ANALYSIS 3 - LINUS STUHLMANN

FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

Eine Funktion, die von n-1 Variablen abhängig ist, bildet eine Fläche im $\mathbb{R}^n$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \to x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Der Graph einer Funktion zweier Variablen ist die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

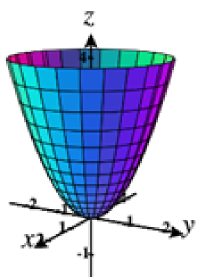
NIVEAULINIEN

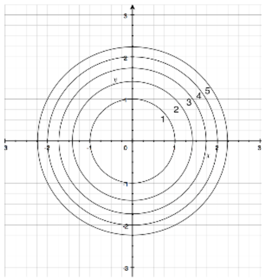
Um die Niveaulinien einer Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ einzuzeichnen, wird wie in folgendem Beispiel die Gleichung mit c gleichgesetzt und nach y aufgelöst:

$$\mathcal{N}_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$

$$x^2 + y^2 = c$$

$$y = \sqrt{c - x^2}$$





Durch das Einsetzen von beliebigen Werten für c wie $0, \pm 1, \pm 2$ … können die Niveaulinien für die Werte an den jeweiligen Werten bestimmt werden.

PARTIELLE ABLEITUNGEN

Die partielle Ableitung nach x_k der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist gegeben als:

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

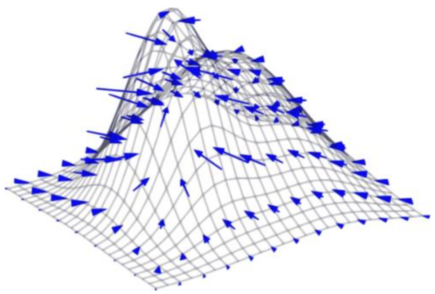
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

Dabei wird nur nach der Variable x_k abgeleitet, alle anderen Variablen werden als Konstanten angesehen.

GRADIENT

Um die Ableitung einer n-dimensionalen Funktion in einem einzigen Objekt zusammenzufassen, wird der Gradient verwendet. Dabei werden alle partiellen Ableitungen als Vektor zusammengefasst. Der Gradienten-Vektor zeigt die Richtung des steilsten Anstiegs einer Funktion an der Stelle $(x_1, \dots, x_n)$ an. Er steht ausserdem orthogonal auf der Niveaulinie.

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$



RICHTUNGSABLEITUNG

DEFINITION

Die Richtungsableitung gibt Ihnen an, wie steil der Anstieg oder Abfall ist, wenn Sie in eine bestimmte Richtung gehen.

Die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = \binom{e_1}{e_2}$ ist definiert als:

$$(D_{\vec{e}} f)(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\vec{e}) - f(P_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_1, y_0 + he_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

BERECHNUNG

Eine einfachere Methode die Richtungsableitung zu berechnen, ist folgende:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\vec{e} \in \mathbb{R}^n \; mit \; |\vec{v}| = 1$$

Das Skalarprodukt des Gradienten an der Stelle x_0 und des **normierten** Richtungsvektors bildet die Richtungsableitung.

$$D_{\vec{v}} f(x_0) = \nabla(f)(x_0)^T \vec{e}$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

SATZ

- Gradient gibt die Richtung des maximalen Wachstums an.
  - $D_{\vec{e}}f \text{ ist maximal} \Leftrightarrow \nabla f \parallel \vec{e}$
- Die Funktion kann nur senkrecht zum konstant bleiben.
  - $D_{\vec{e}}f = 0 \Leftrightarrow \nabla f \perp \vec{e}$
- Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaumengen von f
  - $\nabla f \perp \mathcal{N}_f(c)\ (c \in \mathbb{R})$

TANGENTIALEBENE

Die Tangentialebene an einen Punkt auf einer Fläche im Raum beschreibt die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ die die Fläche an genau diesem Punkt am besten approximiert. Sie "berührt" die Fläche im gegebenen Punkt und erstreckt sich in die Richtung der lokalen Steigung der Fläche.

