüllen. Das Unternehmen plant daher, aus den drei Unternehmensanleihen, die in untenstehender Tabelle aufgelistet sind, ein geeignetes Portfolio zusammenzustellen. Halbjährliche Zinszahlung!

	Coupon rate	Time to maturity	Price	Yield to maturity
Bond 1	6%	30 Jahre	69.04	9.00%
Bond 2	11%	10 Jahre	113.01	9.00%
Bond 3	9%	20 Jahre	100.00	9.00%

1. Durations der drei Anleihen berechnen / **siehe Rechner im R**

	Duration	modif. Dur.
Anleihe 1	11.44	10.95
Anleihe 2	6.54	6.25
Anleihe 3	9.61	9.20

   Daraus schliessen, welche Anleihen in Frage kommen: Hier Kombination zwischen der ersten und der zweiten.

2. Barwert der Verpflichtung berechnen → $BW_V = \frac{Verpflichtung}{\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{n*m}} = \frac{-1'000'000}{\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{10*2}} = -414'642.86$

3. Gleichungssystem aufstellen: $\begin{pmatrix} x \cdot P_1 + y \cdot P_2 = BW_V \\ \frac{x \cdot P_1 \cdot D_1 + y \cdot P_2 \cdot D_2}{BW_V} = D_V \end{pmatrix}$ wobei

   P_1 = Barwert (Preis) Anleihe 1, P_2 = Barwert (Preis) Anleihe 2,
   D_1 = Duration (normale/ Macaulay) Anleihe 1, D_2 = Duration (normale/ Macaulay) Anleihe 2,
   D_V = Duration (normale/ Macaulay) Zahlungsverpflichtung,
   BW_V = Barwert Zahlungsverpflichtung,
   x, y = unbekannte gesuchte Grössen → Total zu investierender Betrag in Anleihe 1 und 2

   Gleichung 1: Abgleich der aktuellen Werte. Gleichung 2: Übereinstimmende Dauern.

   Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} x \cdot 69.04 + y \cdot 113.01 = 414'642.86 \\ \frac{x \cdot 69.04 \cdot 11.44 + y \cdot 113.01 \cdot 6.54}{414'642.86} = 10 \end{pmatrix}$

   $x = 4'240.86,\ y = 1'078.26$
   $4'240.86 \cdot 69.04 + 1'078.26 \cdot 113.01 = 292'799 + 121'825 = 414'643.13 \approx 414'642.86$

Laufzeitenstruktur der Renditen

- Die Rendite bis zur Fälligkeit hängt eng mit den allgemeinen (Zins-)Bedingungen der Anleihemärkte zusammen.
- Verschiedene Renditen zeigen die Tendenz, sich (mehr oder weniger) synchron zu verändern.
- Die Renditen verschiedener Anleihen können jedoch erheblich voneinander abweichen.
- Besonders ausgeprägt ist dies bei Nullkupon-Anleihen.
- Die Unterschiede in den Renditen lassen sich teilweise durch unterschiedliche Ratings erklären: Eine sichere AAA-Anleihe ist in der Regel teurer (und hat dementsprechend eine niedrigere Rendite) als eine risikoreiche Anleihe mit B-Rating.
- Ein weiterer Faktor, der die Renditeunterschiede zwischen verschiedenen Anleihen teilweise erklärt, ist die Zeit bis zur Fälligkeit. Ganz allgemein gesprochen: Je länger die Zeit bis zur Fälligkeit, desto höher die Rendite.
- Ein weiterer Faktor, der die Renditeunterschiede zwischen verschiedenen Anleihen teilweise erklärt, ist die Zeit bis zur Fälligkeit. Je länger die Zeit bis zur Fälligkeit, desto höher die Rendite.
- Eine umgekehrte/inverse Zinsstrukturkurve tritt in der Regel auf, wenn die Zinsen für kurzfristige Gelder rasch ansteigen und die Anleger glauben, dass dieser Anstieg nur vorübergehend ist, so dass die langfristigen Zinssätze davon kaum betroffen sein werden.
- Die Rendite in Abhängigkeit von der Restlaufzeit ist bei allen Anleihen derselben Risikoklasse sehr ähnlich.
- Wenn die Rendite einer Anleihe weit von der Renditekurve abweicht, ist dies meist auf besondere Eigenschaften dieser Anleihe oder die (finanzielle) Situation des Emittenten zurückzuführen.

