Vektorraum

VR sei eine Menge V mit Addition $u, v \in V, u+v \in V$ und einer Skalarmultiplikation $v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \cdot v \in V$.
V darf durch rechnen nicht verlassen werden.
$\mathbb{R}^n$ *bleibt* $\mathbb{R}^n$, L^n *bleibt* L^n, $\mathbb{R}^{m\times n}$ *bleibt* $\mathbb{R}^{m\times n}$

- Die Addition $+$ erfüllt folgende Eigenschaften:
  - (i) Assoziativität:
  $$(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u,v,w \in V$$
  - (ii) Existenz des Nullvektors:
  $$\exists\, 0 \in V: \ v+0 = v \quad \forall v \in V$$
  - (iii) Existenz des Negativen:
  $$\forall v \in V\ \exists -v \in V: \quad v+(-v) = 0$$
  - (iv) Kommutativität:
  $$v+w = w+v \quad \forall v,w \in V$$
- Die Skalarmultiplikation $\cdot$ erfüllt folgende Eigenschaften:
  - (v) Assoziativität:
  $$(\lambda\mu)\cdot v = \lambda(\mu \cdot v) \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \quad v \in V$$
  - (vi) Neutralität der Eins:
  $$1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$
- Schliesslich sind noch folgende zwei Distributivgesetze erfüllt:
  - (vii)
  $$\lambda\cdot(v+w) = \lambda\cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ v,w \in V$$
  - (viii)
  $$(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu \cdot v \quad \forall v \in V,\ \lambda,\mu \in \mathbb{K}$$

Unterräume

Sei V ein VR, Unterraum U ist eine nicht-leere Teilmenge $U \subset V$.

i) $u, v \in U \to u+v \in U$
ii) $u \in U, \lambda \in \mathbb{K} \to \lambda \cdot u \in U$

Überprüfe ob $0 \in U$:

- Nein: kein Unterraum
- Ja: benutze i) und ii) um herauszufinden ob Unterraum

Bsp. 1

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ a+b=1 \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_1, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix} \notin M_1$

da $\lambda a + \lambda b$

$(a+b)\lambda = 1 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda \neq 1$ ✗

kein Unterraum

Bsp. 2

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ a+b-f=0 \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$

$\lambda a + \lambda b - \lambda f = \lambda(a+b-f)$
$= \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d_1+d_2 & e_1+e_2 & f_1+f_2 \end{pmatrix}$

$a_1+a_2+b_1+b_2-f_1-f_2$

$a_1+b_1-f_1+a_2+b_2-f_2$

$0 + 0 = 0$ ✓

ist Unterraum

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Kombination

Sei V ein VR und $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren, eine Lin. Komb. ist der Vektor
$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$, v kann nicht in neue Dimension gehen ($\mathbb{R}^n$ *bleibt* $\mathbb{R}^n$).

Lineare Hülle

$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_2 \cdot v_2\}$
Der Spann ist die Menge aller möglichen Lin. Komb.
Ist ein U von V.

Lineare Unabhängigkeit

Falls $\lambda_1 \cdot v_{1+\dots} + \lambda_n \cdot v_n = 0$ und $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
Dann sind Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Rezept

- Schreibe die n Vektoren als Spalten
- Gauss-Algorithmus
- Hat man maximalen Rang (d.h. gilt $r = n$)?
  - Falls ja: Die Vektoren sind linear unabhängig.
  - Falls nein: Die Vektoren sind linear abhängig. Relevant für das Thema Basis von kommender Woche: Durch Streichen der Vektoren ohne Pivots erhält man eine grösstmögliche Teilmenge an linear unabhängigen Vektoren.

Bsp 1:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{4} & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 4\cdot II - I \\ 4\cdot III + 3I \\ 2IV + I \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} \boxed{4} & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{5} & 7 \\ 0 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\,III - 17\,II \\ IV - 2II \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} \boxed{4} & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{5} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{-114} \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$r = n$
linear unabhängig
(keine Basis da 3 Vektoren für 4-Dim)

Bsp 2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, VR $V = \operatorname{span}(A, B, \cancel{C})$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} II \leftrightarrow III \\ II - 2I \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r < n$
linear abhängig

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & \cancel{3} \\ 0 & \boxed{-3} & \cancel{-2} \\ 0 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 0 & \cancel{0} \end{array}\right)$$