TANGENTIALEBENE AN GRAPH VON FUNKTION

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ |z = f(x, y)\}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

TANGENTIALEBENE AN IMPLIZITE FLÄCHE

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ |f(x, y, z) = 0\}$$

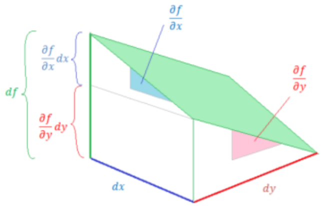
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0$$

TOTALES DIFFERENTIAL

Das totale Differential einer Funktion beschreibt die Änderung des Funktionswerts, wenn man sich ein minimales Stück dx_i von einem Punkt in mehrdimensionalem Raum wegbewegt.

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots$$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: Part. Ableitung (steilster Anstieg in Richtung x_i)
- dx_i: Differenz (Schrittweite in Richtung x_i)



1. Ausgangspunkt: (x_0, y_0)
2. Endpunkt: (x_1, y_1)
3. Differenz berechnen
   a. $(dx, dy) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$
4. Einsetzen der Anfangspunkte in part. Ableitungen, um Koeffizienten zu erhalten.
   a. Achtung dx und dy sind Variablen und $df(dx, dy)$ ist die Funktion
   b. $df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$
5. Einsetzen der Differenz (dx, dy) in df
   a. $df(dx, dy) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

Lineare Annäherung der Änderung der Funktion:

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + df(dx, dy)$$

IMPLIZITE FUNKTIONEN

Eine implizite Funktion $F(x, f(x)) = 0$ ist eine Funktion $y = f(x)$, in der zwei (oder mehr) Variablen miteinander verknüpft sind, ohne dass eine dieser Variablen auf einer Seite der Gleichung als abhängige Variable isoliert wird.

Implizite Halbkreisfunktion: $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$

SATZ IMPLIZITER FUNKTIONEN

$F(x, y) = 0$ ist lokal eine implizite, differenzierbare Funktion $y = f(x)$ gegeben, so gilt für die Ableitung:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Durch partielles Ableiten der impliziten Funktion nach beiden Variablen ergibt sich am Punkt P die Ableitung der expliziten Funktion $f(x)$.

- Ergibt keinen algebraischen Ausdruck für $f'(x)$
  - Nur Wert für Steigung am Punkt P

HERLEITUNG

Satz des totalen Differentials:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = F_x dx + F_y dy$$

Division durch dx:

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

Wobei $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, dann umstellen nach $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

JACOBI-MATRIX

Wenn eine Funktion ein Vektor ist, also mehrere Funktionen enthält, wird die Jacobi-Matrix verwendet, um die ersten Ableitungen aller Funktionen nach alles Variablen zusammenzufassen. Sie enthält in **jeder Zeile alle ersten Ableitungen** der ersten Funktion (wie Gradient) usw.

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

EXTREMWERTE MEHRERER VARIABLEN

HESSE MATRIX

Sei $z = f(x,y)$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie $(x_0, y_0) \subseteq D$. Die Hesse-Matrix von f ist die Matrix der zweiten Ableitungen von f. Anzahl echt verschiedene Einträge: $n + \frac{n(n-1)}{2}$, da $f_{xy} = f_{yx}$ usw.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Sind die partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig, dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$. Dies gilt auch für höhere Ableitungen.

KRITISCHE PUNKTE

Sei $z = f(x,y)$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie $(x_0, y_0) \subseteq D$. Falls

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

gilt, heisst (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von f.

EXTREMWERTE – HESSE-MATRIX

Um die Informationen aus $H_f(x,y)$ auf eine einzige Kennzahl zu reduzieren, betrachten wir deren **Determinante**. $\Delta(x_0, y_0) = \det(H_f(x_0, y_0))$

1. $\Delta(x_0, y_0) > 0 \;\&\; f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
   a. *lokales Minimum*
2. $\Delta(x_0, y_0) > 0 \;\&\; f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
   a. *lokales Maximum*
3. $\Delta(x_0, y_0) < 0$
   a. *Sattelpunkt*
4. $\Delta(x_0, y_0) = 0$
   a. *unbekannt*

EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNG

LAGRANGE-POTENZIALFUNKTION

- Zielfunktion: $f(x,y)$
- Nebenfunktion: $g(x,y) = c$

Die möglichen Lösungen des Extremwertproblems von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = c$ liegen in den Punkten mit $\nabla L(x,y,\lambda) = \vec{0}$, wobei:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \boldsymbol{\lambda} g(x,y).$$

Das kann auch mit mehr als einem Lagrange-Multiplikatoren λ gemacht werden. Die möglichen Lösungen des Extremwertproblems von $F(x,y)$ unter der Nebenbedingung $G(x,y) = 0$ liegen in den Punkten mit

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \vec{0}$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \vec{0} \to \begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

nach $x, y \;\&\; \lambda$ auflösen. Die Klassifikation, ob Maximum oder Minimum erfolgt durch den Vergleich der Ergebnisse.

$$f(x_{min/max}, y_{min/max})$$

Wenn nur ein Wert vorliegt, Werte in Determinante der Hessematrix der Zielfunktion $\det(H_f(x_0, y_0))$ einsetzen.

MEHRDIMENSIONALE INTEGRALE

DOPPELINTEGRALE

Es gilt:

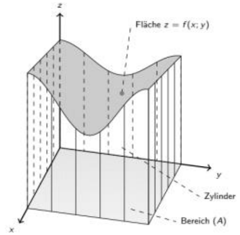
$$f: G \to \mathbb{R}$$

1. Es kann die Fläche des Gebiets A berechnet werden, indem über die Funktion $f(x,y) = 1$ integriert wird.
2. Es kann das Volumen unterhalb einer Funktion abgegrenzt durch das Gebiet A berechnet werden, indem über die Funktion $f(x,y) > 0$ integriert wird.

ÜBER RECHTECKIGE GRUNDFLÄCHE

Die Berechnung des Integrals einer Funktion über einen rechteckigen Bereich A.

$$A = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



Reihenfolge der Integration spielt keine Rolle! (Satz von Fubini)

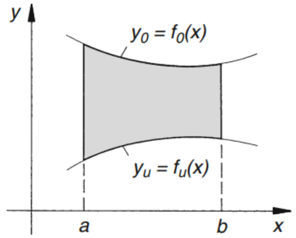
$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

GEBIET ZWISCHEN FUNKTIONSKURVEN

Die Berechnung des Integrals einer Funktion über einen Bereich zwischen zwei Funktionskurven.

$$A = \{(x,y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$



$$\iint_A f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{f_u(y)}^{f_o(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Die Reihenfolge der Integration ist relevant. *Die äusseren Grenzen dürfen nie von den Variablen nach denen integriert wird abhängen*. Wenn die Reihenfolge vertauscht wird, also y die äussere Grenze wird, müssen die Funktionen neu von y abhängen ($g(y)$).

DREIFACHINTEGRALE

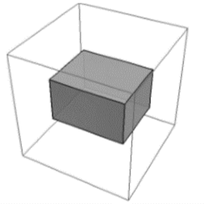
Es gilt:

$$f: G \to \mathbb{R}$$

1. Es kann das Volumen des Gebiets A berechnet werden, indem über die Funktion $f(x,y,z) = 1$ integriert wird.
2. Es kann das 4-D Volumen unterhalb einer Funktion abgegrenzt durch das Gebiet A berechnet werden, indem über die Funktion $f(x,y,z)$ integriert wird.

ÜBER QUADERFÖRMIGE GEBIETE

$$G = \{(x,y,z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$



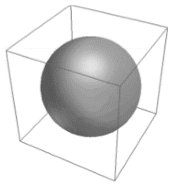
$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

Reihenfolge irrelevant!

ÜBER FUNKTIONEN BEGRENZTES GEBIET

$$\{(x,y,z) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), j(x,y) \leq z \leq k(x,y)\}$$



$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_e^f \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{j(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Reihenfolge ist relevant.