Laufzeitenstruktur der Zinssätze

Kassazinssätze (**spot interest rates**)

- Wir verwenden nicht die Rendite bis zur Fälligkeit (yield to maturity), sondern die "reinen" Zinssätze.
- Ausgangspunkt: Die Feststellung, dass der Zinssatz für geliehenes Geld in der Regel von der Dauer abhängt, für die dieses Geld geliehen oder verliehen wird.
- Die **Kassazinssätze** (**spot interest rates**) sind die fundamentalen Zinssätze, sie definieren die Zinsstruktur.
- Der **Kassazinssatz s_t** ist der Zinssatz (ausgedrückt in einem Jahreszinssatz) für Geld, das von heute bis zum Zeitpunkt t gehalten wird.
- Zinsen und Nominalbetrag (A) werden zum Zeitpunkt t gezahlt.
  - s_1 ist der Zinssatz für 1 Jahr Geld (in 1 Jahr wird der Betrag $(1 + s_1)$*A zurückgezahlt);
  - s_2 ist der Zinssatz für 2 Jahre Geld (in 2 Jahren wird der Betrag $(1 + s_2)^2$*A zurückgezahlt).
- Die Definition von Kassazinssätzen impliziert eine Konvention für die Berechnung der Zinsaufzinsung.
- Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten:
  - Jährlich: $(1+s_t)^t$
  - m Perioden pro Jahr: $(1+\frac{s_t}{m})^{m\cdot t}$
  - Kontinuierlich: $e^{s_t\cdot t}$
- Grundsätzlich können die Kassakurse in Form der Rendite von Nullkuponanleihen beobachtet werden. (Um einen Rating-Effekt zu vermeiden, sollten nur Staatsanleihen von sicheren (AAA-geraiteten) Ländern berücksichtigt werden).
- Die Kurve des Kassazinssatzes kann also aus den Renditen von Nullkuponanleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten konstruiert werden.
- Daher wird sie auch "Null-Bond-Kurve" genannt.

Klein t = Start der Laufzeit gross T = Fälligkeit / Ende der Laufzeit $T-t$ = Laufzeit

$f_{0,1}$ = 1 Jahr Laufzeit $f_{0,2}$ = 2 Jahr Laufzeit $f_{0,3}$ = 3 Jahr Laufzeit

Kassazinssätze mit Zero-Bonds berechnen: $\boldsymbol{f_{t,T}} \sqrt[(T-t)]{\frac{\boldsymbol{NW}}{\boldsymbol{B_{t,T}(NW)}}}-\mathbf{1}$ Rückzahlung erfolgt zu pari – 100

Beispiele:

Marktpreis: 96.61 / 1 Jahr Laufzeit $f_{0,1} \sqrt[(1-0)]{\frac{100}{96.61}}-1 = 3.5\ \%$ Kassazins

Marktpreis: 91.57 / 2 Jahr Laufzeit $f_{0,2} \sqrt[(2-0)]{\frac{100}{91.57}}-1 = 4.5\ \%$ Kassazins

Marktpreis: 86.20 / 3 Jahr Laufzeit $f_{0,3} \sqrt[(3-0)]{\frac{100}{86.20}}-1 = 5\ \%$ Kassazins

Der faire Marktpreis kann wie folgt mit Kassazins und Nennwert berechnet werden $\boldsymbol{B_{t,T}(NW)} = \frac{\boldsymbol{NW}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i_{t,T}})^{\boldsymbol{T-t}}}$

Beispiele:

Nennwert 100 / 1 Jahr Laufzeit und 3.5% Kassazins: $B_{0,1}(100) = \frac{100}{(1+0.035)^{1-0}} = 96.61$

Nennwert 100 / 2 Jahr Laufzeit und 4.5% Kassazins: $B_{0,2}(100) = \frac{100}{(1+0.045)^{2-0}} = 91.57$

Je länger die Laufzeit eines Zero-B., umso tiefer der Marktpreis → höhere Verzinsung für längere Laufzeit

Abzinsungsfaktoren und Gegenwartswert

Abzinsungsfaktoren d_t für Kassakurse s_t für einen beliebigen Zeitpunkt t sind definiert als:

- Jährliche Aufzinsung: $d_k = \frac{1}{(1+s_k)^k}$
- Aufzinsung mit m Perioden pro Jahr: $d_k = \frac{1}{\left(1+\frac{s_k}{m}\right)^{m \cdot k}}$
- Kontinuierliche Aufzinsung: $d_k = e^{-s_k \cdot k}$ (in diesem Fall kann k beliebige reelle Werte ≥ 0 annehmen)
- Abzinsungsfaktoren wandeln zukünftige Zahlungen direkt in (aktuelle) äquivalente Barwerte um.
- Die Formel für den Gegenwartswert eines bestimmten **Cashflow-Stroms (x_0, x_1 , …, x_n)** in Bezug auf die aktuelle Kassakurskurve lautet wie folgt: $PV = x_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n \sum_{k=0}^{n} d_k x_k$ → $d_0 = 1$
- Formal kann der Abzinsungsfaktor d_k als der heutige Preis betrachtet werden für eine Zahlung, die zum Zeitpunkt k verlangt wird. Der Barwert des gesamten Cashflow-Stroms ergibt sich dann als Summe von "Preis × Menge" für alle Zahlungen.

- **Im Gegensatz zu der Diskontierung für das Ausrechnen der Duration, benötigt es für die Abzinsung für die Kassazinssätze pro Jahr/Zinszahlung einen eigenen Abzinsungsfaktor und nicht für die gesamte Laufzeit ein und denselben.**

Stetige Verzinsung

Wir betrachten eine Anleihe mit n Zahlungen der Höhe c_k zu Zeitpunkten t_k, deren Barwert mit Hilfe der stetigen Verzinsung berechnet werden soll. Die Umlaufrendite sei λ.

- Wie lautet die Formel für den Preis? $$P = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t_k} c_k.$$
- Wie lautet die Formel für die Duration? $$D = \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k e^{-\lambda t_k} c_k}{P}$$
- Finden Sie $dP/d\lambda$ als Funktion von D und P. $$\frac{dP}{d\lambda} = -\sum_{k=0}^{n} t_k e^{-\lambda t_k} c_k = -P \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k e^{-\lambda t_k} c_k}{P} = -PD$$

Terminzinssätze (forward rates)

Sind Kassazinssätze für Anlagen, die nicht sofort, sondern zu einem späteren Zeitpunkt getätigt werden sollen. Zinssätze werden mit der Hilfe der Kassazinsen (Spot rates) berechnet.

Klein t = Betrachtungszeitpunkt
gross T = Ende/Rückzahlung

tau τ = Start Kreditaufnahme/Geldanlage
$i_{0,x}$ = Kassazinssatz für Laufzeit x

$$\boldsymbol{f_{0,\tau,T} = \sqrt[(T-\tau)]{\frac{(1+i_{0,T})^T}{(1+i_{0,\tau})^\tau}} - 1}$$

