Polynome+Basis

Potenzgesetze

$a^r \times a^s = a^{r+s}$

$a^r \div a^s = a^{r-s}$

$a^r \times b^r = (ab)^r$

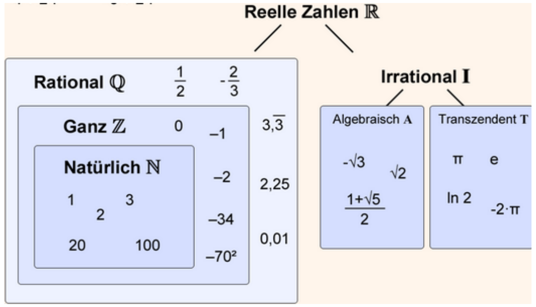
$a^r \div b^r = \frac{a^r}{b}$

$(a^r)^8 = a^{r\times 8}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$

$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

Mengen



Skizzieren

1. Nullstellen eintragen
2. Bei Nullstellen lokale Approximation einzeichnen und Verbinden:

Bsp: $p(x) = 2(x+1)^2 \times (x+2)$

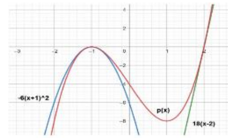
Bei $x_1 = -1 \Rightarrow 2(-1+1)^2 \times (-1+2)$,dominiert, Parabel

Bei $x_2 = 2 \Rightarrow 2(2+1)^2 \times (2-2)$,dominiert, gerade

Dabei asymptotisches Verhalten beachten, hier

Dominiert bei grossen x: $2x(x+1)^2 \Rightarrow$"s" funktion

weil es die Höchste Potenz hat.



Intervalle

Es gilt [=) und] = (

Abgeschlossen: [1,3] =1,2,3

Offen: (1,3) = 2 gleich wie]1,3[

Halboffen: [1,3) =1,2

Unendlich: [a,∞)

Wurzelgesetze

Wenn a und b > 0:

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[s\times r]{a}$

$(\sqrt[r]{a})^s = \sqrt[r]{a^s}$

Logarithmusgesetze

$\log_a P = \frac{\log P}{\log a}$

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

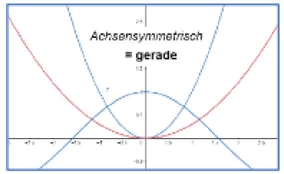
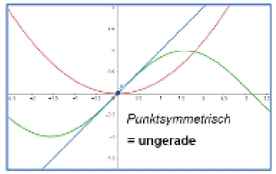
$\log_b(P \times Q) = \log_b P + \log_b Q$

$\log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$

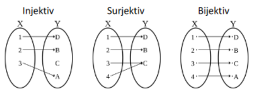
$\log_b P^n = n \times \log_b P$

$\log_b \sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{n}$

Quadrat vs. Polynomfunktion

	Quadrat	Polynom
Funktion	$y = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a_n(x-x_1)\dots(x-x_n)$
Nullstellen	Umformen oder Mitternachtsfor. $1.\, y = a(x-x_1)(x-x_2)$ $2.\, x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	**Faktor Zerlegung**: $(x+1)(x-2)(x+3), bei -1,2 und -3$ **Ausklammern**:$2x^4 - 6x^3 - 8x^2 \Rightarrow x^2(2x^2 - 6x - 8)$Eine Nullstelle ist 0, dann wie bei Quadrat Funktion rechnen. **Polynomdivison**: Ausprobieren bis 1 Wert gefunden wurde, Division mit (x-Wert),wie bei Quad. $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 \Rightarrow 1^3 + 3 \times 1^2 - 16 \times 1 - 12 = 0$
Scheitelpunkt	$S = \left(-\frac{2}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ $Wenn\ y = x^2 + bx + c:$ $S = (-\frac{b}{2}; -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c)$	Siehe Integral  

Funktionen



Komposition: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Symmetrie:

- Gerade $f(-x) = f(x)$
- Ungerade $f(-x) \neq f(x)$

Monoton:

