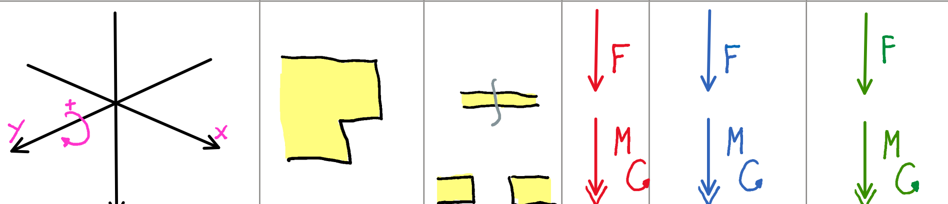
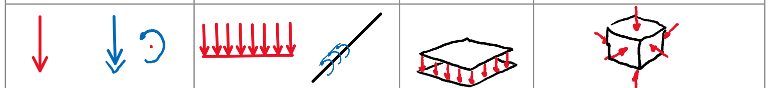
Mechanische Systeme 1

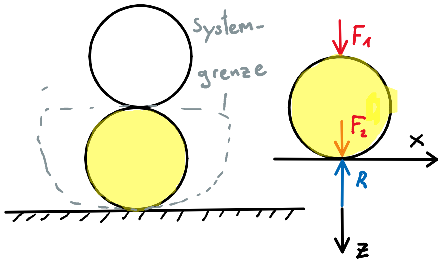
Strukturmodell

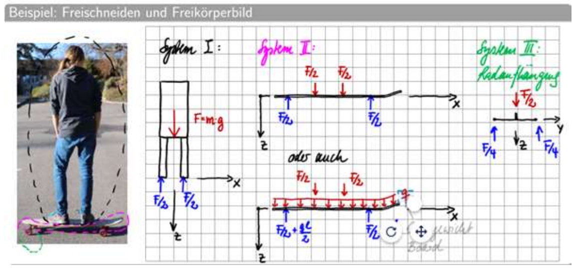
Koordinatensystem	Strukturelement	Schnittstellen	Lasten	Reaktionskräfte	Schnittgrössen
 im Gegenuhrzeigersinn positiv					

Kräfte- & Momentbezeichnung nach Dimensionen

0-Dimensional	1-Dimensional	2-Dimensional	3-Dimensional
Punktlast, Punktkraft Einzellast Punktmoment	Linienlast, Streckenlast	Flächenlast	Volumenlast
			
Seil, Kugel Schraube	Schneide Schloss	Druck	Magnetismus, Gravitation

Freikörperbild





Strukturtypen

Fachwerk
Es ist eine ebene oder räumliche Struktur, die aus Stäben besteht. Die Stäbe werden nur durch Normalkräfte beansprucht und sind gelenkig miteinander verbunden.

Schale / Membran
Es sind sehr dünne, flächige und einfach bzw. doppelt gekrümmte Strukturelemente, die nur Lasten in ihrer Ebene aufnehmen.
Das erste trägt Zug- und Druckkräfte, das zweite nur Zugkräfte.

Auflager
Das ist die Stelle, an der eine Tragstruktur ihre Lasten an einen Befestigungspunkt oder ein Fundament abgibt.
Es beschränkt die Bewegungsmöglichkeiten des starren Tragwerks.

Seil
Es ist ein längliches, biegeschlaffes und torsionsweiches Strukturelement, das ausschliesslich Zugkräfte aufnehmen kann.

Stab
Es ist ein längliches, gerades Strukturelement, das nur entlang seiner Längsachse belastet wird:
es trägt Normalkräfte (Druck und Zug) und/oder Torsionsmomente.

Welle
Es ist ein Strukturbauteil, das Drehmomente und Drehbewegungen überträgt.

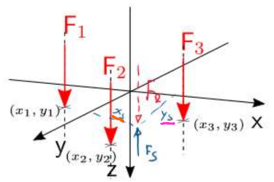
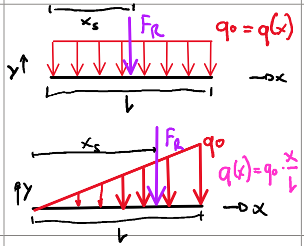
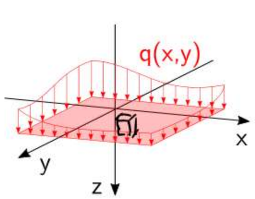
Rahmen
Es ist eine ebene oder räumliche Struktur, die aus miteinander verbundenen Balken besteht.
Sie ruht auf einem oder mehreren Auflagerpunkten und mindestens eine Verbindung ist biegesteif ausgeführt.

