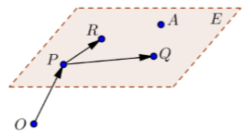
Parameterdarstellung Ebene im Raum



- Sind komplanar

Ortsvektor: $\boxed{\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda\vec{PQ} + \mu\vec{PR}}$

Ebene. $\boxed{E.\ \vec{r}(P) + \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}}$ ⇒ wenn λ_A & λ_B gibt, dann Punkt A auf Ebene

⇒ Parameterdarstellung

Bemerkung
Auch für eine Ebene E ist die Parameterdarstellung nicht eindeutig:
- Jeder beliebige Punkt der Ebene kann als Aufpunkt dienen.
- Als Richtungsvektoren können wir zwei beliebige Vektoren wählen, die
  - parallel zur Ebene E sind
  - nicht kollinear

Koordinatendarstellung Ebene im Raum

Ebene: $\boxed{E: ax + by + cz + d = 0}$ ⇒ NICHT EINDEUTIG

⇒ Koordinatendarstellung

Umrechnung Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung (1.)

$\boxed{\vec{r}(A) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}(P) + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}$

Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ⇒ orthogonal zu Ebene E

Normalvektor

⇒ heisst normiert wenn $|\vec{n}| = 1$ 8

d bewirkt parallele Verschiebung

Bsp.:

Beispiel

Bestimmen Sie eine Koordinatendarstellung der Ebene $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda + 2\mu \\ 4 + 3\lambda + 2\mu \\ 1 + \lambda - 4\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 + \lambda + 2\mu \ (1) \\ y &= 4 + 3\lambda + 2\mu \ (2) \\ z &= 1 + \lambda - 4\mu \ (3) \end{aligned}$$

$2(1) + (3) \Rightarrow 4 + 2\lambda + 4\mu + 1 + \lambda - 4\mu = 2x + z$

$5 + 3\lambda = 2x + z \ (4)$

$-1(1) + (2) \Rightarrow -2 - \lambda - 2\mu + 4 + 3\lambda + 2\mu = -x + y$

$2 + 2\lambda = -x + y \ (5)$

$2 \cdot (4) + (-3)(5) \Rightarrow 10 + 6\lambda - 6 - 6\lambda = 4x + 2z + 3x - 3y$

$4 = 7x - 3y + 2z$

$\Rightarrow \underline{\underline{7x - 3y + 2z - 4 = 0}}$

Umrechnung Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung (2.)

Normalvektor zu $\vec{E}$: $\vec{n} = a \times b$

Beispiel (wie vorher)

Bestimmen Sie eine Koordinatendarstellung der Ebene $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$E: \vec{n} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$E: -14x + 6y - 4z + d = 0$

$-28 + 24 - 4 + d = 0$

$d = -8$

$E: -14x + 6y - 4z - 8 = 0$

$\to \underline{\underline{E: -7x + 3y - 4z - 4 = 0}}$

Umrechnung Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung

Beispiel
Finden Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $E: 5x + 3y - z + 2 = 0$.

$x_p = 0 \quad y_p = 0 \Rightarrow z_p = 2$

$x_q = 0 \quad y_q = 1 \Rightarrow z_q = 5$

$x_r = 1 \quad y_r = 0 \Rightarrow z_r = 7$

$E: \vec{r}(P) + \lambda\vec{PQ} + \mu\vec{PR}$

$= \underline{\underline{E: \vec{r}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

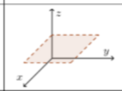
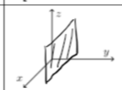
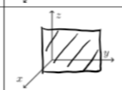
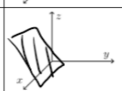
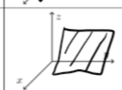
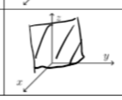
Gegenseitige Lage von Ebenen

Identisch: Ebenengleichung → gleiche Lösung

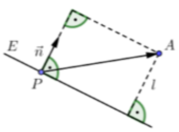
parallel: Normalvektoren E_1 & E_2 müssen kollinear

Schneiden sich: Schnittmenge identisch

Spezielle Lage von Ebenen

Spezielle Lage	Skizze	Normalen-vektor	Bedingung	Ebenengleichung
parallel zur x/y-Ebene		$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$	$a=b=0$	$cz+d=0$
parallel zur x/z-Ebene		$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\b\\z\end{pmatrix}$	$a=c=0$	$y+d=0$
parallel zur y/z-Ebene		$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$	$b=c=0$	$ax+d=0$
parallel zur x-Achse		$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}$	$a=0$	$by+cz+d=0$
parallel zur y-Achse		$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\0\\c\end{pmatrix}$	$b=0$	$ax+cz+d=0$
parallel zur z-Achse		$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$	$c=0$	$ax+by+d=0$

Abstand Punkt von Ebene



$$\boxed{L=\frac{|ax+by+cz+d|}{|\vec{n}|}}$$

Beispiel
Gegeben ist die Ebene $E:\ 7x+4y-4z+3=0$.
Bestimmen Sie den Abstand l des Punktes $A=(2;-3;-1)$ von der Ebene E.