A, B linear unabhängig
Basis von VR V

Basis und Dimensionen

Erzeugenden System

Falls $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$ heissen $v_1, \dots, v_n$ Erzeugenden System von VR V.
Jeder Vektor v lässt sich als Lin. Komp von Erzeugenden System $v_1, \dots, v_n$ darstellen.
$\forall v \in V\ \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n\colon\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$

Koordinatenvektor

$p(x) = 8x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \in P_3$
$\Rightarrow\ p(x) = \lambda_1 \cdot x^3 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x + \lambda_4 \cdot 1$

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ +5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ==> Koordinatenvektor

Basis

B heisst Basis von V, falls B:

i) Linear unabhängig ist.
ii) Ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. span(B) = V.

Bsp. $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ ist Basis von V = P_3

Dimension

Anzahl Vektoren in der Basis

Standartbasen

$\mathbb{R}^2$: $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2-Dimensional

P_2: $\quad e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1$ 3-Dim.

$\mathbb{R}^{2\times 2}$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4-Dim.

Bsp

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und drücken Sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von $\{b_1, b_2, b_3\}$ aus, d.h. bilden Sie den Koordinatenvektor x bzgl. der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$.

$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3$

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 11 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \ \overset{\text{Gauss}}{\leadsto}\ \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 11 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & -16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \ \overset{\text{einsetzen / vereinfachen}}{\leadsto}\ \begin{array}{l} \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 = -5 \\ \lambda_1 = 4 \end{array}$$

$v = 4 \cdot b_1 - 5 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 \quad \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normen auf Vektorräumen

Norm = Länge des Vektors (immer positiv)

(i) absolut homogen:

$$\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|, \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

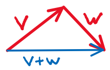
(ii) subadditiv (Dreiecksungleichung):

$$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V$$

λ = Streckfaktor, v = ursprüngliche Länge

(iii) definit:

$$\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$



p-Normen

$\Vert x\Vert_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \vert x_i\vert^p\right)^{1/p}$	$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, p = 1,2,3:$ $\Vert x\Vert_1 = (\vert 1\vert + \vert -2\vert + \vert 2\vert)^1 = 5$ $\Vert x\Vert_2 = (\vert 1\vert^2 + \vert -2\vert^2 + \vert 2\vert^2)^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ $\Vert x\Vert_3 = (\vert 1\vert^3 + \vert -2\vert^3 + \vert 2\vert^3)^{1/3} = \sqrt[3]{17}$

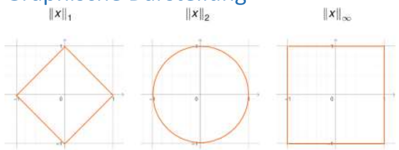
Euklidische Norm (Standartnorm)

$\Vert x\Vert_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, x \in \mathbb{R}^n \cup x \in \mathbb{C}^n$	siehe p-Norm

Maximumsnorm (p-Norm für ∞)

$\Vert x\Vert_\infty = \max_{1 \le x_i \le n} \vert x_i\vert$	$c = \begin{pmatrix} 1+i \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\Vert c\Vert_\infty = \max\{\vert 1+i\vert, \vert 5\vert, \vert -7\vert\} \Rightarrow \max\left\{\sqrt{1^2+1^2}, 5, 7\right\} = 7$

Graphische Darstellung



Frobenius-Norm

$\Vert A\Vert_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vert a_{ij}\vert^2}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\Vert A\Vert_F = \sqrt{\vert 1\vert^2 + \vert -2\vert^2 + \vert 3\vert^2 + \vert -5\vert^2} = \sqrt{39}$

Zeilensummennorm

$\Vert A\Vert_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} \vert a_{ij}\vert$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\Vert A\Vert_\infty = \max_{1 \le i \le m} \{\vert 1 + (-2)\vert, \vert 3 + (-5)\vert\} = 2$

Spaltensummenform

$\Vert A\Vert_1 := \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} \vert a_{ij}\vert$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\Vert A\Vert_1 := \max_{1 \le j \le n} \{\vert 1 + 3\vert, \vert (-2) + (-5)\vert\} = 7$

Norm für Funktionsräume

$\Vert f\Vert_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} \vert f(x)\vert^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$	$f(x) = x^2$ $\Vert f\Vert_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} \vert x^2\vert^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = (F_1 - F_2)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