Es ist ein längliches, gerades Strukturelement, das hauptsächlich durch Biegung um seine Querschnittsachsen belastet wird.
Es kann zusätzlich auch durch weitere Lasten wie Querkräfte und Normalkräfte belastet sein.
Balken

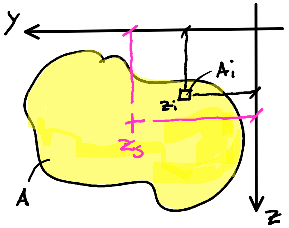
Platte / Scheibe
Es sind flächige, ebene Strukturelemente. Das erste nimmt Lasten senkrecht zu seiner Ebene auf, das zweite nimmt Lasten in seiner Ebene auf.

Schwerpunkte

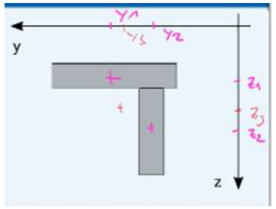
Kräfteschwerpunkte

Parallele Einzelkräfte		$\Sigma F_z = 0 = \Sigma F_i - F_s \Rightarrow F_s = \Sigma F_i$ $\Sigma M_x = 0 = \Sigma F_i \cdot y_i - F_s \cdot y_s$ $\Sigma M_y = 0 = \Sigma F_i \cdot x_i - F_s \cdot x_s$ $\Rightarrow y_s = \frac{\Sigma F_i \cdot y_i}{\Sigma F_i}$ $\quad F_R = \Sigma F_{R_i}$ (Betrag) $\Rightarrow x_s = \frac{\Sigma F_i \cdot x_i}{\Sigma F_i}$
Linienlast		$F_R = l \cdot q_0$, $x_s = \frac{\int_0^l q(x) \cdot x \, dx}{\int_0^l q(x) \, dx} = \frac{q_0 \cdot \frac{l^2}{2}}{q_0 \cdot l} = \frac{l}{2}$ $F_R = l \cdot \frac{q_0}{2}$, $x_s = \frac{\int_0^l q_0 \cdot \frac{x^2}{l} \, dx}{\int_0^l q_0 \cdot \frac{x}{l} \, dx} = \frac{2l}{3}$
Verteilte Last		$\sum F_i \; \widehat{=} \; \iint_A q(x,y) \, dx \, dy$ $\sum F_i \cdot x_i \; \widehat{=} \; \iint_A q(x,y) \cdot x \, dx \, dy$ $x_s = \frac{\iint_A q(x,y) \cdot x \, dx \, dy}{\iint_A q(x,y) \, dx \, dy}$ $y_s = \frac{\iint_A q(x,y) \cdot y \, dx \, dy}{\iint_A q(x,y) \, dx \, dy}$

Statisches Moment

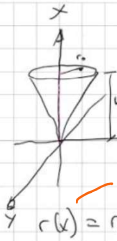
Mass für die Verteilung der Fläche bzgl. einer Achse [S_y] z_s ist eine Schwerachse		$S_y = \Sigma A_i \cdot z_{i_y} = \int_A z \, dA$ $= A \cdot z_s$ $\Rightarrow z_s = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A z \, dA$ Symmetrieachsen sind immer Schwerachsen.

Flächenschwerpunkt zusammengesetzter Fläche

		$y_s = \frac{\Sigma A_i \cdot y_{s_i}}{\Sigma A_i}$ $z_s = \frac{\Sigma A_i \cdot z_{s_i}}{\Sigma A_i} = \frac{\int z \, dA}{A}$

Schwerpunkt eines Körpers

$$x_s = \frac{\int x \, dV}{\int dV} = \frac{\int x \, dV}{V}$$



$z_s = 0$, $y_s = 0$ } Symm.-gründe

Volumen: Fläche

$$V = \int_x \pi r^2 \, dx = \int_0^{h_0} \pi \left(\frac{r_0}{h_0} \cdot x\right)^2 dx = \frac{\pi \cdot r_0^2}{h_0^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{h_0}$$

$$= \frac{\pi \cdot r_0^2}{\cancel{h_0^2}} \cdot \frac{h_0^{\cancel{3}}}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot r_0^2 \cdot h_0$$

radius auf höhe x

$$r(x) = r_0 \frac{x}{h_0} = \frac{r_0}{h_0} \cdot x$$

(*)

$$\int_V x \, dV = \int_x x \cdot \pi r^2 \, dx = \int_x \pi \left(\frac{r_0}{h_0} \cdot x\right)^2 \cdot x \, dx$$

$$= \frac{\pi r_0^2}{h_0^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{h_0} = \frac{\pi}{4} \cdot r_0^2 \cdot h_0^2$$

