

# FTH3-ZF

csurgphi

## Wärmestrahlung

$\lambda$ : Wellenlänge

$\alpha$ : Absorption

$\tau$ : Transmission

$\rho$ : Reflektion

$$\sigma := 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$T$ : Temperatur [K]

$$C_s := 10^8 \cdot \sigma = 5.67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$i_{\lambda, s}$ : Intensität  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{m}} \right]$

$C_{12}$ : Strahlungsaustauschzahl

## Konvektion

$\lambda$ : Wärmeleitkoeffizient  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$

$\alpha$ : Temperaturleitfähigkeit

$c_p$ : Wärmekapazität  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$

$\rho$ : Dichte

$\delta_w$ : fluid dynamische Grenzschichtdicke

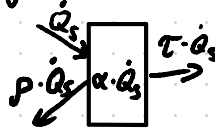
$\delta_T$ : thermische Grenzschichtdicke

$\beta$ : thermischer Ausdehnungskoeff.  $\left[ \frac{1}{\text{K}} \right]$

$\nu$ : kin. Viskosität  $\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$

## Wärmestrahlung

Energiebilanz:  $\alpha + \tau + \rho = 1$



Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz

$$\dot{q}_s = \sigma \cdot T^4$$

$$\dot{q}_s = C_s \left( \frac{T}{100} \right)^4$$

$$\dot{q} = \epsilon \sigma T^4 ; \epsilon = \frac{\dot{q}_s}{\dot{q}} \neq f(\lambda, T)$$

Strahlungsaustausch

$$\dot{Q}_{12} = A_1 C_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

Zwischen zwei konzentrischen Flächen

$$\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} ; C_{12} = \frac{\sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$$

Grenzfälle:

$$\rightarrow \dot{Q}_{12} = A_1 \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$(1) A_1 \ll A_2 \Rightarrow C_{12} = \epsilon_1 \cdot \sigma$$

$$(2) A_1 \approx A_2 \Rightarrow C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Zwischen parallelen 2 Platten:

$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Lambert'sches Cosinus-Gesetz (bei Winkeln)

$$i_u = i_n \cdot \cos \varphi \quad \dot{q}_\varphi = \dot{q}_n \cdot \cos \varphi$$

Strahlungsaustausch zwischen 2 Flächen

$$\dot{Q}_{12} = \epsilon_1 \epsilon_2 \sigma \psi_{12} A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

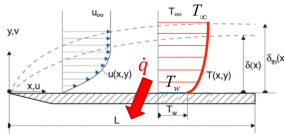
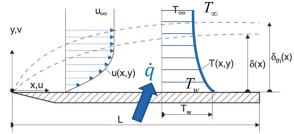
$$\psi_{12} = \frac{1}{A_1} \cdot \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

$$\psi_{21} \cdot A_1 = \psi_{12} A_1 ; \sum_{k=1}^n \psi_{ik} = 1$$

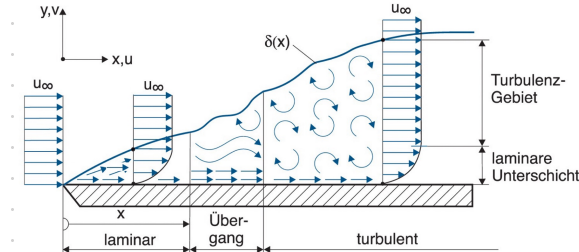
# Konvektion → Erzwungene Konvektion

Platte kühlt ab:  $T_w > T_\infty$

Platte wird aufgewärmt:  $T_w < T_\infty$



## Grenzschicht



Platten:  $Re_{krit} \approx 5 \cdot 10^5$  Rohr:  $Re_{krit} \approx 2300$

## Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho u_\infty L}{\eta} = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{F_r}{F_R} \quad \begin{matrix} \text{Trägheit} \\ \text{Reibung} \end{matrix}$$

$$F_r = m \cdot a \sim \rho \cdot L^3 \cdot \frac{u_\infty^2}{L}$$

$$F_R = \mu \cdot A \frac{dw}{dy} \sim \eta \cdot L^2 \frac{u_\infty}{L}$$

## Charakteristische Länge:

- Platte: Umströmte Länge  $x$
- Rohr: Kreisquerschnitt Durchmesser  $D$
- Rohr: beliebiger Querschnitt:  $d_h = \frac{4 \cdot A}{U}$
- Umströmte Kugel/Zylinder: Durchmesser  $D$

## Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

$$\text{Geschätzt: } \frac{\delta_T}{\delta_w} = \frac{1}{\sqrt{Pr}} \rightsquigarrow Pr = \left( \frac{\delta_w}{\delta_T} \right)^2$$

Bei Platten:

$$\text{Laminar: } \delta_w = \frac{4.91 x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\text{Turbulent: } \delta_w = \frac{0.37 x}{Re_x^{1/5}}$$

- Aus den dimensionslosen Erhaltungsgleichungen sieht man sofort, dass
- zwei Strömungen **fluidodynamisch** identisch sind, wenn die Reynolds-Zahlen gleich sind
  - zwei Strömungen **thermisch** identisch sind, wenn das Produkt aus Reynolds-Zahlen und Prandtl-Zahlen identisch ist
  - Zwei Strömungen **fluidodynamisch und thermisch** identisch sind, wenn Reynolds-Zahlen und Prandtl-Zahlen identisch sind
  - In allen anderen Fällen sind die Strömungen physikalisch unterschiedlich

## Péclet-Zahl (erzwungene Konv. ↔ Wärmetransport)

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{\rho u_\infty L}{\eta} \cdot \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} = \frac{u_\infty L}{\alpha}$$

## Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = \frac{\dot{q}_{konv}}{\dot{q}_{wL}} \quad \nabla \lambda \text{ des Fluids}$$

$$\text{bei } \alpha \sim \frac{\lambda}{\delta_{th}} \Rightarrow Nu \sim \frac{L}{\delta_{th}}$$

## Grashof-Zahl (Verhältnis Antriebskraft ↔ Reibungskraft)

$$Gr = \frac{\rho \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot L^3}{\nu^2} = \frac{F_A}{F_R}$$

## Rayleigh-Zahl

$$Ra = \frac{\rho \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot L^3}{\nu \cdot \alpha} = Gr \cdot \frac{\nu}{\alpha} = Gr \cdot Pr$$

## WÜK berechnen → erzwungene Konv.

1. Passende Berechnungsvorschrift (angeströmte Platte, Rohr, umströmter Körper, ...) für das Anwendungsproblem suchen
2. Charakteristische Länge  $L$  bestimmen. Viskosität für die Temperatur des Fluids, je nach Fall entweder  $\vartheta_\infty$  oder  $\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ , ermitteln. Mit Reynolds-Zahl die Strömungsform (laminar, turbulent, Übergangsbereich) bestimmen.
3. Berechnungsformel für Nusselt-Zahl bestimmen  $Nu = f(Re, Pr)$  \*
4. Benötigte dimensionslose Kennzahlen ( $Pr, Pe$ ) berechnen. Stoffdaten ( $\lambda, \nu, c, \alpha, \dots$ ) für die Temperatur des Fluids, je nach Fall entweder  $\vartheta_\infty$  oder  $\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ , ermitteln
5. Nusseltzahl  $Nu$  anhand der Berechnungsvorschrift ermitteln. Falls nötig Temperaturkorrektur anwenden.
6. Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  berechnen aus  $\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{L}$
7. Wärmestromdichte oder mittlere Wandtemperatur aus  $\dot{q} = \alpha (\vartheta_w - \vartheta_\infty)$  bzw.  $\dot{q} = \alpha \Delta \vartheta_m$  berechnen (für Wärmestrom mit Fläche durch die die Wärme geht multiplizieren)

## WÜK berechnen → natürliche Konv.

→ Analog zu erz. Konv. außer \*

$$Nu = f(Gr, Ra)$$

# Natürliche Konvektion → Fälle

Vertikale Wand

$g \rightarrow$  Mittlere Nusselt-Zahl

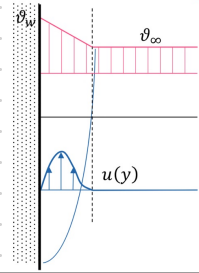
$$Nu_m = [0.825 + 0.387 \cdot (Ra \cdot f_1(Pr))^{1/4}]^2$$

$$f_1(Pr) = [1 + (\frac{0.492}{Pr})^{9/16}]^{16/9}$$

Gültigkeitsbereich:

$$0.007 < Pr < \infty$$

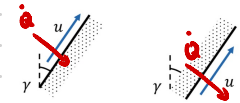
$$0.1 < Ra < 10^{12}$$



Schräge Wand

Keine Grenzschichtablösung

$$Ra_\gamma = Ra \cdot \cos \gamma \quad *$$



mit Grenzschichtablösung

↓

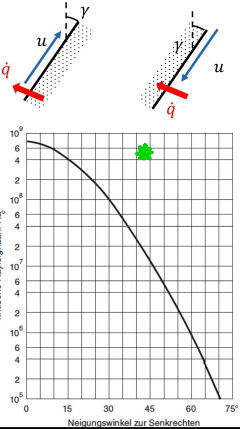
1.  $Ra$  vermindern

2.  $Ra$  mit  $Ra_c$  vergl. \*

3a. ist  $Ra > Ra_c$  dann:

$$Nu_m = 0.56 \cdot \sqrt[3]{Ra_c \cdot \cos \gamma} + 0.13 \cdot (\sqrt[3]{Ra} - \sqrt[3]{Ra_c})$$

3b. ist  $Ra < Ra_c$  gilt \*



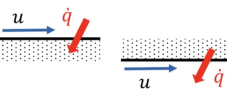
Laminare St.  $Ra \cdot f_2(Pr) \leq 7E4$

$$Nu_m = 0.766 \cdot (Ra \cdot f_2(Pr))^{1/3}$$

Turbulente St.  $Ra \cdot f_2(Pr) > 7E4$

$$Nu_m = 0.15 \cdot (Ra \cdot f_2(Pr))^{1/3}$$

$$f_2(Pr) = [1 + (\frac{0.322}{Pr})^{7/4}]^{4/9}$$



Laminare Strömung  $10^3 < Ra \cdot f_1(Pr) < 10^{10}$

$$Nu = 0.6 (Ra \cdot f_1(Pr))^{1/4}$$

$$f_1(Pr) = [1 + (\frac{0.492}{Pr})^{9/16}]^{16/9}$$

Gültigkeit:

$$10^3 < Ra \cdot f_1(Pr) < 10^{10}$$

Horizontaler Zylinder/gekrümmte Fläche

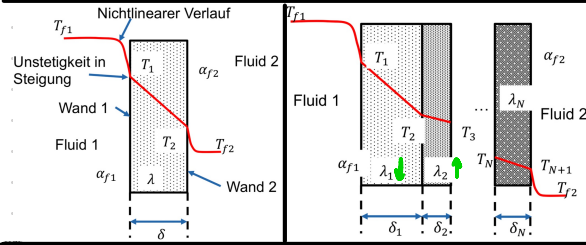
$$Nu = [0.752 + 0.387 \cdot (Ra \cdot f_3(Pr))^{1/4}]^2$$

$$f_3(Pr) = [1 + (\frac{0.559}{Pr})^{7/4}]^{4/9}$$

$$\text{char. Länge } L = \frac{D}{2} \cdot \pi$$

# Wärmeleitung

$$\frac{\Delta T}{\delta} \sim \frac{1}{\lambda}$$



Kopplungs bed. ( $\dot{Q} = \text{konst.}$ )

$$\dot{Q} = A \cdot \alpha_{f1} (T_{f1} - T_1) \quad [W]$$

$$= A \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2)$$

$$= A \alpha_{f2} (T_2 - T_{f2})$$

$$= k A (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{\Delta T_f}{R_{ges}}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{f2}}, \quad R_{ges} = \frac{1}{kA}$$

Mehrere Platten in Reihe

$$R_{ges} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)$$

$$= \sum_j R_j \quad (\text{Reihenschaltung})$$

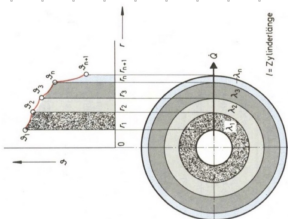
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_{f2}} + \sum_n \frac{\delta_n}{\lambda_n}$$

$$R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots} \quad (\text{Parallelschaltung})$$

Mehrschichtiger Zylinder

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^N R_i = \frac{1}{k_a A_a}$$

$$\frac{1}{k_a} = \frac{d_{i+1}}{d_i} \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_{i+1}}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \ln \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \right) + \frac{1}{\alpha_{f2}}$$