VARIABLENTRANSFORMATIONEN

Neue Koordinaten (u, v) berechnen

$$x = x(u, v),\;\; y = y(u, v)$$

Integrationsgrenzen und Funktion anpassen

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{\tilde{G}} \hat{f}(x(u,v), y(u,y))|\det(J)|dudv$$

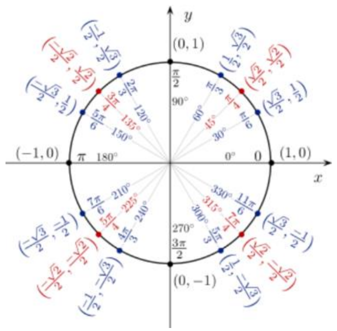
$dxdy$ wird zu:

$$dxdy = |\det(J)\; dudv = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| dudv$$

DOPPELINTEGRALE IN POLARKOORDINATEN

KREISFLÄCHE

- $x = x(r, \phi) = r\cos(\phi)$
- $y = \; y(r, \phi) = r\sin(\phi)$
- $\phi =$ Winkel des Kreises
  - 360° = 2π (arctan $\left(\frac{y}{x}\right)$)
- $r =$ Länge des Radius ($\sqrt{x^2 + y^2}$)



$\hat{G} = \{(r, \phi) | 0 \le r \le R; \alpha \le \phi \le \beta\}, \qquad \alpha, \beta \in [0, 2\pi]$

$$\iint_G f(x,y)dxdy \rightarrow \iint_{\tilde{G}} r * \hat{f}(r,\phi)drd\phi$$

$$= \int_{\phi=\alpha}^{\beta}\left(\int_{r=0}^{R} r * \hat{f}(r,\phi)dr\right)d\phi$$

DREIFACHINTEGRALE IN POLARKOORDINATEN

ZYLINDER

$$\iiint_{\tilde{G}} f(x,y,z)dxdydz \rightarrow \iiint_{\tilde{G}} r * \hat{f}(r,\phi,z)dzdrd\phi$$

- $x = x(r, \phi) = r\cos(\phi)$
- $y = \; y(r, \phi) = r\sin(\phi)$
- $z = z$
  - Gibt Höhe des Zylinders an.
- $\phi =$ Winkel des Kreises
- $r =$ Länge des Radius ($\sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\int_{\phi=\alpha}^{\beta}\left(\int_{r=0}^{R}\left(\int_{z=0}^{z} r * \hat{f}(r,z,\phi)\,dz\right)dr\right)d\phi$$

KUGEL

$$\hat{G} = \{(r, \phi) | 0 \le r \le R; \alpha \le \phi \le \beta, \gamma \le \theta \le \delta\}$$

- $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$
- $\gamma, \delta \in [0, \pi]$

$$\iiint_{\tilde{G}} f(x,y,z)dxdydz$$

$$\rightarrow \iiint_{\tilde{G}} r^2 \sin(\theta) * \hat{f}(r,\phi,\theta)drd\theta d\phi$$

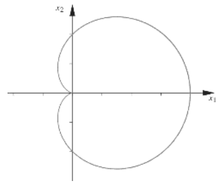
- $x = x(r, \phi, \theta) = r\cos(\theta)\cos(\phi)$
- $y = \; y(r, \phi, \theta) = r\cos(\theta)\sin(\phi)$
- $z = z(r, \phi, \theta) = r\sin(\theta)$
- $\phi =$ Winkel des Kreises x, y-Ebene $(0 - 2\pi)$
- $\theta =$ Polwinkel der z-Achse $(0 - \pi)$

$$\int_{\phi=\alpha}^{\beta}\left(\int_{\theta=\gamma}^{\delta}\left(\int_{r=0}^{R} r^2 * \sin(\theta) * \hat{f}(r,\phi,\theta)\,dr\right)d\theta\right)d\phi$$

KURVEN IN POLARKOORDINATEN

$$\hat{G} = \{(r, \phi) | 0 \le r \le r(\phi); \alpha \le \phi \le \beta\}$$

$$\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$$



Kardioide: $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$ (Radius abhängig Winkel)

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{r(\phi)} r\,dr\right)d\phi$$

GÄNGIGE INTEGRATIONSGEBIETE

In kartesischer Form

- Rechteckige Gebiete:
  - $\{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$
- Graphen von Funktionen:
  - $\{(x, y) | a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$
- Kreisförmige Gebiete:
  - $\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 \le R^2\}$
  - wobei (h, k) = Mittelpunkt des Kreises
  - Halbkreis: $y \ge 0$
  - R^2: quadratische Radius
- Elliptische Gebiete:
  - $\left\{(x, y) \middle| \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \le R^2\right\}$
  - wobei (h, k) = Mittelpunkt der Ellipse
  - a und b sind Hauptachsen
- Zylinder
  - $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \le R^2, a \le z \le b\}$
  - z ist Höhe des Zylinders
- Kugel
  - $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