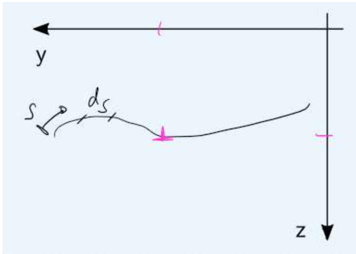
$$x_s = \frac{\frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot h_0^2}{4}}{\frac{\pi \cdot r_0^2 \cdot h_0}{3}} = \frac{3}{4} h_0$$

$$(*) \int_V x \, dV = \int_0^{h_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_0}{h_0} \cdot x} x \cdot r \, dr \, d\varphi \, dx = \int_0^{h_0} \int_0^{2\pi} \left[x \cdot \frac{r^2}{2}\right]^{\frac{r_0}{h_0} \cdot x} d\varphi \, dx$$

$$= \iint \frac{x}{2} \left(\frac{r_0}{h_0} \cdot x\right)^2 d\varphi \, dx = \frac{r_0^2}{2 h_0^2} \int_0^{h_0} \left[x^3 \varphi\right]_0^{2\pi} dx = \frac{r_0^2 \cdot \cancel{2}\pi}{\cancel{2} \cdot h_0^2} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{h_0} = \frac{r_0^2 \pi}{\cancel{h_0^2}} \cdot \frac{h_0^{\cancel{4} 2}}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot h_0^2 \cdot r_0^2$$

Schwerpunkt einer Linie

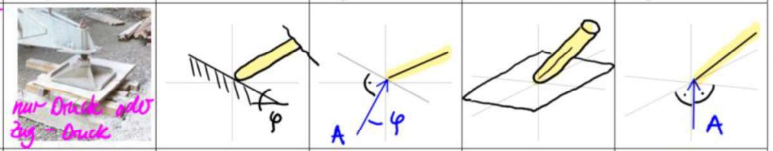
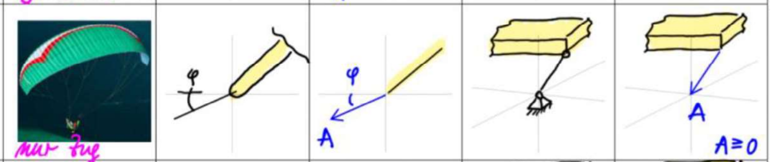
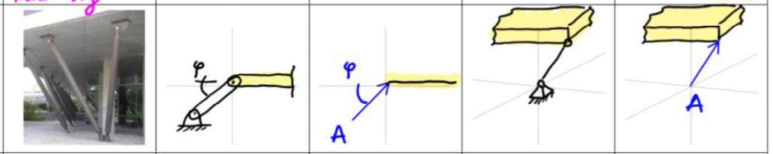
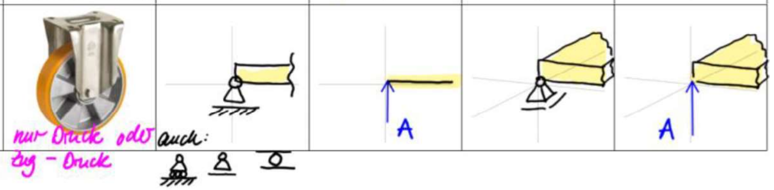
	$y_s = \frac{1}{L} \int y \, ds$ $z_s = \frac{1}{L} \int z \, ds$

Lager

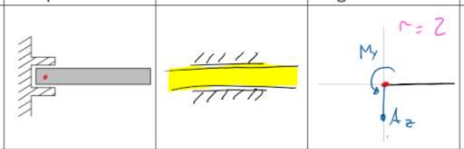
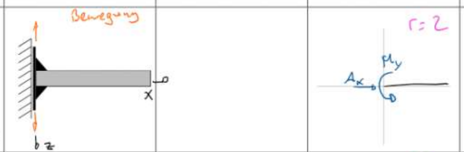
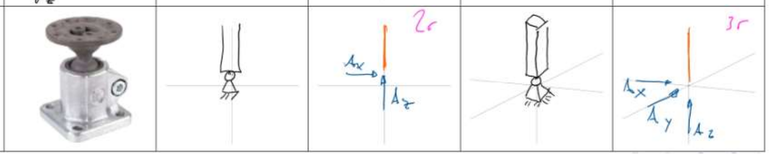
Wertigkeiten

f	Freiheitsgrad eines Tragwerks	2-D: f = 3 - r 3-D: f = 6 - r
r	Wertigkeit eines Lager	# Reaktionskräfte & -momente