Skalarprodukte auf Vektorräume

$\mathbb{K}^n$

$$\mathbb{R}^n: \langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

$$\mathbb{C}^n: \langle x \cdot y\rangle = \overline{x_1} \cdot y_1 + \cdots + \overline{x_n} \cdot y_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \cdot y_k$$

$\mathbb{K}^{m\times n}$

$$\mathbb{R}^{m\times \mathrm{n}}: \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T \cdot B)$$

$$\mathbb{C}^{m\times \mathrm{n}}: \langle A, B\rangle = tr(A^* \cdot B)$$

$$\mathrm{tr}(A) = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & \mathrm{i} \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Funktionen

$$L^2([-1,1]): \langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$f(x) = x^2 + 1, g(x) = x$ in $L^2([-1,1])$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + 1) \cdot x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^3 + x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

f steht orthogonal zu g

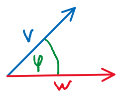
Norm

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Zwischenwinkel

$$\varphi := \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\sqrt{\langle v, v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w\rangle}}\right)$$



Orthonormalbasis (ONB)

Basisvektoren $\{\mathrm{e}_1, \ldots, e_n\}$ sind orthogonal (senkrecht) und normiert (Länge 1).

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

Ein beliebiger Vektor v:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v\rangle \cdot e_i$$

Fourier-Reihe

Vektorraum

Menge aller periodischen Funktionen mit fester Periodendauer T > 0 durch den Vektorraum:

$$L^2([0,T]) := \left\{ f: [0,T] \to \mathbb{C} \mid \int_0^T |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

Periodische Funktionen

$$f = \frac{1}{T} = v \longrightarrow \text{ggt von Schritten}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Reelle Fourier-Reihe

Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) \, dt$$

"ONB"

$$g(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g_n(t) := \cos(n \cdot \omega \cdot t), n \in \mathbb{N}$$

$$h_m(t) := \sin(m \cdot \omega \cdot t), m \in \mathbb{N}$$

Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_m \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \right)$$

Jede periodische Funktion *f(t)* Wobei $f \in L^2([0,T])$	Lin. Komb. Von Basisvektoren: $\sin(n \cdot \omega \cdot t)$ $\cos(n \cdot \omega \cdot t)$ 1 überlagerung von harmonische Schwingungen

Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \, dt$$

$$a_n = \langle g_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \, dt, n \in \mathbb{N}$$

$$b_m = \langle h_m(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(m \cdot \omega \cdot t) \, dt, m \in \mathbb{N}$$

Komplexe Fourier-Reihe

Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \cdot g(t) \, dt$$

"ONB"

$$e_k(t) := e^{ik\omega t}, k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t}$$

Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} \cdot f(t) \, dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$$

Umrechnung: Reelle <=> Komplex

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}, \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n)$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

Amplituden-Phase Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Umrechnung zwischen Darstellungen

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n)$$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

$$a_n = A_n \cos(\varphi_n), \quad b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$$

$$A_n = 2|c_n|, \quad \varphi_n = \arg(c_n)$$

$$c_n = \frac{A_n}{2} \mathrm{cis}(\varphi_n)$$

Symmetrieeigenschaften

- $\frac{a_0}{2}$: Konstanter Anteil (DC-Anteil), entspricht einer Verschiebung von $f(t)$ nach unten und oben. C_0
- Falls $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
  Die Funktion $f(t)$ ist **gerade** (d.h. symmetrisch bzgl. der y-Achse). Gerade Funktionen enthalten nur $\cos(n\omega t)$-Schwingungen. $C_n \in \mathbb{R}$
- Falls $a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
  Die Funktion $f(t) - \frac{a_0}{2}$ ist **ungerade** (d.h. punktsymmetrisch bzgl. Ursprung). Ungerade Funktionen enthalten nur c_n sind rein imaginär $\sin(n\omega t)$-Schwingungen.