$\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}$

$$l=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{|\vec{n}|}=\frac{14-12+4+3}{\sqrt{7^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{9}{\sqrt{81}}=\underline{\underline{1}}$$

Kreise und Kugeln

Mittelpunkt $M=(x_0;y_0;z_0)$ $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$

Beispiel
Die folgende Gleichung stellt eine Kugel dar. Gesucht sind Mittelpunkt und Radius.

$$z^2+12z+y^2-8y+x^2-6x=-12$$

$x^2-6x=(x-3)^2-9$
$y^2-8y=(y-4)^2-16$
$z^2+12z=(z+6)^2-36$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}$

$M(3|4|-6)$ $r=7$

$(x-3)^2+9+(y-4)^2-16+(z+6)^2-36=-12$
$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+6)^2=-12+9-16-36>49$

Quadratische Matrizen

Beispiel	$\begin{pmatrix}7&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Bezeichnung	3×3-Diagonalmatrix	3×3-Einheitsmatrix

Diagonalmatrix, wenn alle Elemente $\neq$ Hauptdiagonalen $=0$
Einheitsmatrix = Diagonalmatrix $\Rightarrow$ Diagonalelemente $=1$

Einheitsmatrix verändert Matrix NICHT. $AE=EA=A$

Multiplikation und Potenzen quadratischen Matrizen

$\boxed{A^k=\begin{pmatrix}x&ka\\0&y\end{pmatrix}}$ $\boxed{D^k=\begin{pmatrix}x^k&0&0\\0&y^k&0\\0&0&z^k\end{pmatrix}}$ $\Rightarrow$ eher einfach multiplizieren

$A^2=A\cdot A$ / $A^3=A\cdot A^2$ / $A^4=A\cdot A^3$ ...

$\boxed{(A\cdot B)^2\neq A^2B^2}$ / $\boxed{(A\cdot B)^2=ABAB\neq AABB=A^2B^2}$

Inverse Matrizen

Inverse von $A \rightarrow A^{-1}$ $\quad \boxed{A \cdot A^{-1} = E}$

Inverse 2x2 Matrix: $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

2x2 Matrix dann Inverse, wenn ad-bc

Wichtige Eigenschaften von invertierbaren Matrizen

(1) Die Inverse einer invertierbaren Matrix ist eindeutig bestimmt.

(2) Die Inverse einer invertierbaren Matrix A ist invertierbar und es gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.
(Der Kehrwert des Kehrwerts ist ja auch gleich der ursprünglichen Zahl.)

(3) Multiplizieren wir zwei invertierbare Matrizen A und B miteinander, so ist das Produkt auch invertierbar und es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
(Sie ziehen erst die Socken, dann die Schuhe an; beim Ausziehen ist die Reihenfolge umgekehrt.)

(4) Die Transponierte A^T einer quadratischen Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. In diesem Fall gilt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Lineares Gleichungssystem

LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit $n \times n$

$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{c}}$

1) A ist invertierbar
2) $A \cdot \vec{x} = \vec{c} \rightarrow 1$ Lösung
3) $rg(A) = n$

Gauss-Jordan-Verfahren für Inversen

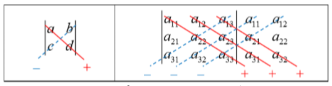
Bsp.: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ...

Bemerkung

- Beim Rechnen mit Matrizen unbedingt die Reihenfolge beibehalten!
  $X \cdot A + X \cdot B = X \cdot (A + B)$, aber $X \cdot A + X \cdot B \neq (A + B) \cdot X$!!!
- Achtung beim Ausklammern: Eine Zahl kann nicht zu einer Matrix addiert werden!
  $2 \cdot X + A \cdot X \neq (2 + A) \cdot X$!!!