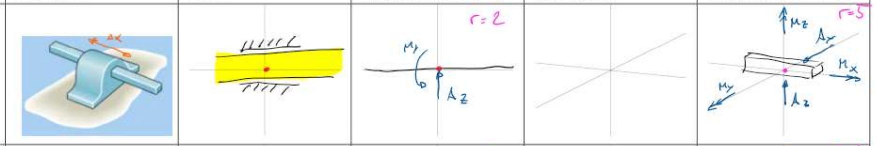
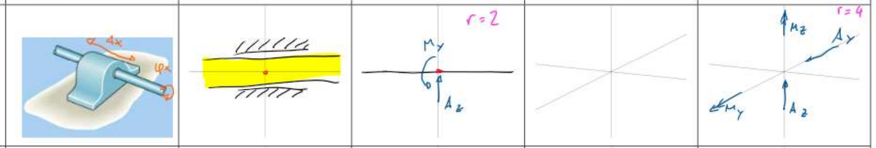
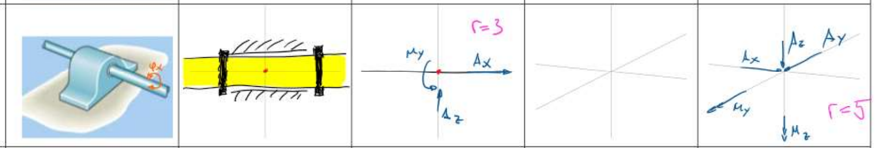
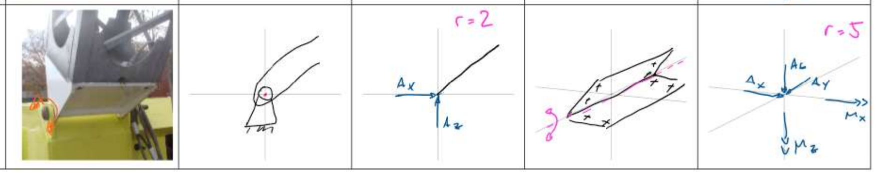
Einwertige Lager

Lagerart	Beispiel	Eben	Lagerreaktionen	Räumlich	Lagerreaktionen
glatter Kontakt = reibungsfrei Kontakt	 nur Druck oder Zug-Druck				
Seil	 nur Zug				
Pendelstütze					
Rollenlager Loslager	 nur Druck oder Zug - Druck				

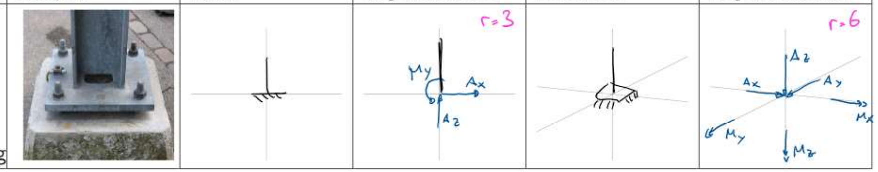
Lager mit höherer Wertigkeit

Lagerart	Beispiel	Eben	Lagerreaktionen	Räumlich	Lagerreaktionen
Längsführung				siehe Radial-Schub-Axiallager	
Winkelführung				eher Spezialfälle	
Kugelgelenk					

Lager mit höherer Wertigkeit II

Lagerart	Beispiel	Eben	Lagerreaktionen	Räumlich	Lagerreaktionen
Schublager					
Radiallager					
Axiallager					
Drehlager Scharnier Festlager					

Einspannung

Lagerart	Beispiel	Eben	Lagerreaktionen	Räumlich	Lagerreaktionen
Einspannung					

Statische Bestimmtheit einteiliger Tragwerke

Kinematische Bestimmtheit

Kinematisch bestimmt	Der Körper ist unbeweglich
Kinematisch unbestimmt	Der Körper ist endlich oder unendlich klein bewegbar

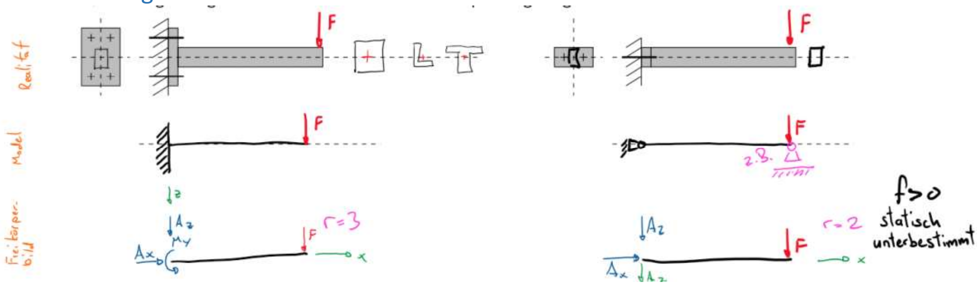
Statische Bestimmtheit

Wenn:

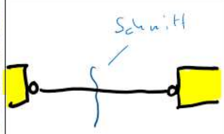
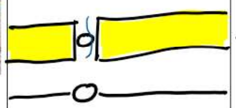
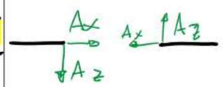
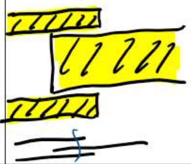
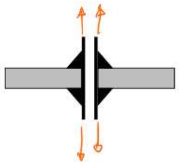
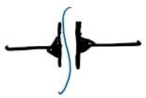
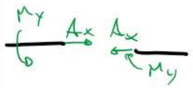
- Kinematisch bestimmt
- Alle Lagerreaktionen eindeutig berechnet werden können

statisch unterbestimmt	f > 0
statisch bestimmt	f = 0
statisch überbestimmt	f < 0

Modellbildung



Verbindungselement, Gelenke

Lagerart	Beispiel	Symbol	Lagerreaktionen	Wertigkeit (eben)
Pendelstab (stab) Pendelstütze				V=1
Drehgelenk				V=2
Normalkraftgelenk				V=2
Querkraftgelenk				V=2