- $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t)$ $\cos(t)$ = gerade Funktion
- $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum^{\infty} a_n \cdot \sin(n\omega t)$ $\sin(t)$ = ungerade Funktion

Bsp.

$$x(t) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{3}{4} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ges: $\omega, T, A_k, \varphi_n$

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4$$

$$n = 3, 4$$

$$A_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n=3 \\ \frac{1}{2}, & n=5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \varphi_n = \begin{cases} -\frac{5\pi}{6}, & n=3 \\ \frac{\pi}{4}, & n=5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{Amplituden-Phasen-Form}}$$

$$= \underbrace{-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)}_{\text{Reelle Schreibweise}}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)e^{-\frac{5\pi}{2}it} - \frac{3}{16}\left(\sqrt{3}-i\right)e^{-\frac{3\pi}{2}it} - \frac{3}{16}\left(\sqrt{3}+i\right)e^{\frac{3\pi}{2}it} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)e^{\frac{5\pi}{2}it}}_{\text{Komplexe Schreibweise}}$$

Lineare Abbildung

Linearität

Linear falls:

$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2), \qquad \forall v_1, v_2 \in V, \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Matrix

Sei A eine $m \times n$ - Matrix. So ist dies eine Lineare Abbildung.

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \mapsto A \cdot x$

Eine Matrix A die die Werte:

-streckt

-dreht

-spiegelt

-projiziert

-scher

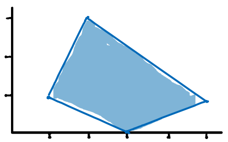
Beispiele

$P = (1,1)$

$Q = (2,3)$

$R = (5,1)$

$S = (3,0)$



Streckung (Bsp. Von Ursprung aus)

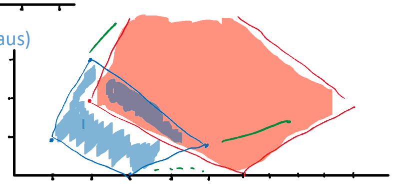
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x' = A \cdot x$

$P' = A \cdot P = (2,2)$

$Q' = A \cdot Q = (4,6)$

$R' = A \cdot R = (10,2)$

$S' = A \cdot S = (6,0)$



Gerade

Gerade g: $\vec{x} = r_0 + t \cdot v, \quad t \in \mathbb{R}$

r_0 = Stützvektor, v = Richtungsvektor

Lin. Abb.

$f(x) = f(r_0 + t \cdot v) = f(r_0) + t \cdot f(v)$

$f(r_0)$ = neuer Stützvektor, f(v) = neuer Richtungsvektor

Matrix einer Linearen Abbildung

Kommutatives Diagramm

Kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f \text{ linear}"] \arrow[d, "B_V"'] & W \arrow[d, "B_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{R}^{m \times n}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

- Nehme die Basisvektoren aus B_V
- Wende die Abbildung f auf diese Basisvektoren an
- Schreibe das Ergebnis als Koordinatenvektor bzgl. der Basis B_W
- Schreibe diese Vektoren sukzessive als Spalten in die Matrix A

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "d/dx"] \arrow[d, "B = \{1, x, x^2, x^3\}"'] & P_2 \arrow[d, "B = \{1, x, x^2\}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$1 \xrightarrow{d/dx} 0 \quad = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x \longrightarrow 1 \quad = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x^2 \longrightarrow 2x \quad = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x^3 \longrightarrow 3x^2 \quad = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Verkettung

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f \text{ linear}"] \arrow[d, "B_U = \{u_1, \dots, u_n\}"'] \arrow[rr, bend left, "h = f \cdot g"] & V \arrow[r, "g \text{ linear}"] \arrow[d, "B_V = \{v_1, \dots, v_l\}"] & W \arrow[d, "B_W = \{w_1, \dots, w_m\}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{R}^{l \times n}"] \arrow[rr, bend right, "C = B \cdot A"'] & \mathbb{R}^l \arrow[r, "B \in \mathbb{R}^{m \times l}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

u $\qquad v = f(u)$ $\qquad w = g(v) = g(f(u))$

x $\qquad y = A \cdot x$ $\qquad z = B \cdot y = B \cdot A \cdot x$

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "d/dx"] \arrow[d, "B = \{1, x, x^2\}"'] & P_1 \arrow[r, "d/dx"] \arrow[d, "B = \{1, x\}"'] & P_0 \arrow[d, "B = \{1\}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C = B \cdot A"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^1 \end{tikzcd}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Kern

- Löse LSG A*x=0
- Dann gilt
  - $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | A \cdot x = 0\}$ Der Kern entspricht allen x aus LSG
- dim(ker(A)) = n-r (n = # alle Terme, r = # aller Pivots)
- Bei vollem Rang, ker(A) = {0}