FOURIER ANALYSIS

HARMONISCHE SCHWINUNGEN

Unter harmonischen Schwingungen verstehen wir eine allgemeine Sinus- oder Cosinus-Schwingung der Form:

$$y(t) = A * \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = A * \sin(\omega t + \phi)$$

- A: reelle Amplitude ($A \geq 0$)
  - Auslenkung der harm. Schwingung
- ω: Kreisfrequenz
  - Je grösser ω, desto schneller bzw. hochfrequenter die Schwingung
  - $\omega = 2\pi * f$
  - T: Periodenlänge
  - f: $\frac{1}{T}$ Frequenz in Hz
- ϕ: Phase
  - Durch die Phase ϕ, kann die Schwingung nach hinten verschoben werden. 2π ist eine gesamte Periode.
  - $\sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

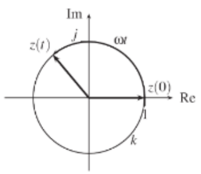
KOMPLEXE SCHWINGUNG IM DREHZEIGER

Aus einer reellen Schwingung $y(t)$ kann die komplexe Schwingung:

$$y(t) = A * \cos(\omega t + \phi) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{z}(t) = A * e^{i(\omega t + \phi)} = Ae^{i\phi}e^{i\omega t} = \boldsymbol{A}e^{i\omega t}$$

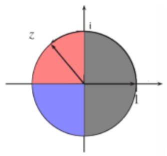
mit komplexer Amplitude $\boldsymbol{A} = Ae^{i\phi}$ gebildet werden.



KARTESISCHE FORM IN POLARFORM IN EXPONENTIALFORM EINER KOMPLEXEN ZAHL

- $z = a + bi = A \cdot \cos(\phi) + A \cdot \sin(\phi)\, i = |z|e^{i\phi}$
- $A = |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- $\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) (\pm\pi)$

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & (a > 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & (a < 0, b \geq 0) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & (a < 0, b < 0) \\ \frac{\pi}{2} & (a = 0, b > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a = 0, b < 0) \\ \text{undefiniert} & (a = b = 0) \end{cases}$$



ÜBERLAGERUNG – SUPERPOSITION

Die Amplitude A und die Phase ϕ der reellen Überlagerung zweier harmonischen Cosinus-Schwingungen sind gegeben durch:

$$A_{\text{überlagert}} = |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2| = |A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}|$$

Der Betrag der komplexen Amplitude $\boldsymbol{A}$ ergibt die reelle Amplitude.

$$\phi = \arg(\boldsymbol{A}) = \arg(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = \arg(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})$$

FOURIERREIHEN

DEFINITION

Fourierreihe / Fouriepolynom in reeller trigonometrischer Form:

$$s(t) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Fourierreihe / Fouriepolynom in komplexer Form:

$$s(t) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega t}$$

FOURIERKOEFFIZIENTEN

Die Koeffizienten a_k und b_k werden durch bestimmte Integrale berechnet, die die Funktion $g(x)$ über eine Periode mit Sinus- und Kosinusfunktionen vergleichen. Wobei T die Periode und Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(k\omega t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(k\omega t)\, dt$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion s(t) mit Periode T Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)e^{-ik\omega t}dt$$

SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN

Funktion $f(t)$ ist **gerade,** ihr Graph ist also **symmetrisch bezüglich der y-Achse**.

- $b_k = 0$, → nur cos-Terme.
- $s(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)$

Funktion $f(t)$ ist **ungerade,** ihr Graph ist also **punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs**.