Oder mit i = Start des Geschäfts und j = Ende des Geschäfts $\boldsymbol{f_{i,j} = \sqrt[(j-i)]{\frac{(1+s_j)^j}{(1+s_i)^i}} - 1}$

s_i = Kassazinssatz für Laufzeit i oder j je nach Index

Mit m perioden im Jahr: $\boldsymbol{f_{i,j} = m * \sqrt[(j-i)]{\frac{\left(1+\frac{s_j}{m}\right)^j}{\left(1+\frac{s_i}{m}\right)^i}} - m}$

$$e^{s_{t_2} t_2} = e^{s_{t_1} t_1} e^{f_{t_1,t_2}(t_2 - t_1)}$$

Stetig:

$$f_{t_1,t_2} = \frac{s_{t_2} t_2 - s_{t_1} t_1}{t_2 - t_1}.$$

Aufgaben Kassazinsen und Terminzinsen

Die Kassazinsen für 1- und 2-jährige Gelder seien s_1 = 6.3% und s_2 = 6.9%, wie hoch ist der Terminzinssatz $f_{1,2}$? $f_{0,1,2} \sqrt[(2-1)]{\frac{(1+0.069)^2}{(1+0.063)^1}} - 1 = 7.5\ \%$

Die Kassazinskurve sei s = (5.0, 5.3, 5.6, 5.8, 6.0, 6.1), wie ist die erwartete Kassazinskurve für nächstes Jahr? $\boldsymbol{s'_j = f_{0,1,j+1} \sqrt[j]{\frac{(1+s_{j+1})^{j+1}}{1+s_1}} - 1 =}$

j	1	2	3	4	5
s'_j	$\sqrt[1]{\frac{(1+0.053)^{1+1}}{1+0.05}} - 1$ $= 5.6\%$	$\sqrt[2]{\frac{(1+0.056)^{2+1}}{1+0.05}} - 1$ $= 5.9\%$	$\sqrt[3]{\frac{(1+0.058)^{3+1}}{1+0.05}} - 1$ $= 6.07\%$	$\sqrt[4]{\frac{(1+0.06)^{4+1}}{1+0.05}} - 1$ $= 6.25\ \%$	$\sqrt[5]{\frac{(1+0.061)^{5+1}}{1+0.05}} - 1$ $= 6.32\%$

Ein (jährlicher) Zahlungsstrom sei x = (−40, 10, 10, 10, 10, 10, 10). Finden Sie die Abzinsungsfaktoren $d_{0,k}$ und berechnen Sie den Barwert des Zahlungsstroms.

$$d_k = \frac{1}{(1+s_k)^k}$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$d_{0,k}$	$\frac{1}{(1+0)^0} = 1$	$\frac{1}{(1+0.05)^1} =$ 0.9523	$\frac{1}{(1+0.053)^2} =$ 0.9019	$\frac{1}{(1+0.056)^3} =$ 0.8492	$\frac{1}{(1+0.058)^4} =$ 0.7981	$\frac{1}{(1+0.06)^5} =$ 0.7473	$\frac{1}{(1+0.061)^6} =$ 0.7010
	-40	10	10	10	10	10	10
BW	-40	9.52	9.01	8.49	7.98	7.47	7.01

Summe BW = 9.4979

Berechnung des Terminzinssatzes: $s_5 = 8\%$ $s_3 = 6\%$

$$f_{3,5} = \sqrt[(5-3)]{\frac{(1+s_5)^5}{(1+s_3)^3}} - 1 = \sqrt[(2)]{\frac{(1+0.08)^5}{(1+0.06)^3}} - 1 = 11.07\ \%$$

Risiken einer Bank – Solvenz- und Liquiditätsrisiko

- Die wichtigsten Risiken für eine Bank sind:
  - Liquiditätsrisiko (d.h. ein Ansturm auf die Bank)
  - Dies ist der Fall, wenn die Einleger das Vertrauen in die Bank verlieren und ihr Geld abheben.
  - Solvenzrisiko (d.h. das Eigenkapital hat einen negativen Wert)
  - Dies geschieht in der Regel, wenn Schuldner ihre Kredite nicht bedienen.
- Häufig führen Solvenzprobleme zu einem Vertrauensverlust in die Bank, der dann einen Ansturm auf die Bank auslöst. Aus diesem Grund wurde die Einlagensicherung geschaffen. Seither sind Bankenstürme seltener geworden.