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

q

$x_2 = q$

$0 = x_1 - q \Rightarrow x_1 = q \Rightarrow \ker(A) = \left\{ q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim(\ker(A)) = n - r = 2 - 1 = 1$

Bild

- Löse LSG A*x=0
- Im(A) = span(alle Spalten mit Pivot)
- Alle spalten mit Pivot = linear unabhängige Spalten
- dim(im(A)) = r (r = # aller Pivots)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim(\operatorname{im}(A)) = 2$

Injektive/surjektive Linearen Abbildungen

$f: V \to W$

$f = injektiv \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

- f Injektiv wenn voller Rang (alle spalten haben ein Pivot)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

injektiv ✓ $\ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim(\mathrm{im}(A)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Nicht surjektiv ✗

$f = surjektiv \Leftrightarrow \mathrm{im}(f) = W$

- das Bild spannt gesamtes W auf
- dim(im(A)) = dim(W)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & 0 \end{array}$$

$\ker(B) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Nicht injektiv ✗

$\dim(\mathrm{im}(B)) = 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

surjektiv ✓

Umkehrung von Linearen Abbildungen

- A = bijektiv, linear (isomorphismus) → A invertierbar
- A invertieren
  - $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
  - $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, n > 2,\quad \overline{A \;|\; \mathbb{1}_n} = \overline{\mathbb{1}_n \;|\; A^{-1}}$
- Wenn bei $f: V \to W$ ein Isomorphismus besteht,
  - $f: V \to W, f^{-1}: W \to V$
  - Isomorphismus bezieht sich auf f
- sind V & W Isomorph
  - Isomorphe bezieht sich auf die Vektorräume

Matrix für Basiswechsel

Rezept

Gegeben: VR V mit "alter" Basis B und "neuer" Basis B̃

Umformungsmatrix = T

- T:
  - Schreibe Basisvektoren von "alter" Basis B bezüglich der Basisvektoren von "neuer" Basis B̃
  - Spalten reihenweise zu Matrix zusammenführen
- T^{-1}:
  - Schreibe Basisvektoren von "neuer" Basis B̃ bezüglich der Basisvektoren von "alter" Basis B
  - Spalten reihenweise zu Matrix zusammenführen
- Wenn "alte" Basis = Standartbasis
  - Rechne T^{-1} zuerst aus
  - Invertiere Matrix zu T
    - Ist einfacher

$\mathcal{B} = \{1, x\}$

$\tilde{\mathcal{B}} = \{1, 1-2x\}$

$$T: \begin{array}{l} 1 \overset{id}{\longmapsto} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1-2x) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \longmapsto x = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}(1-2x) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \tilde{\mathcal{B}} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$

$$T^{-1}: \begin{array}{l} 1 \overset{id}{\longmapsto} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x-1 \longmapsto x-1 = -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2-2x+1 \longmapsto x^2-2x+1 = 1\cdot 1 + -2\cdot x + 1\cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Basiswechsel

$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T^{-1}$

$x = T^{-1}\cdot\tilde{x} \xrightarrow{A} y = A\cdot x = A\cdot T^{-1}\cdot\tilde{x}$

$$\begin{tikzcd}
x \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{K}^{m\times n}"] \arrow[dd, bend right, "T"'] & \mathbb{K}^m \ni y = A\cdot x \arrow[dd, bend left, "S"] \\
v \in V \arrow[u, "B_V"] \arrow[d, "\tilde{B}_V"'] \arrow[r, "f \text{ linear}"] & W \ni w = f(v) \arrow[u, "B_W"'] \arrow[d, "\tilde{B}_W"] \\
\tilde{x} \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}"'] \arrow[uu, bend left=60, "T^{-1}"] & \mathbb{K}^m \ni \tilde{y} = \tilde{A}\cdot\tilde{x}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{y} = S\cdot y = \underbrace{S\cdot A\cdot T^{-1}}_{\tilde{A} = S\cdot A\cdot T^{-1}}\cdot\tilde{x}$