- wachsend $f(x_1) \leq f(x_2),\ streng\ <$
- fallend $f(x_1) \geq f(x_2),\ streng\ >$

Konvergent: Grenzwert existiert

Divergent: Kein Grenzwert oder Unendlich

Umkehrfunktion Nur wenn streng monoton und bijektiv

Bsp: $y = 3x - 5 \Rightarrow y - 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

Polynomdivison

$(5x^2 + 3x - 12) \div (x - 4) = 5x + 23 + \frac{80}{x-4}$

$\underline{-(5x^2 - 20x)}$

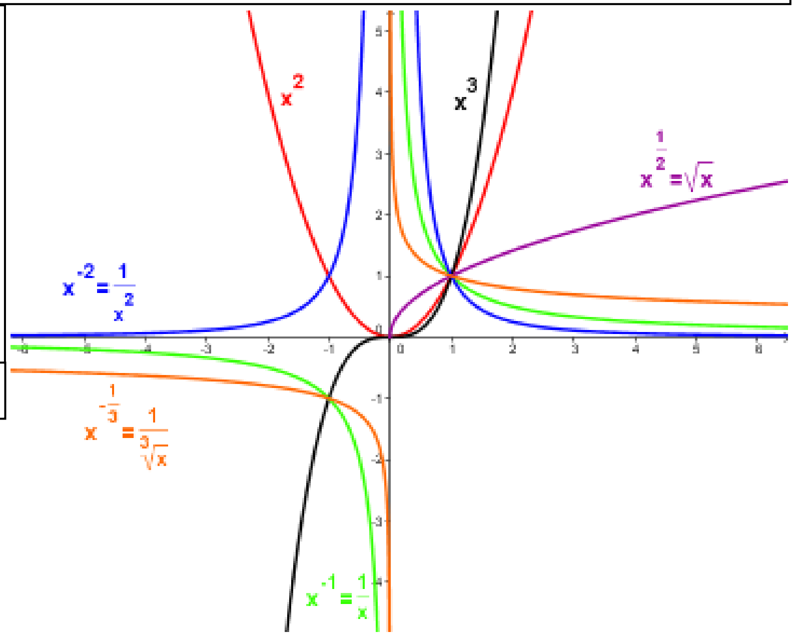
$23x - 12 \quad (x\ mit\ 23 *)$

$-(23x - 92)$

$80 \quad (durch\ x - 4)$

1. x mit was * um $5x^2$ zu erhalten? = 5x, mit x-4 * für $-5x^2 - 20x$ und abziehen