Value-at-Risk (VaR)

- Erstellung eines Quantils
- Wir definieren einen Prozentsatz α und betrachten das 1-α-Quantil.
- Für α = 95 % ist dies dann das 5 %-Quantil, also der Preis, der in 95 % der Fälle überschritten wird.
- Oder anders ausgedrückt: Nur in 5 % der Fälle wird der Preis kleiner oder gleich diesem Wert sein.
- In der Risikomessung wird diese Größe als Value-at-Risk auf dem Konfidenzniveau α (abgekürzt VaR_α) bezeichnet.
- Er ist ein weit verbreitetes Risikomaß.
- Ein Manko des Value-at-Risk ist, dass wir bei einem Preis, der niedriger ist als der VaR, keine Vorstellung davon haben, wie niedrig er wahrscheinlich sein wird.
- Diesem Punkt wird durch den Expected Shortfall (ES) Rechnung getragen.
- Bei einer Menge x ist der Expected Shortfall auf dem Konfidenzniveau α die bedingte Erwartung von x, dass x niedriger ist als der VaRα(x).
- Der Expected Shortfall sagt uns also, was wir erwarten müssen, wenn x niedriger ist als der Value-at-Risk

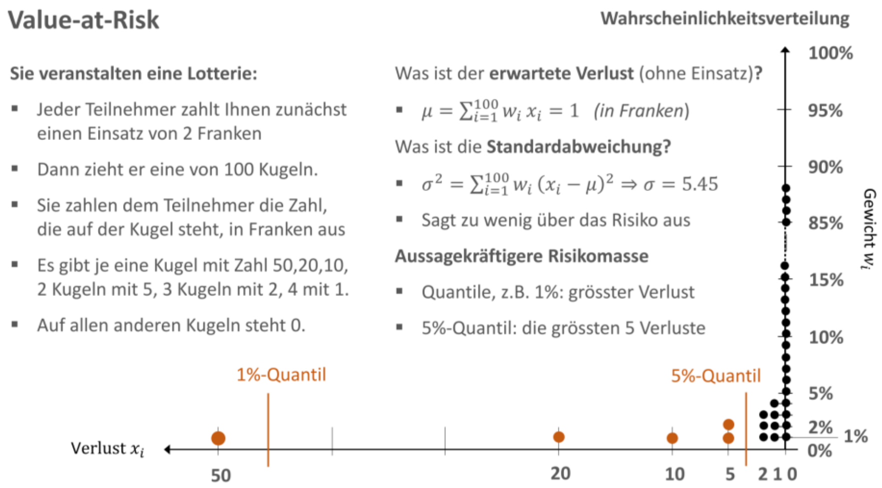
Beispiel
Value-at-Risk ist das Quantil, das am weitesten rechts liegt

$\boldsymbol{VaR}_{95\%}$ = «Value-at-Risk bei Konfidenzniveau **95%**»

mit 95% Sicherheit verliert man nicht mehr als $\boldsymbol{VaR}_{95\%}$ = 2

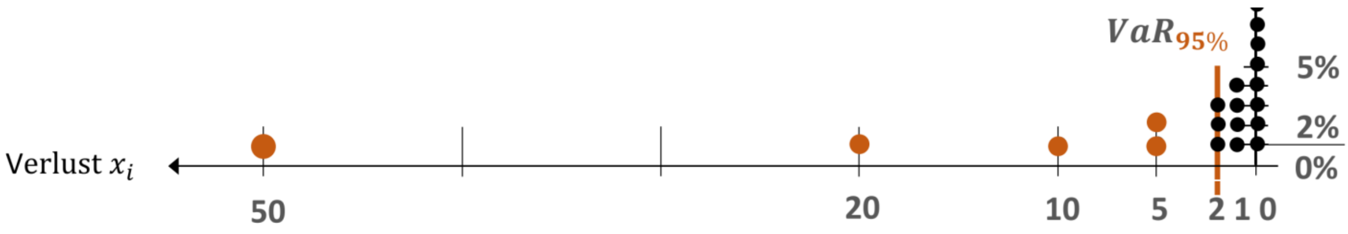
Da nur 5% der Fälle höher sind als 2.