Spezialfall

$B_V = B_W$ & $\tilde{B}_V = \tilde{B}_W$

$\tilde{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A \in \mathbb{K}^{n\times n}"] \arrow[dd, bend right, "T"'] & \mathbb{K}^n \arrow[dd, bend left, "T"] \\
V \arrow[u, "B_V"] \arrow[d, "\tilde{B}_V"'] \arrow[r, "f \text{ linear}"] & V \arrow[u, "B_V"'] \arrow[d, "\tilde{B}_V"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Eigenwert (EW) und Eigenvektoren (EV)

Definition

- $v = EV$ von der Funktion f zum EW λ, wenn $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda \cdot v$.
- $\Rightarrow$ $x = EV$ von der Matrix A mit EW λ, wenn $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$
- E_{λ_i} = Eigenraum (Menge aller EV zu einem EW λ_i)

Rezept

EW

- Berechne charakteristisches Polynom $p_A(\lambda)$
  - $p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$
  - Setze $p_A(\lambda) = 0$ und rechne Nullstellen aus
    - Bei quadratischem Polynom Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
    - Ausklammern Binom suchen
  - Nullstellen = EW λ von A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$

$EW\ \lambda_1 = 0$

$EW\ \lambda_2 = 2$

Eλ / EV

- Berechne für jedes EW den E_{λ_i}
  - $E_{\lambda_i} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$
    - Löse Homogenes LGS
      - $(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \cdot x = 0$
  - Ein Vektor von E_{λ_i} = EV.

$EW\lambda_1 = 0$

$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 0-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0-1 & 0 \end{array} \xrightarrow{II - I} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\uparrow q$ $\quad x_2 = q$, $-x_1 - q = 0 \Rightarrow x_1 = -q$

$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \left\{ q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EV(von $\lambda_1 = 0, q = 1$) $= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$EW\lambda_2 = 2$

$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \end{array} \xrightarrow{II+I} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\uparrow s$ $\quad x_2 = s$, $x_1 = s$

$E_{\lambda_2} = \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EV(von $\lambda_2 = 2, s = 3$) $= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vielfachheit (VF)

Algebraische Vielfachheit

Die alg. VF eines EW ist die Vielfachheit der Nullstelle im $p_A(\lambda)$.

$\lambda^2(\lambda - 3)$

$\Rightarrow EW\lambda_1 = 0$, doppelte Nullstelle => alg. VF= 2

$\Rightarrow EW\lambda_2 = 3$, einfache Nullstelle => alg. VF= 1

Geometrische Vielfachheit

Die geom. VFist die Dimension von dem E_{λ_i}.

- Anzahl linear unabhängige EV zum EWλ
  - (Anzahl Buchstaben in $\ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$)

$E_{\lambda_2} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ geom. Vielfältigkeit $= 1$

$E_{\lambda_3} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ geom. " $= 2$

Diagonalisieren

Rezept

1. Berechne die EW
2. Berechne für jeden EW die EV
   a. Fange mit EW's mit alg. VF > 1 an.
3. Wenn $\#\,EV = \dim(A^{n \times n})$
   a. (Basis B_{EV} bestehend aus EV aufstellen)
4. T, D, T^{-1} aufstellen
   a. T^{-1} = Matrix aus EV
   b. T umstellen von T^{-1}
   c. D = Diagonalmatrix aus Ews
      i. (Oder $T \cdot A \cdot T^{-1}$)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} EW\ \lambda_1 = 0,\ EV\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ EW\ \lambda_2 = 2,\ EV\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$

$B_{EV} = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad T = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = T \cdot A \cdot T^{-1}$

Diagonalisierbarkeit von $A^{n \times n}$

- Basis B_{EV} aus n EV
  - Wenn $\forall\ EW = alg.VF\ 1$
    - Diagonalisierbar, Da jeder EW = 1 EV
  - Wenn $EW\ \lambda = alg.VF\ m,\ \{m \in \mathbb{N} | m > 1\}$ ⟶ kontrolliere zuerst EW mit alg. VF > 1
    - Diagonalisierbar, wenn # EV von EW = m
- => $\dim(E_{\lambda_i}) = alg.VF\ von\ EW$

$\Rightarrow$ wenn # lin. unabhängige Vektoren = alg. VF von EW

$\Rightarrow$ diagonalisierbar

$A^{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{EV} = \{\underbrace{v_1, v_2}_{\# = 2 = n}\}$ ✓

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$EW\lambda_1 = 4$, alg. VF = 2