Schritt 1 wiederholen mit $23x - 12$ bis zum letzten Term



Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$a^x = b$

$x = \log_a b$

Nat. Log

$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

$\ln x^n = n \cdot \ln x$

$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$

$a^{\frac{b}{c}} = e^{\frac{\ln(a)}{c} \cdot b}$

Ableitung+Integration

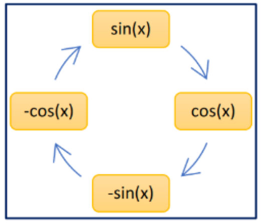
Ableitung

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$5\,;\,1\,;\,10$	0
e^{ax}	$a \cdot e^{ax}$	e^{7x}	$7e^{7x}$
ax^p	$p \cdot ax^{p-1}$	$5x^3\,;3x^2\,;3x$	$15x^2\,;6x;3$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$3a^{7x}$	$21a^{7x} \cdot \ln(a)$
$c \cdot \ln(ax+b)$	$ac \div (ax+b)$	$\ln 4x\,;\ln x$	$1 \div x$
$b \cdot \cos(ax)$	$-ab \cdot \sin(ax)$	$b \cdot \sin(ax)$	$ab \cdot \cos(ax)$
$b \cdot \tan(ax)$	$\frac{a \cdot b}{((\cos(ax))^2)}$	$b \cdot \sin^{-1} ax$	$\frac{a \cdot b}{\sqrt{1-a^2 \cdot x^2}}$
$b \cdot \tan^{-1} ax$	$\frac{a \cdot b}{a^2 \cdot x^2 + 1}$	$b \cdot \cos^{-1} ax$	$-\frac{a \cdot b}{\sqrt{1-a^2 \cdot x^2}}$
$\sqrt[b]{ax}$	$\frac{\sqrt[b]{a} \cdot x^{\frac{1}{b}-1}}{b}$	$\sqrt[5]{3x}$	$\frac{\sqrt[5]{3} \cdot x^{\frac{1}{5}-1}}{5}$
$\sqrt{ax}$	$1 \div (2 \cdot \sqrt{ax})$	$\sqrt{3x}$	$1 \div (2 \cdot \sqrt{3x})$
$\log_b ax$	$\frac{1}{x \cdot \log_{10} b}$	$\log_2 4x$	$1 \div (x \cdot \log 2)$
x^x	$x^x \cdot (\ln x + 1)$	$(ax)^{bx}$	$b(ax)^{bx} \cdot (\ln(ax)+1)$
$\frac{a}{b} * \sqrt{cx^d \pm fx^h}$	$\frac{a(cdx^d - fhx^h)}{2bx\sqrt{cx^d - fx^h}} = \frac{a(cdx^{d-1} - fhx^h - 1)}{2b\sqrt{cx^d - fx^h}}$		

Umkehrfunktion: $(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$f(x) = \tan($ … $)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$

$f(x) = \cot(x)$ … $)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$



Rechenregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \times v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel: $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

Bestimmtes Integral

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

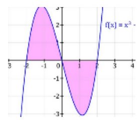
$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_0^a f(x)dx = F(a)$$

Fläche von Kurve berechnen

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4$ Nullstellen sind -2 und 2

Berechnung: $\int_{-2}^{2} -x^2 + 4\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$

Wenn es das Vorzeichen wechselt: $f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow \int_{-2}^{0} \ldots + \int_{0}^{2} \ldots$



Flächen zwischen zwei Kurven berechnen

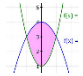
1. Schnittpunkte berechnen
2. Integral von f(x)-g(x) aufstellen und berechnen

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2x^2 + 1$

Schnittpunkte: -1 und 1

$f(x) - g(x) = -x^2 + 4 - (2x^2 + 1) = -3x^2 + 3$

$\int_{-1}^{1} -3x^2 + 3\,dx = [-x^3 + 3x]_{-1}^{1} = 4$



Krümmung und Monotonie

$f''(x_0) > 0$ Streng monoton wachsend, konvex = links gekrümmt

$f''(x_0) > 0$ Streng monoton fallend, konkav = rechts gekrümmt

$f''(x_0) = 0$ Horizontale Tangente, Keine eindeutige Krümmung

Integralregeln

- $\int f(x-k)\,dx \quad = F(x-k) + C$
- $\int f(x \cdot k)\,dx \quad = \frac{1}{k}F(x \cdot k) + C$
- $\int \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\,dx \quad = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$

Tangentenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Stammfunktion

Wenn dann die Stammfunktion(F) von f ableitet dann bekommt man die normale Funktion.

$f(x)$ (Integrand)	$F(x)$ (Stammfunktion)
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
e^x	$e^x + C$
α^x	$\frac{\alpha^x}{\log(\alpha)} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C$

Relative Extrema

Relative Extremal-**Stelle**: x_0, -**Punkt**: $P_0 = (x_0, y_0)$, **Extremum**: y_0

Berechnung: $f'(x_0) = 0\ und\ f''(x_0) \neq 0$, für x_0:f' nach 0 aufl.