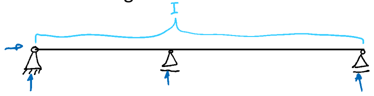
Freiheitsgrade von mehrteiligen Tragwerken

- Ebene
  - $f = 3 \cdot n - r - v$
- Räumliche
  - $f = 6 \cdot n - r - v$

f	Freiheitsgrade	
n	# Tragwerksteile	
r	Wertigkeit der Lager	# Reaktionskräfte & -momente in Lager
v	Wertigkeit der Verbindungen	# Reaktionskräfte & -momente in Gelenken

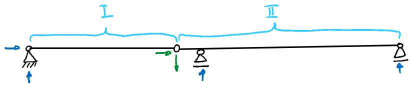
Anwendung

Gelenk einfügen um überbestimmte Durchlaufträger zu statisch bestimmten umwandeln.



n=1
r=4
v=0

$f = 3 \cdot 2 - 4 - 0 = \boxed{-1}$ überbestimmt



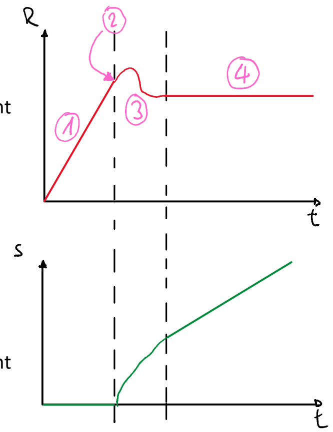
n=2
r=4
v=2

$f = 3 \cdot 2 - 4 - 2 = \boxed{0}$ statisch bestimmt

Reibung

Reibungszustände

1. Haftung
    - Ruhe --> Gleichgewicht
    - $v = 0, a = 0$
    - $F = R_0 < \mu_0 \cdot R_N$
2. Grenzzustand
    - Gleichgewicht
    - $v = 0, a = 0$
    - $F = R_0 = \mu_0 \cdot R_N$
3. Beschleunigungsphase
    - Kein Gleichgewicht
4. Gleiten
    - Ruhe --> Gleichgewicht
    - $v = const., a = 0$
    - $F = R = \mu \cdot R_N$



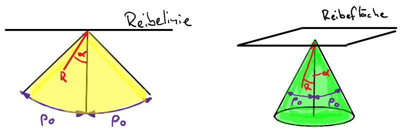
Selbsthemmung

- Körper haftet wen:
    - $\tan(\alpha) \leq \mu_0 = \frac{R_0}{R_N} = \tan(\rho_0)$

Haftungskeil, Haftungskegel

Der Winkel ρ_0 ist der grösstmögliche Winkel den eine resultierende Reibungskraft kann haben bevor es anfängt zu gleiten.

$$\tan(\rho_0) = \frac{R_0}{R_N} = \mu_0$$



Haften, Gleiten, Kippen

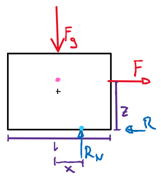
$$x = z \cdot \frac{F}{F_g}$$

wenn $x = \frac{l}{2}$, $z \leq \frac{F_g \cdot l}{2F}$

wobei z die höhe der angreifenden Kraft F ist, l ist die länge des Objekts und F_g die Gewichtslast.

Der Körper wird also:

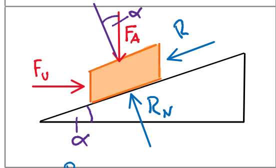
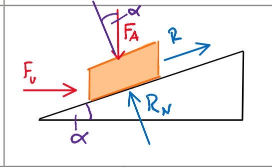
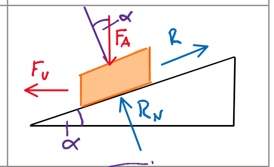
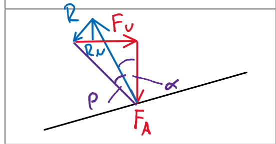
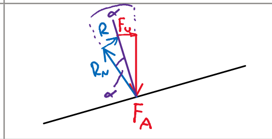
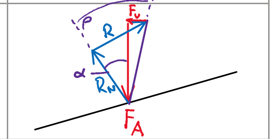
- Haften, wenn $z \leq \frac{F_g \cdot l}{2F}$ & $F \leq \mu_0 \cdot F_g$
- Gleiten, wenn $z \leq \frac{F_g \cdot l}{2F}$ & $F > \mu \cdot F_g$
- Kippen, wenn $z > \frac{F_g \cdot l}{2F}$

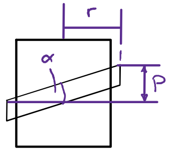


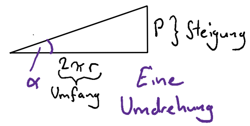
Gewinde

Steigungswinkel α

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P}{2\pi \cdot r}\right)$$ mit Steigung P und Radius r