# instationäre Wärmeleitung

Biot-Zahl:  $Bi = \frac{\alpha \cdot s}{\lambda}$  (Wirk alpha)

Fourier-Zahl:  $Fo = \frac{a \cdot t}{s^2}$  (Temp.leitfähigkeit 'a')

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$

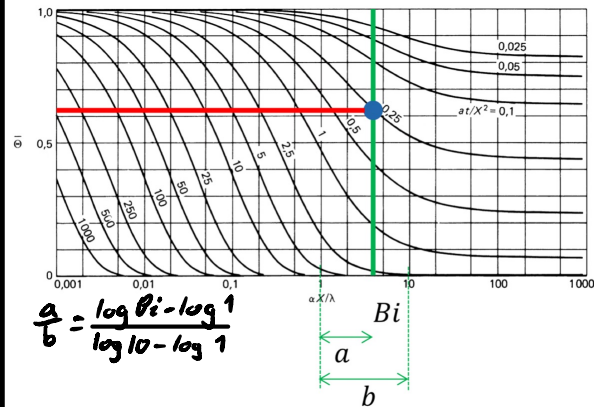
Beidseitig best.:  $s = \frac{D}{2}$  Kugel:  $s = R$   
Platte

Dimensionslose Temp:

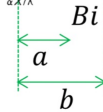
$$\Theta_0 = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}}, \quad \Theta_M = \frac{\vartheta_M - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}}, \quad \bar{\Theta} = \frac{\bar{\vartheta} - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}}$$

Wärmemenge an einem Zeitpunkt:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot (\vartheta_A - \bar{\vartheta}(t))$$



$$\frac{q}{b} = \frac{\log Bi - \log 1}{\log 10 - \log 1}$$



# Wärmeleitung

$\alpha$ : Wärmeübergangskoeffizient  $[\frac{W}{m^2 K}]$

$\dot{m}$ : Massenstrom  $[\frac{kg}{s}]$



# Wärmetauscher

$$\dot{Q} = k A \Delta \vartheta_m$$

Gegenstrom  
 $\Delta \vartheta_m$ : log Temp.koeff.

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\Delta \vartheta_{ke} - \Delta \vartheta_g}{\ln \left( \frac{\Delta \vartheta_{ke}}{\Delta \vartheta_g} \right)}$$



$$\dot{Q} = k A \Delta \vartheta_m$$

$$\dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1' = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1''$$

$$\dot{m}_2 c_{p2} \vartheta_2'' = \dot{m}_2 c_{p2} \vartheta_2'$$

• Ad'abat:  $\rightarrow = \leftarrow$

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (\vartheta_1' - \vartheta_1'') = \dot{m}_2 c_{p2} (\vartheta_2'' - \vartheta_2')$$

Dimensionslose Kennzahlen:

$$P_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}$$

$$\Theta = \frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}$$

$\Theta$ : dimensionslose Temp

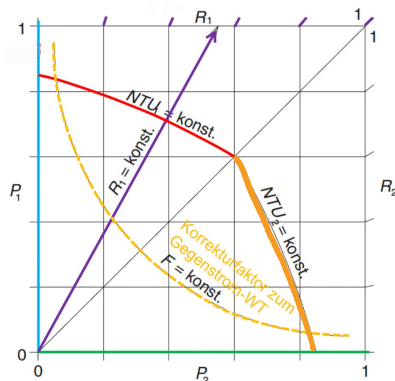
$$NTU_1 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\Delta \vartheta_m} = \frac{k \cdot A}{\dot{w}_1}$$

$$NTU_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\Delta \vartheta_m} = \frac{k \cdot A}{\dot{w}_2}$$

$$R_1 = \frac{\dot{w}_1}{\dot{w}_2} = \frac{1}{R_2}$$

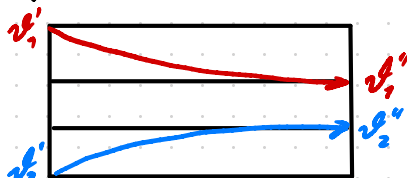
$$\dot{w}_i = \dot{C}_p \cdot \dot{m}_i$$