Für Hochpunkt gefundenes x_0 in Originalfunktion einsetzen

Typenbestimmung: $f''(x_0) > 0 = Minimun$

$f''(x_0) < 0 = Maximum$

Unbestimmtes Integral

Potenzfunktionen

- $\int (x^\alpha)\,dx \quad = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
- $\int \left(\frac{1}{x}\right)dx \quad = \ln|x| + C$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- $\int (e^x)\,dx \quad = e^x + C$
- $\int (a^x)\,dx \quad = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int (\ln(x))\,dx \quad = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int (\log_a(x))\,dx \quad = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

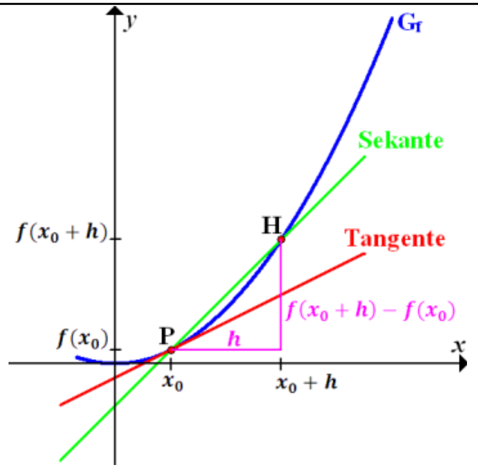
Geometrische Funktionen

- $\int (\cos(x))\,dx \quad = \sin(x) + C$
- $\int (\sin(x))\,dx \quad = -\cos(x) + C$
- $\int (\tan(x))\,dx \quad = -\ln|\cos(x)| + C$

Weitere Funktionen

- $\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx \quad = \arctan(x) + C$
- $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx \quad = \arcsin(x) + C$
- $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx \quad = \arccos(x) + C$

Menge aller Stammfunktion +C nötig



Sekantensteigung und Tangente

Sei f eine Funktion von $[x_0, x_0 + h]$ im Definitionsbereich von f. Ist der Differenzenquotient von f:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tangente:$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Grenzwert

Grenzwert

- Jede monoton wachsende und nach oben beschränkter oder monoton fallend und nach unten beschränkte, Folge reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert.
- Folge x_n *mit* $x_n \to x_0$ *für* $n \to \infty$ *aber alle* $x_n \neq x_0$
- Die Funktion y = f(x) hat an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0, falls Für jede Folge (x_n) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$
- Für jede solche Folge muss derselbe Grenzwert y_0 berechnet werden, sonst kann der Grenzwert nicht berechnet werden.
- Die Funktion f(x) muss an der Stelle x_0 nicht definiert sein

Konvergenz: Funktion **mit** Grenzwert $x \to \infty$
Divergenz: Funktion **ohne** Grenzwert $x \to \infty$
Bestimmte Divergenz: Funktion mit $\lim\limits_{x\to\uparrow\infty} f(x) = \pm\infty$

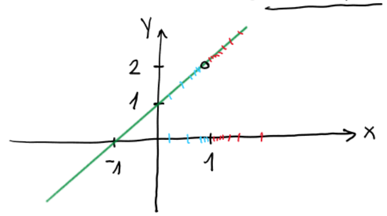
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2}{4n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^3}\cdot\left(4+\frac{2}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}}{4+\underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\to 0}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bei Brüchen mit Polynomen im Nenner und Zähler gilt:
Zählergrad < Nennergrad heisst Grenzwert = 0
Zählergrad > Nennergrad heisst Grenzwert = -∞ oder +∞
Zählergrad = Nennergrad heisst Grenzwert = $\frac{\textit{führender Term}}{\textit{führender Term}}$

Bsp: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x_0 = 1$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \neq 1 \\ \text{nicht definiert}, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$



⇒ aus der Skizze:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (existiert, obwohl f(1) nicht definiert ist).

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Kürzen ist erlaubt, da x immer ≠ 1 ist, nur "beliebig nahe" von 1

Monoton wachsend und Beschränktheit beweisen

Beispiel: $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

Monoton wachsend:

1. Strategie: $a_{n+1} - a_n \geq 0$
2. Strategie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Im Bsp: $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2-1}{n^2+1} \geq 0$