- $a_k = 0 \to$ nur sin-Terme
- $s(t) \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$

Weder gerade noch ungerade:

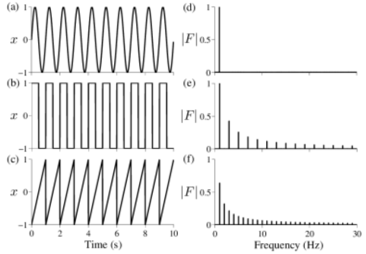
- $s(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$

BERECHNUNG FOURIERREIHE

1. Ermitteln der relevanten Grössen
   a. T: Periodenlänge
   b. f: $\frac{1}{T}$ Frequenz in Hz
   c. ω: $\frac{2\pi}{T}$
   d. $s(t)$: periodisches Signal
      i. $s(t) = s(t+T)$
   e. Symmetrieeigenschaften
   f. Berechnung der Koeffizienten
   g. Ermitteln der Fourierreihe

FOURIER TRANSFORMATION

Ziel der Fouriertransformation ist es, von einem Zeitsignal auf das Amplitudenspektrum zu gelangen, bzw. die Grundfrequenz und ihre ganzzahligen Vielfachen zu ermitteln.



- Amplitude der k-ten Harmonischen ist:
  - $A_0 = \frac{a_0}{2}$
  - $A_{k>0} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
  - $A_k = |\hat{f}_k| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- Die Frequenz der k-ten Harmonischen ist:
  - $k * \omega$
  - (wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$)
  - Komplex: $\frac{l}{T} / \frac{l}{2\pi}$, für l von 0 bis $N-1$

DISKRETE FOURIER TRANSFORMATION – DFT

Die N Koeffizienten der komplexen DFT der Funktion $f(x)$ mit Periode 2π und Kreisfrequenz $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, sind:

KOMPLEX

$$\hat{f}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} = \hat{f} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots \hat{f}_{N-1})$$

Rücktransformation:

$$f_k = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

REELL

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right), (k = 0,1, \dots, N-1)$$

$$b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right), (k = 0,1, \dots, N-1)$$

Rücktransformation:

N ungerade ($N = 2M + 1$):

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M} a_l \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right)$$

N gerade ($N = 2M$):

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} a_l \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + \frac{a_M}{2} \cos\left(\frac{2\pi Mk}{N}\right)$$

KOMPLEX → REELL

$$a_l = 2Re(\hat{f}_l)$$

$$b_l = -2Im(\hat{f}_l)$$

REELL → KOMPLEX

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\hat{f}_{l>0} = \frac{1}{2}(a_l - i b_l)$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DEFINITION

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

$$y'(x) = \sin(x) * y^2(x) + e^x$$

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DEFINITION

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ODE ist eine Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für eine gesuchte Funktion y(x), in den Ableitungen von y(x) auftreten bis zur n-ten Ableitung.

- Implizite DGL erster Ordnung
  - $y' - x - y = 0$
- Explizite DGL erster Ordnung
  - $y' = x + y$

ANFANGSWERTPROBLEM

Die Lösungsmenge einer DGL ist eine Menge von Funktionen, die durch eine oder mehrere Konstanten charakterisiert sind. Die Lösung wird erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich eine Anfangsbedingung definiert.

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)) = y_n \end{cases}$$

Die Lösung eines AWP nennt man, spezielle bzw. partikuläre Lösung.

SEPARIERBARE DGL

Eine DGL ist *separierbar*, falls $f(x, y)$ als **Produkt** eines x- und eines y-Anteils geschrieben werden kann.

$$y' = g(x) * h(y)$$

$$y' = x * y$$

➔ Ist nicht separierbar: $(y' = x + y)$

LINEARITÄT

In einer linearen DGL kommt die Funktion und ihre Ableitungen nur in linearen Termen vor, also *keine* Ausdrücke wie $\sqrt{y(x)}$, $(y'(x))^2$, $e^{y(x)}$, $y * y'$, $\sin(y)$, $\frac{1}{y}$...

Erlaubt hingegen sind Ausdrücke wie: $\sin(x) * y$, $\cos(x) * y'(x)$, e^x. (Terme in x dürfen nicht linear sein)

HOMOGENITÄT

- Homogen
  - $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$
- Inhomogen
  - $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$

LÖSEN VON INHOMOGENEN DGL 1. ORD.

MIT LÖSUNGSANSATZ

Je nach Störfunktion $g(x)$ kann ein Lösungsansatz aus der Tabelle verwendet werden.