| Stromführung                                 | $P = f(NTU, R)$                                                                                                       | $NTU = f(P, R)$                                                                      | $\Theta = f(P_1, P_2)$                                                       | Grenzcurve                                                                         |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Reiner Gegenstrom $i = 1, 2$<br>$R_i \neq 1$ | $P_1 = \frac{1 - \exp(-(R_1 - 1)NTU)}{1 - R_1 \exp(-(R_1 - 1)NTU)}$<br>$P_2 = \frac{P_1}{1 + NTU}$<br>$R_1 = R_2 = 1$ | $NTU = \frac{1}{1 - R_1} \ln \frac{1 - R_1 P_1}{1 - P_1}$<br>$NTU = \frac{P}{1 - P}$ | $\Theta = \frac{P_1 - P_2}{\ln \frac{1 - P_2}{1 - P_1}}$<br>$\Theta = 1 - P$ | $P_{\max} = \begin{cases} 1; & R_1 \leq 1 \\ \frac{1}{R_1}; & R_1 > 1 \end{cases}$ |
| Reiner Gleichstrom $i = 1, 2$                | $P_1 = \frac{1 - \exp(-NTU(1 + R_1))}{1 + R_1}$                                                                       | $NTU = \frac{-\ln[1 - P(1 + R_1)]}{1 + R_1}$                                         | $\Theta = \frac{-(P_1 + P_2)}{\ln[1 - (P_1 + P_2)]}$                         | $P_{\max} = \frac{1}{1 + R_1}$                                                     |

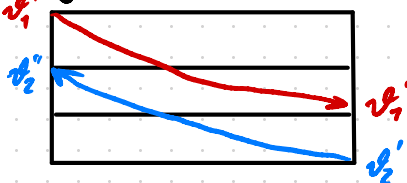


↳ beschreibt Betriebscharakteristik

## Gleichstrom

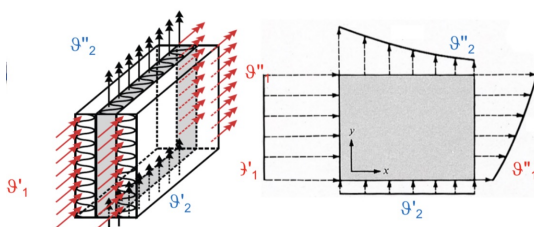


## Gegenstrom



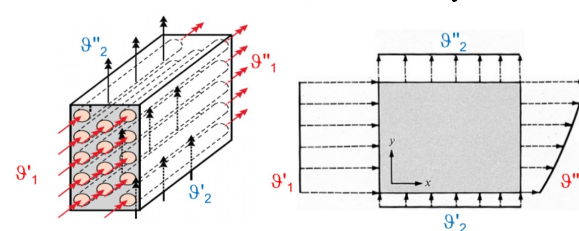
## Kreuzstrom

Rein (Kompaktwärmeübertrager)  
 - Beide Stoffströme unvermischt



## Vermischt (Rohrbündel)

- Strom 1 unvermischt, Strom 2 gemischt



## Beidseitig vermischt (Plattenübertrager)

## Rippen

Temperaturverlauf in den Rippen

$$\frac{\Delta \vartheta(x)}{\Delta \vartheta_0} = \frac{\cosh(m \cdot (L-x))}{\cosh(m \cdot L)}$$

$\Delta \vartheta_0$ : Differenz von Anfang zur Umgebung

$U$ : Umfang ( $\Gamma$ );  $A$ : Querschnittsfläche

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Gute Rippen:} \cdot \text{Fläche } A \uparrow \\ \cdot \text{Wärmeleitkoeff. } \lambda \uparrow \end{array}$$

Temp. am Ende der Rippe:

$$\vartheta(x=L) = \vartheta_f + \frac{\Delta \vartheta_0}{\cosh(m \cdot L)}$$

Übertragener Wärmestrom

$$\dot{Q}_{\text{tot}} = \dot{Q}_x(x=0) = \lambda \cdot A \cdot \Delta \vartheta_0 \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$$

$\alpha$ : Strömungszustand

$A, U, L$ : Rippergeometrie

$$\text{Wirkungsgrad: } \eta_r = \frac{\dot{Q}(x=0)}{\dot{Q}_{\text{ideal}}} = \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L}$$