Beschränktheit:
Nach **unten** beschränkt: Es gibt einen wert $s \in \mathbb{R}$ *dass* $f(x) \geq s$ für alle $x \in D$. D = Definitionsmenge der Funktion. s ist dann die untere Schranke von f.
Nach **oben** beschränkt: $s \in \mathbb{R}$ *dass* $f(x) \leq s$ für alle $x \in D$
Alle zahlen die grösser/kleiner als s sind, sind auch Schranken = es gibt unendlich Schranken.
Beschränkt: Es gibt eine zahl $r \in \mathbb{R}$ *die* $|f(x)| \leq r$

Rechenregeln mit Limes

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) - \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (q < 1)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)} + \sqrt{b(n)}$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}{1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2+n)} - \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} - \sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Beispiel Grenzwert

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$
1	0	1
2	0.5	1.5
3	0.66	1.66
4	0.75	1.75
5	0.8	1.8
10	0.9	1.9
100	0.99	1.99
1000	0.999	1.999
$n \to \infty$	$x_0 = 1$	2

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$

- k = höchste Potenz

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0+0}$$

Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$

- k = höchste Potenz
- a = grösste Basis

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3\cdot 3^n+2^n}{3^n+2} = \frac{\frac{3\cdot 3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2}{3^n}}$$

$$\frac{3+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0}$$

Erweitern zu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

$4n = \frac{3n}{2} \cdot a$

$a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}$

Stetigkeit

Die Kurve macht keine Sprünge und man kann sie Zeichnen, ohne den Stift abzusetzen

Differenzierbar

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Existiert, so heisst f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als *Ableitung*

Eine Funktion ist *differenzierbar, falls*

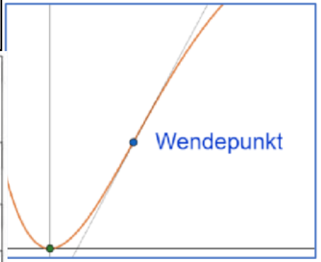
- Die Kurve keine Knicke macht

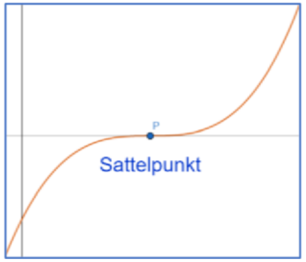
Graph von f				
f wächst/fällt	☒ wächst ☐ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Krümmung von f	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links	☐ rechts ☒ links	☒ rechts ☐ links
f' wächst/fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt	☒ wächst ☐ fällt	☐ wächst ☒ fällt
Vorzeichen von f''	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

Wende-/Sattelpunkte

Definition

Punkt an dem sich der Drehsinn ändert:





Berechnung

Grundbedingung: x_0 $durch$ $f''(x) = 0$

Wendepunkt: zusätzlich $f'''(x) \neq 0$

Sattelpunkt: Wendepunkt + $f'(x) = 0$

Vorgehen

1. Erste 3 Ableitungen bestimmen
2. 2te Ableitung gleich 0 setzen und nach x_0 auflösen
3. Prüfen ob $f'''(x_0) \neq 0$

- Wenn $\neq$ 0 ist x_0 sicher ein Wendepunkt, x_0 in original Funktion einfügen um y Wert zu erhalten.

- Wenn = 0, ist vielleicht ein Wendepunkt. Dann muss man einen Wert links(z.B. -1) und rechts(z.B. 1) mit f'' berechnen. **Wenn die Vorzeichen unterschiedlich sind = Wendepunkt, sonst nicht.**

- Falls es einen Wendepunkt noch überprüfen ob $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **dann ist es ein Sattelpunkt**

Sei n die Ordnung der *ersten nicht verschwindenden Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x_0.

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Wenn n gerade, dann gibt es ein relatives Extremum $\left(f^{(n)}(x_0) \neq 0\right)$

Wenn n ungerade, dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt und damit einen Sattelpunkt.