$EW\lambda_2 = -2$, alg. VF = 1

$\begin{array}{ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ \boxed{2} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ q & s \end{array}$

$x_2 = q$

$x_3 = s$

$x_1 = \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}s$

$\Rightarrow E_4 = \left\{ \frac{q}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{s}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(E_4) = 2 = $ alg. VF EW 4

Potenzieren von Matrizen

Diagonalmatrizen

$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$, potenzieren der Diagonalelementen

Diagonalisierbare Matrizen

$A^n = T^{-1} \cdot D^n \cdot T$ rechne diagonalisiere die Matrix und verechnen mit T und T^{-1}

$A^{100} = T^{-1} \cdot D^{100} \cdot T$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizenexponential

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1}_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$$

$\Rightarrow e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot T$

Wobei:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

- Mit Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A.
- Die Matrix T beschreibt den Basiswechsel.
- T^{-1} enthält also die Eigenvektoren als Spalten

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -4 \\ -4 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-5)$

EW -5: $\begin{bmatrix} \boxed{-2} & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$, $x_2 = 1q$, $x_1 = -2q$

EW 5: $\begin{bmatrix} \boxed{8} & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = 2q$, $x_1 = 1q$

$\Rightarrow$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$e^A = T^{-1} \cdot e^D \cdot T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-5} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Systeme von homogenen linearen gewöhnliche Differentialgleichungen (gDgln)

Betrachte gekoppeltes System von homogenen linearen gDgln 1. Ordnung

$u'(t) = 5 \cdot u(t) - 1 \cdot v(t), \quad u(0) = 0$

$v'(t) = 2 \cdot u(t) + 2 \cdot v(t), \quad v(0) = 1$

$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -2 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-4)$

Schreibe das System in Matrixschreibweise

$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$Y'(t) = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y' = A \cdot Y, \quad \Rightarrow Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y_0$

EW 3: $\begin{bmatrix} \boxed{-2} & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = 1q$, $x_1 = \frac{1}{2}q$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EW 4: $\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = q$, $x_1 = q$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e^{D \cdot t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Fundamentalmatrix $\phi(t)$ berechnen

$\phi(t) = e^{A \cdot t} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot t} \cdot T$

$\phi(t) = e^{A \cdot t} = T^{-1} \cdot e^{D \cdot t} \cdot T = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & e^{3t} - e^{4t} \\ 2e^{4t} - 2e^{3t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}$

Lösung:

$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y_0 = \phi(t) \cdot Y_0$

$Y(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \cdot u_0 + \varphi_{12} \cdot v_0 \\ \varphi_{21} \cdot u_0 + \varphi_{22} \cdot v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$Y(t) = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{4t} \\ 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}$

gDgln *n*-ter Ordnung

Jede gDgl n-ter Ordnung kann in ein System von gDgln 1. Ordnung gebracht werden.

Lineares Anfangswertproblem (AWP) 2. Ordnung

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

$y'(0) = 2, \quad y(0) = -1$

$\lambda_1 = 1, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{1 \cdot x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow Y'(x) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ 3y' - 2y \end{pmatrix}$

$Y'(x) = A \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\phi(x) = T^{-1} \cdot e^{Dx} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x} & -e^x + e^{2x} \\ 2e^x - 2e^{2x} & -e^x + 2e^{2x} \end{pmatrix}$

$y_1(x) \quad y_2(x)$

$y(x) = A \cdot y_1(x) + B \cdot y_2(x) \quad A, B \in \mathbb{R}$

$= A \cdot (2e^x - e^{2x}) + B \cdot (-e^x + e^{2x})$

- A diagonalisieren
- T^{-1}, e^{Dx} und T aufstellen
- Fundamentalmatrix $\phi(x)$ berechnen
  - 1. Zeile von $\phi(x)$ ist Basis des Lösungsraums
  - => Lin. Komb. = jede Lösung
  - Allg. Lösung
  - $y(x) = A \cdot y_1(x) + B \cdot y_2(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$
- $Y(x) = \phi(x) \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$
  - 1. Zeile ist spezielle Lösung des AWPs

$Y(x) = \phi(x) \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x} & -e^x + e^{2x} \\ 2e^x - 2e^{2x} & -e^x + 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4e^x + 3e^{2x} \\ -4e^x + 6e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$