Last heben	Last senken (nicht selbsthemmend)	Last senken (selbsthemmend)
		
		
$F_U = F_A \cdot \tan(\alpha + \rho)$	$F_U = F_A \cdot \tan(\alpha - \rho)$	$F_U = F_A \cdot \tan(\rho - \alpha)$
$M = F_A \cdot \tan(\alpha + \rho) \cdot r$	$M = F_A \cdot \tan(\alpha - \rho) \cdot r$	$M = F_A \cdot \tan(\rho - \alpha) \cdot r$



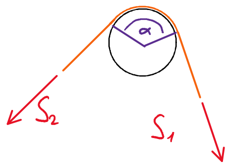


$$\rho = \arctan(\mu) = \arctan\left(\frac{R}{R_N}\right)$$

Seilreibung

Bei $S_2 > S_1$

$$\ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \mu_0 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

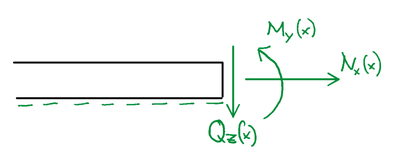
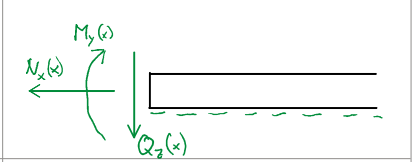


Schnittgrössen

Bezeichnungen

Lasten	Schnittkräfte	Namen
Fx	Nx	Normalkraft
Fy, Fz	Qy, Qz	Querkräfte
Mx	Mx	Torsionskraft
My	My	Biegemoment um die starke Achse
Mz	Mz	Biegemoment um die schwache Achse

Vorzeichenkonvektion

	
Linkes Schnittufer (positives Schnittufer) • An Schnittwirkende Kräfte & Momente werden als positive Grössen in die positive Koordinatenrichtung gezeichnet.	Rechtes Schnittufer (negatives Schnittufer)

Gestrichelte Linie = Unterseite eines Tragwerkteiles
Zugkraft = positiv, Druckkraft = negativ.

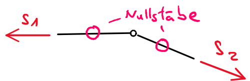
Fachwerk

- Fachwerke sind Tragwerke bestehend nur aus Stäben die sich in gelenkigen Knoten treffen.
- Stäbe sollten nur durch Druck bzw. Zug belastet werden.

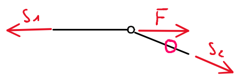
Nullstäbe

- Sind Stäbe die weder auf Zug noch auf Druck belastet sind.
- Dienen nur zum versteifen des Fachwerkes.

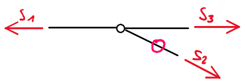
- Regel 1: unbelastete Knoten
  - 2 Stäbe, ungleiche Richtung —> Beide Nullstäbe



- Regel 2: belasteter Knoten
  - 2 Stäbe, Knoten belastet auf Achse von einem Stab, anderer Stab —> Nullstab

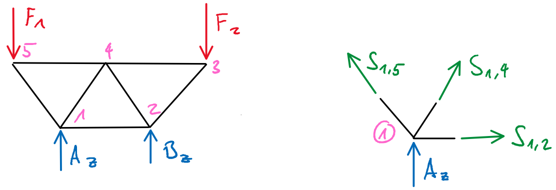


- Regel 3: unbelasteter Knoten mit 3 Stäben
  - 3 Stäbe, 2 auf einer Achse, dritter —> Nullstab



Fachwerke

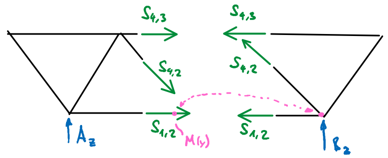
Knotenpunkt- oder Rundschnittverfahren



- Auflagerreaktionen berechnen
- Knoten durchnummerieren
- Nacheinander Knoten freischneiden
  - Angefangen bei Lager
  - Jeweilige Stabkräfte berechnen

Kräfte werden als Zugkräfte eingezeichnet, also von Knoten weg.
Zugkraft = positiv, Druckkraft = negativ.