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
4. Polynomfunktion vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	oder
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi)$
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & b = -a \end{cases}$

$c_0, c_1, \dots, c_n$; C, C_1, C_2: „Stellparameter"

Lösungsansätze inhomogene DGL: $y'' + ay' + by = g(x)$

VARIATION DER KONSTANTEN

Variation der Konstanten kommt zu Einsatz, wenn eine inhomogene Differentialgleichung vorliegt. Dies kann mithilfe der Lösungsformel gemacht werden. $f(x)$ wird als der Vorfaktor von y gesehen.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Umformen in homogene DGL (Störterm auf linke Seite)

$$y' + f(x)y - g(x) = 0$$

LÖSUNGSFORMELN

$$y_h = K(x) * e^{-F(x)}$$

$$K(x) = \int g(x) e^{F(x)} dx, \quad !(+C)$$

HOMOGENEN DGL 2. ORDNUNG

$$y'' + a_1 y' + y a_0 = 0$$

- Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, λ geeignet zu wählen
  - $y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
- Einsetzen von $y = \lambda e^{\lambda x}$ in homogene DGL
  - $(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$
- Charakteristisches Polynom
  - $P(\lambda) = (\lambda^2 + a\lambda + b)$
- Nullstellen finden von $P(\lambda)$.
  - $P(\lambda) = 0$
  - $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_{0,1})(\lambda - \lambda_{0,2}) = 0$
- Lösung
  - $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

VERSCHIEDENE FÄLLE

1. λ ist eine **einfache** reelle Nullstelle von $P(\lambda)$:

$$y = e^{\lambda_1 x}, y = e^{\lambda_2 x}, (D > 0)$$

2. λ ist eine **doppelte** reelle Nullstelle von $P(\lambda)$:

$$y = e^{\lambda x}, y = x * e^{\lambda x}, (D = 0)$$

3. ist eine **einfache komplexe** Nullstelle von $P(\lambda)$:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, (D < 0)$$

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}, y = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

Reelle Lösung: (Vorzeichen von β ignorieren)

$$y = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

LÖSEN VON INHOMOGENEN DGL 2. ORDNUNG

Beim Lösen von inhomogenen DGL 2. Ordnung

$$a * y'' + b * y' + c * y = g(x)$$

kann wie folgt vorgegangen werden:

1. y_h: homogene Lösung
   a. DGL ohne Störterm $g(x)$ lösen
2. y_p: partikuläre Lösung
   a. $y_p \rightarrow$ Tabelle
   b. $a * y_p'' + b * y_p' + c * y_p = g(x)$
   c. $y = y_h + y_p$

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbf{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = Be^{cx}$ mit $B, c \in \mathbf{R}$	c **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ae^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **einfache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Axe^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **zweifache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ax^2e^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
3	$g(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$i\beta$ **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ oder $y_p = C\sin(\beta x + \varphi)$
		$i\beta$ **Lösung** von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x\Big(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\Big)$ oder $y_p = Cx\sin(\beta x + \varphi)$
		mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbf{R}$

Ist $g(x)$ eine Lösung der homogenen DGL ist, so gibt es keine partikuläre (spezielle) Lösung in der Form von $Ae^{\lambda x}$.

HOMOGENE LINEARE SYSTEME VON DGL

$$y'_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n$$
$$\vdots$$
$$y'_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n$$

Kann wie folgt in Vektor/Matrix Schreibweise formuliert werden:

$$\vec{y}' = A * \vec{y} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$$

ist die Summe:

$$\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_p$$

LÖSUNGEN VON DGL-SYSTEMEN

Jede Linearkombination von Lösungen ist wieder eine Lösung, d.h. sind $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ Lösungen und $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, so ist $C_1\vec{y}_1$ und $C_2\vec{y}_2$ auch eine Lösung.