Reihen

$$S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

Arten

Arithmetische Folge	Geometrische Folge
$a_k = (2,3,4,5,\ldots) \to d = 1, A = 2$	$a_k = \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right) \to q = \frac{1}{2}, A = 1$
N-tes Glied $a_n = A + (n-1) \cdot d$	N-tes Glied $a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$
Mittelwert $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$	Mittelwert $\lvert a_k \rvert = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$
Partial-Summe $S_n = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2} = n \cdot (A + \frac{n-1}{2} \cdot d)$	Partial-Summe $S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

Definition

$n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$

$(a_k) = (a_k)_{k\geq 1}(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$

A = Anfangsglied

d = Differenz

q = Quotient

Unendliche geometrische Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} A q^{k-1} = \frac{A}{1-q}$$

Bedingung

- $|q| < 1$

Beispiel

$$a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \ldots = 14$$

- $q = \frac{1}{2} \to$ Die Reihe *konvergiert*
- $S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$

Grenzwert

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat einen *Grenzwert / Limes* falls die Zahl $a \in \mathbb{R}$ jede noch so kleine Umgebung des Grenzwertes erreicht und nicht mehr verlässt.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: |a_n - a| < \epsilon$$

• Folgen mit Grenzwert	*Konvergent*	$a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots)$
• Folgen ohne Grenzwert	*Divergent*	$a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \ldots)$
• Beliebig gross (∞) / klein ($-\infty$)	*bestimmt divergent*	$a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \ldots)$

Eine Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert!

Kurvendiskussion

Monotonie Untersuchung

Schauen wo die Ableitung negativ und positiv ist. Beispiel: $x^3 - 9x$

1. Ableitung berechnen und nach 0 auflösen $f(x)' = 3x^2 - 9 = 0$
2. Monotone Abschnitte sind $(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$

Extremwertprobleme

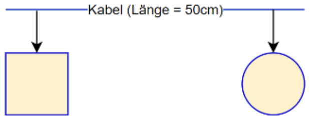
Vorgehen

- Zielfunktion f und Definitionsbereich D
- Falls f eine Funktion von 2 Variablen, $f(x, y)$
  - ➢ Nebenbedingungen in $f(x, y)$ einsetzen
- Gleichung $f'(x) = 0$ lösen
  - ➢ relative Extrema im innern des Intervals I finden
- Bestimmung des gesuchten Maximums/Minimums durch Vergleich der Funktionswerte an den relativen Extremalstellen sowie an den Randpunkten des Intervalls.

<u>Beispiel</u>

Zielfunktion

- $A_{Max} = A_{Quadrat} + A_{Kreis}$
- $A_{Quadrat} = s^2$
- $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$



$$U_{Quadrat} + U_{Kreis} = 50cm$$

$$A_{Quadrat} + A_{Kreis} \rightarrow Maximal$$

Nebenbedingungen

- $U_{Quadrat} = 4s \quad \rightarrow s = \frac{U_Q}{4}$
- $U_{Kreis} = 2r\pi \quad \rightarrow r = \frac{U_K}{2\pi}$
- $U_Q = 50 - U_K \quad \rightarrow r = \frac{50-U_Q}{2\pi}$

Nebenbedingungen einsetzen

- $A_{Max}(r, s) = s^2 + r^2 \cdot \pi$
- $A_{Max}(U_Q) = \left(\frac{U_Q}{4}\right)^2 + \left(\frac{50-U_Q}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi$

Erste Ableitung $f'(x) = 0$

- $A'(U_Q) = \frac{U_Q}{8} + \frac{25}{\pi} + \frac{U_Q}{2\pi}$
- $A'(U_Q) = 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{U_Q \approx 28}$

Zweite Ableitung $f''(x)$

- $A''(U_Q) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \rightarrow relative\ Minimalstelle$

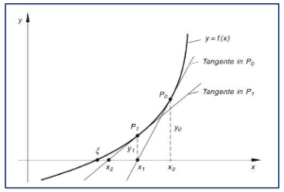
Newton – Tangenten Verfahren

Sukzessive Approximation der Funktionskurve $y = f(x)$ durch Tangenten, deren Schnittpunkt mit der x-Achse problemlos berechnet werden kann. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

Algorithmus

Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

- ➢ Startwert x_0 nahe bei ξ wählen
- ➢ Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