Ritterschnittverfahren



- Auflagerreaktionen berechnen
- Fachwerk wird mit Schnitt in 2 Teile teilen
  - Schnitt durch drei Stäbe
  - Schnitt durch Stab und Knoten
- Stabkräfte aus Gleichgewicht berechnen

Geht auch bei Raumfachwerken
  - Schnitt durch 6 Stäbe
  - Schnitt durch 3 Stäbe und ein Knoten

Schnittkraftdiagramm

- Tragwerkmodell des Systems
  - Alle äusseren Lasten
  - Alle Lager
- Freikörperbild zeichnen
  - Struktur schematisch
  - Koordinatensystem
  - Lasten
  - Reaktionen
- Reaktionskräfte berechnen
  - Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem
  - $\sum F_x = 0, \sum F_z = 0, \sum M_y = 0$
- Struktur in Bereiche unterteilen
  - Bei Punktlasten, -momente, Gelenken und Auflagern teilen
    - Vor und danach
  - Bei Streckenlasten in 3 Teile teilen
    - Vor, während und danach
- Schnittgrössen in Teilbereichen berechnen
  - Aus Gleichgewichtsbestimmung
  - Als Funktion von Ort ($N_x(x)$, $Q_z(x)$, $M_y(x)$)
  - M_y vorzugsweise an Schnittpunkt
- Schnittkraftdiagramme zeichnen
  - Verlauf der Kräfte und Momente einzeln
  - einzeichnen
  - Beziehung von Last (q), Querkraft (Q) und Biegemoment (M)
    - $M(x) = \int Q(x)dx = \iint q(x)dx$
    - q(x) = const., dann Q(x) = linear und M(x) = quadratisch

$\sum F_x = 0 = A_x \Rightarrow A_x = 0$

$\sum F_z = 0 = F - A_z - B_z$

$\sum M_y = 0 = F \cdot a - B_z \cdot l$

$\Rightarrow B_z = \frac{F \cdot a}{l}$

$\Rightarrow A_z = F\left(1 - \frac{a}{l}\right)$

I: $\sum F_x = 0 = N_x(x)$

$\sum F_z = 0 = Q_z(x) - A_z$

$Q_z(x) = A_z = F\left(1 - \frac{a}{l}\right)$

$\sum M_y = 0 = M_y(x) - A_z \cdot x$

$M_y(x) = F \cdot x \cdot \left(1 - \frac{a}{l}\right)$

II: $\sum F_x = 0 = N_x(x)$

$\sum F_z = 0 = Q_z(x) + F - A_z$

$Q_z(x) = A_z - F = -F \cdot \frac{a}{l}$

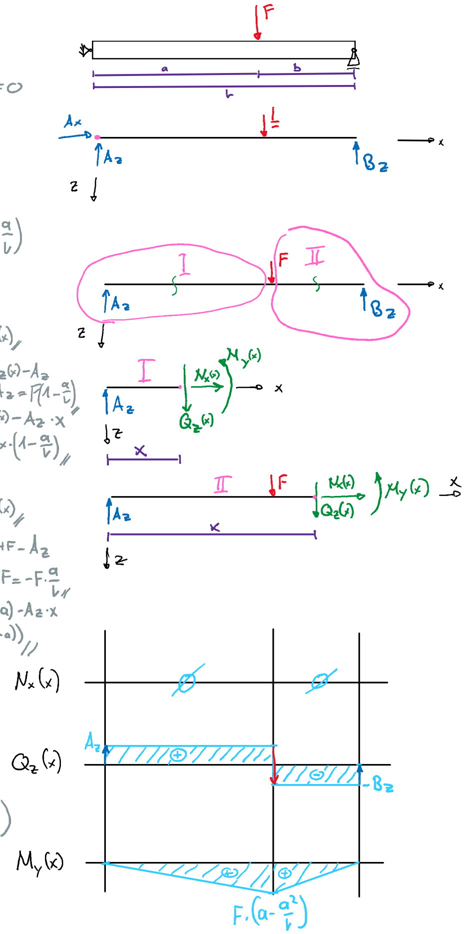
$\sum M_y = M_y(x) + F \cdot (x - a) - A_z \cdot x$

$\Rightarrow M_y(x) = F\left(\left(x - \frac{ax}{l}\right) - (x - a)\right)$

$M_y(x=0) = 0$

$M_y(x=a) = F\left(a - \frac{a^2}{l}\right)$

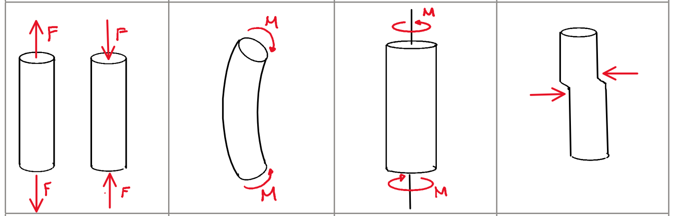
$M_y(x=l) = 0$



Elastizität

Grundbelastungsarten

Zug / Druck	Biegung	Torsion	Scherung
Normalkraft N_x	Biegemomente M_z, M_y	Torsionsmoment M_x	Querkraft Q_z, Q_y



Aus den Schnittkräften und der Querschnittsgeometrie:

Die wirkende Spannung $\sigma = \frac{N_x}{A}$

$A_{seil} = n \cdot \pi \cdot r^2$

Aus Spannung und den Materialeigenschaften:

Die resultierende Dehnung $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N_x}{E \cdot A}$

E = E-modul

Die resultierende Verformungen (u, v)