Es gibt genau n linear unabhängige Lösungen aus der Menge $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$

1. Lösung:
   a. $\vec{y} = e^{\lambda x} * \vec{c}$
   b. $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$
2. Lösungsansatz
   a. $\vec{y}' = A\vec{y}$
   b. $e^{\lambda x}\lambda\vec{c} = e^{\lambda x}A\vec{c}$
   c. $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$ (somit ist c ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

LÖSEN VON HOMOGENEN LINEAREN DGL SYSTEMEN

- Eigenwerte λ berechnen:
  - $\det(A - I_n\lambda) = 0$
- Eigenvektoren $\vec{v}$ berechnen
  - Einsetzen von λ_i in $A - I_n\lambda_i$
  - $(A - I_n\lambda_i) * \vec{v} = \vec{0}$
- Lösung definieren

$$\vec{y}_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1\vec{v}_1e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n\vec{v}_ne^{\lambda_n x}$$

FALLUNTERSCHEIDUNGEN DER LÖSUNGEN

1. λ_i ist einfacher Eigenwert mit Eigenvektor $\vec{v}_i$
   a. $\vec{y} = \vec{c}e^{\lambda x}$
2. λ_i ist k-facher Eigenwert mit k lin. unabh. Eigenvektoren.
   a. $C_{i,1}\vec{v}_{i,1}e^{\lambda_i x} + \cdots + C_{i,1}\vec{v}_{i,1}e^{\lambda_i x}$
3. λ_i ist k-facher Eigenwert mit weniger als k lin. unabh. Eigenvektoren.
   a. $\vec{y} = C_1e^{\lambda x}\vec{v} + C_2e^{\lambda x}p_i(x)$
   b. $p(x) = x\vec{v} + \vec{v}^*$
   c. Wobei $(A - \lambda I_n)\vec{v}^* = \vec{v}$ erfüllt sein muss.
4. $\lambda_i = \alpha + \beta i$ echt komplexer Eigenwert mit Eigenvektor $(\vec{a} + i\vec{b})$
   a. Realteil:
   $$\vec{y}_{i,1} = C_1e^{\alpha x}(\vec{a}\cos(\beta x) - \vec{b}\sin(\beta x))$$
   b. Imaginärteil
   $$\vec{y}_{i,2} = C_2e^{\alpha x}(\vec{a}\sin(\beta x) - \vec{b}\cos(\beta x))$$
   c. Lösung
   $$\vec{y} = C_1e^{\alpha x}(\vec{a}\cos(\beta x) - \vec{b}\sin(\beta x)) \\ +C_2e^{\alpha x}(\vec{a}\sin(\beta x) - \vec{b}\cos(\beta x))$$

INHOMOGENE LINEARE SYSTEME VON DGL

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{cases}$$

LÖSUNG

1. Homogene Lösung y_h berechnen
   a. Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v_i}$
   b. $\vec{y}_h = C_1e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 + C_2e^{\lambda_2 x}\vec{v}_2 + \cdots$
2. Partikuläre Lösung $\vec{y}_p$ berechnen
   a. Ansatz je nach Störfunktion $g(x)$ wählen
   b. Z.B. $y_{p,1} = Ae^{\lambda_1 x}, y_{p,2} = Be^{\lambda_2 x}$
   c. die erhaltenen y_p in die Gleichung einsetzen und A und B ermitteln
   d. $\begin{cases} (y_{p,1})' = a_{11}(y_{p,1}) + a_{12}(y_{p,2}) + g_1(x) \\ (y_{p,2})' = a_{21}(y_{p,1}) + a_{22}(y_{p,2}) + g_2(x) \end{cases}$
3. Allgemeine Lösung des inhomogenen DGL-Systems
   a. $\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_p$
4. Ggf. Anfangswertproblem lösen

FORMELN INTEGRAL & DIFFERENTIAL

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
ax^{a-1}	x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-ln(\lvert cos(x)\rvert)$
$-1 - \cot^2(x)$	$\cot(x)$	
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln(x) * a^x$	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} * a^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(ax)$ $\ln(a) + \ln(x)$	$x * \ln(ax) - x + C$
$\frac{1}{x+a}$	$ln(x+a)$	$(x+a) * \ln(x+a) - x + C$
$\frac{1}{\ln(a)\,x}$	$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$	$x * sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}(x)$	$x * \cos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x)$	$x\tan^{-1}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} * x\sqrt{x} + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{ax}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert x\rvert) + C$
	$\frac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a\rvert) + C$
$\frac{1}{x * \ln^2(x)}$	$\frac{1}{\ln(x)}$	

NULLSTELLEN