<u>Beispiel</u>

- Gleichung $x = e^{-x}$
- Startwert $x_0 = 0.5$

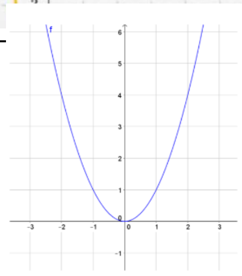
1. Gleichung $= 0$ setzen
   - $f(x) = 0 = x - e^{-x}$
2. Gleichung ableiten
   - $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$
3. Startwert x_0 einsetzen
   - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
4. Gleichung ableiten
   - $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$
5. Startwert x_0 einsetzen
   - $x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.566 \ldots$
6. Letzten Schritt wiederholen
   - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Vorgehen

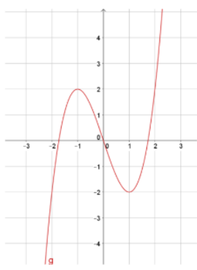
1. Definitionsbereich?
2. Symmetrieeigenschaften, Periode?
3. Schnittpunkt mit Achsen, Nullstellen, Polstellen?
4. Verhalten, wenn x gegen Definitionsbereich strebt?
5. Kandidaten für Extrema untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen falls nötig

Beispiel: $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$

1. $\mathbb{R}\backslash 0$
2. ungerade, da alle Exponenten ungerade sind.
3. Nullstellen: (-1,1), Schnittpunkt mit y: keine, Polstellen: 0
4. Grad Nenner > Grad Zähler: Funktion geht gegen 0 bei +/- unendlich
5. Relatives Max. bei: $x_1 = -\sqrt{3}$ Relatives Min. bei $x_2 = \sqrt{3}$
6. (-2.45,1.7), (2.45, -1.70)



Achsensymmetrie zur y-Achse

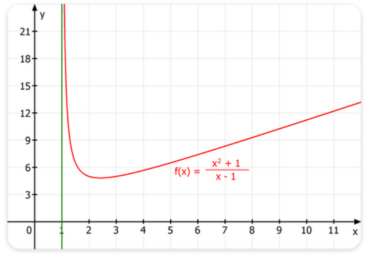


Punktsymmetrie zum Ursprung

Polstelle/Hebbare Lücke

X Wert ist nicht im Definitionsbereich:

1. Hebbare Lücke: Kann durch Umformen und Kürzen der Funktion verhindert werden.
2. Polstelle; Läuft gegen +/-∞, Bsp bei 1:



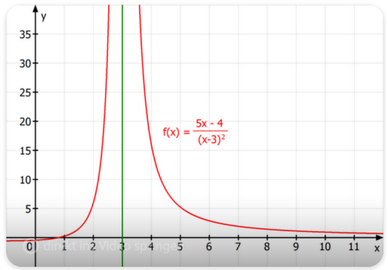
Polstelle bei x = 1 einer gebrochen rationalen Funktion f(x).

Wenn es die Nullstelle x_0 im Zähler gibt aber nicht im Nenner ist es eine Polstelle. Wenn es sie gibt, dann kommt es auch die Vielfachheit (wievielmal die Nullstelle in Zähler und Nenner vorkommen mit der Faktorzerlegung)an. k = Nenner, j = Zähler

$$j \geq k = Hebbare\ Lücke$$

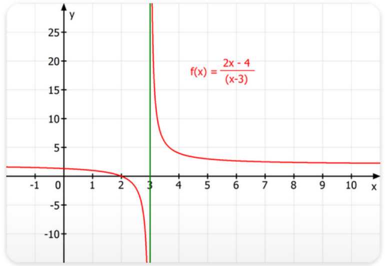
$$j < k, Postelle\ mit\ Ordnung\ k - j$$

Ordnung gerade = ohne Vorzeichenwechsel



Polstelle bei x = 3 ohne Vorzeichenwechsel.

Ordnung ungerade = mit Vorzeichenwechsel



Polstelle bei x = 3 mit Vorzeichenwechsel – Beispiel 1.

Für Berechnung Nullstellen von Zähler und Nenner berechnen und vergleichen.