Die neue x, y Koordinate

Querschnitte und Material so wählen, dass Anforderungen stimmen

Festigkeit: $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zulässig} = \frac{\mathrm{Re}}{S}$ → Streckfaktor → Sicherheitsfaktor

Steifigkeit: $u_{wirkend} \leq u_{zulässig}$

Federsteifigkeit:

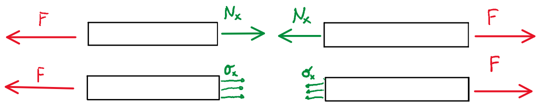
$$c = \frac{E \cdot A}{l}$$

da $N_x = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l$

Dehnsteifigkeit:

$E \cdot A$

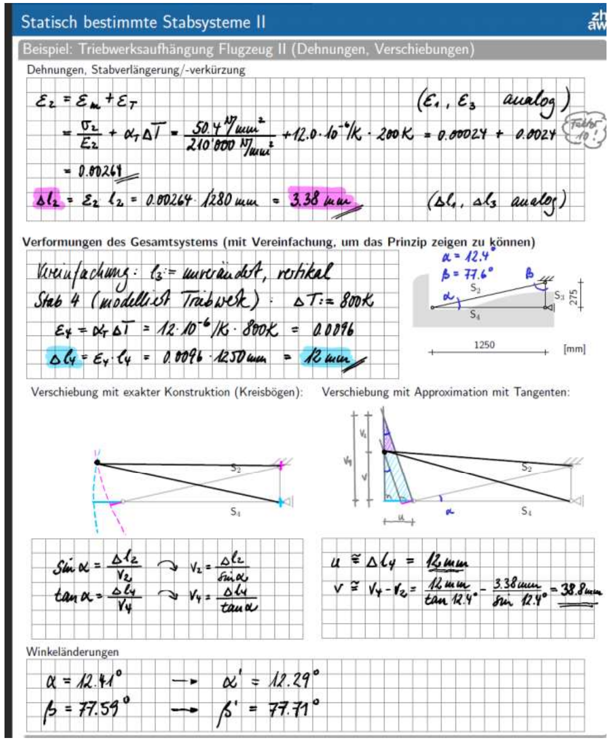
homogen	Isotrop
Gleiche physikalische Eigenschaften: An jedem Ort	Gleiche physikalische Eigenschaften: in jede Richtung

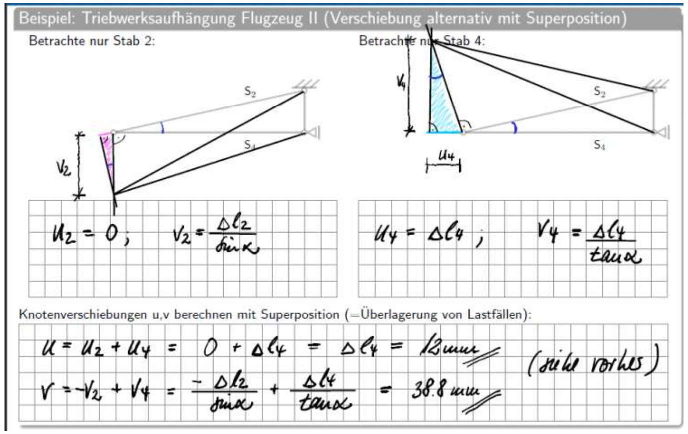


Werkstoff	Dichte ρ $[kg/m^3]$	Fliessspannung σ_y, R_e $[N/mm^2]$	Zugfestigkeit σ_u, R_m $[N/mm^2]$	E-Modul E $[N/mm^2]$	Schubmodul G $[N/mm^2]$	Querkon-traktion ν $[-]$	therm. Aus-dehnung α_T $[K^{-1}]$
Stahl S235	7'800	235	360	210'000	81'000	0.3	$12 \cdot 10^{-6}$
Stahl S355	7'800	355	510	210'000	81'000	0.3	$12 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	2'670	130	220	70'000	26'000	0.33	$23.8 \cdot 10^{-6}$
Schrauben 8.8	-	640	800	210'000	81'000	-	-
Schrauben 10.9	-	900	1'000	210'000	81'000	-	-

Berechnung an Stabsystemen

- Freikörperbild erstellen
  - Lagerreaktionen berechnen
  - Stabkräfte bestimmen (=Schnittgrössen)
- Spannungen in allen Stäben ermitteln
- Dehnung und die Längenänderung jedes Stabes
- Verschiebungsplan erstellen
- Knotenverschiebungen
- Details dimensionieren





Thermische Dehnung

Wenn der Stab sich frei Ausdehnen kann, dann:

$\sigma = 0$

$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$

Mit thermischer Ausdehnungskoeffizienten α_T, $\left[\frac{1}{K}\right]$

Thermische und mechanische Last

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_M + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T$$

$$\sigma_{tot} = E(\varepsilon_{tot} - \alpha_T \cdot \Delta_T)$$