$\boldsymbol{VaR}_{99\%}$ **= 20,** $\boldsymbol{VaR}_{99.5\%}$ **= 50**



Expected Shortfall $\boldsymbol{ES}_{95\%}$ - Ist der mittlere Verlust, **wenn** der Verlust grösser als $\boldsymbol{VaR}_{95\%}$ ist
Hier also $\boldsymbol{ES}_{95\%}$ = (5+5+10+20+50)/5 = 18

$\boldsymbol{ES}_{99\%}$ = 50 $\boldsymbol{ES}_{98\%}$ = (20 + 50)/2 = 35 wobei $\boldsymbol{VaR}_{98\%}$ **= 10**



Achtung: Bei Aufgaben, wo nur die x grössten/schlimmsten Fälle von Anzahl n präsentiert, muss der Grundgesamtheit n Beachtung geschenkt werden:

Beispiel: Seit 2005 gab es 105 Atlantic Hurricanes Rechts ist eine Liste der teuersten Hurricanes seit 1992. N ist hier 105 und nicht nur die 10 schlimmsten Fälle!
Berechnen Sie:

$\boldsymbol{VaR}_{95\%}$ = **68.7 b** 105-(105*0.95) = 5.25 aufrunden auf 6. Platz!
$\boldsymbol{ES}_{95\%}$ = (125, 125, 91.6, 77.2, 75.3)/5 = **98.82**

$\boldsymbol{VaR}_{99\%}$ = **125 b** 105-(105*0.99) = 1.05 aufrunden auf 2. Platz!
$\boldsymbol{ES}_{99\%}$ = (125)/1 = **125 b**

Costliest Atlantic hurricanes			
Rank	Hurricane	Season	Damage[nb 12]
1	5 Katrina	2005	$125 billion
	4 Harvey	2017	
3	5 Maria	2017	$91.6 billion
4	5 Irma	2017	$77.2 billion
5	4 Ida	2021	$75.3 billion
6	3 Sandy	2012	$68.7 billion
7	4 Ike	2008	$38 billion
8	5 Wilma	2005	$27.4 billion
9	5 Andrew	1992	$27.3 billion
10	5 Ivan	2004	$26.1 billion

Weiteres Beispiel:
Die 10 grössten monatlichen Verluste eines Elektrizitätswerks in den letzten 5 Jahren waren (in CHF Mio.):

c(-2.5, -4.3, -1.1, -3.1, -7.1, -1.8, -3.3, -2.4, -2.8, -1.7)

Monatlicher Verlust der letzten fünf Jahren → Anzahl Monate Total = 5*12 = 60

Sortierter Vektor → c(-7.1, -4.3, -3.3, -3.1, -2.8, -2.5, -2.4, -1.8, -1.7, -1.1)

60-(60*0.95) = 3 → wird immer ein Wert mehr genommen und damit Platz Nr. 4!

Was ist das 5% Value-at-Risk?
$\boldsymbol{VaR}_{95\%}$ = **3.1**

Was ist der 5% Expected Shortfall?
$\boldsymbol{ES}_{95\%}$ = (7.1 + 4.3 + 3.3)/3 = **4.9**

Obligatorische Leistungsnachweise für die Modulbewertung:

- 2 praktische Hausarbeiten in Gruppen während des Semesters (Gewichtung je 20%)
- Endklausur (Gewichtung 60 %)

Der Rundungsspielraum von ± 0.25 Notenpunkten wird ausgenutzt und berücksichtigt die aktive Mitarbeit des Studierenden im Unterricht und im Selbststudium.
Eine Modulbewertung kann nur erfolgen, wenn alle obligatorischen Leistungsnachweise erbracht wurden.

Programmiersprache: R mit R-Paket FEMS
Erlaubte Unterlagen: Open-book → Moodleprüfung