  Stattdessen eine Einheitsmatrix einbauen:
  $2 \cdot X + A \cdot X = 2 \cdot E \cdot X + A \cdot X = (2 \cdot E + A) \cdot X$

Determinante



2x2 Matrix | 3x3 Matrix

$\Rightarrow \det(A) = ad - bc$

$\Rightarrow$ Entwickelt nach Zeile oder Spalte mit meisten Nullen

Entwicklung nach der i-ten Zeile:	Entwicklung nach der j-ten Spalte:
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$	$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

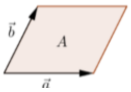
$$= (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot \det(A_{22}) + (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot \det(A_{23}) + (-1)^{2+4} \cdot a_{24} \cdot \det(A_{24})$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-2 + 3 + 3 + 1 + 1 + 18) - 2(4 + 6 + 1 + 2 - 2 + 6) - 2 \cdot (-12 - 2 + 1 - 6 - 2 - 2) + 3 \cdot (6 + 2 + 3 - 18 + 2 + 1)$$

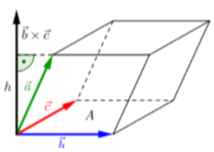
$$= -72 - 34 + 46 - 12 = -72$$

Geometrische Interpretation Determinante



$\boxed{A = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = |a \times b| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|}$

2x2 Matrix



$\boxed{A = h \cdot |\vec{b} \times \vec{a}|}$ $\quad \boxed{V = A \cdot h = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \frac{|\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|}$

$\boxed{h = \frac{|\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}}$ $\quad \boxed{V = \det(A)}$ $\Rightarrow$ 3x3 Matrix

Eigenschaften Determinante

Wichtige Eigenschaften der Determinante

(1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$

(2) Für jede $n \times n$-Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

(3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$

(4) Für alle $n \times n$-Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

(5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(6) Für jede $n \times n$-Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für eine quadratische $n \times n$-Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\det(A) \neq 0$

(2) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(3) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(4) $rg(A) = n$

(5) A ist invertierbar.

(6) Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Wahrscheinlichkeiten

Diskrete Ergebnisräume & Wahrscheinlichkeiten

Ergebnisraum $\Omega = \{..\}$

Zähldichte $\rho(\omega) =$ z.B $\frac{1}{6}$

Wahrscheinlichkeit $P(A) = \rho(..) + \rho(..) + .. \rho(..)$ / $P(A) = \sum \rho(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

⇒ Gleichverteilung heisst Laplace-Raum

Satz
In einem diskreten Ergebnisraum Ω mit einer Zähldichte ρ gilt:

(A1) (Unmögliches Ereignis) $P(\{\}) = 0$
(A2) (Sicheres Ereignis) $P(\Omega) = 1$
(A3) (Komplementäres Ereignis) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$
(A4) (Vereinigung) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für alle Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$
(A5) (Sigma-Additivität) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$
falls die Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt sind.

Durchschnitt $\cap$ / Vereinigung $\cup$ / Differenz $\setminus$ / Komplement $\bar{\ }$

Zufallsvariabel

$X \quad \Omega \to \{\ldots\}$

Zufallsvariabel

PDF: $f(x) = P(X=x)$ → Dichtefunktion

CDF: $F(x) = P(X \leq x)$ addiert PDF → kummulative Verteilungsfunktion

ω	1	2	3	4	5	6
$x(\omega)$	–20	–5	0	2.5	4	5
PDF	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
CDF	1/6	2/6 = 1/3	3/6 = 1/2	4/6 = 2/3	5/6	6/6 = 1

Lagegrössen

Streumass

x	–1	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

$\mu = 0{,}8$

Varianz $\sigma^2 = V(X)$ → $f(x) \cdot (x - \mu)^2$ = Bsp: $0{,}2 \cdot (-1 - 0{,}8)^2 + 0{,}1(0 - 0{,}8)^2 + ..$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = s(X) = \sqrt{V(X)}$

Mittelwert $\mu = E(X)$ → Erwartungswert → $E(X) = \sum P(X=x) \cdot x$

(1) **Linearität des Erwartungswertes:**
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ und $E(\alpha X) = \alpha E(X)$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) **Verschiebungssatz für die Varianz**
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left(\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2\right) - (E(X))^2$

(3) $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	Summe
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Summe	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Satz (Bedingte Wahrscheinlichkeit)
Gegeben sind ein diskreter Ergebnisraum Ω mit ein
A und $B \subseteq \Omega$. Dann gilt:

(1) **Multiplikationssatz** – *Pfadwahrscheinlichkeit*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

(2) **Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit**
$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})$

(3) **Satz von Bayes**
$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

Stochastische Unabhängigkeit

Definition: Dann stochastisch unabhängig wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Überblick: Wahrscheinlichkeiten von abgeleiteten Ereignissen
Gegeben sind ein diskreter Ergebnisraum Ω mit einer Zähldichte ρ sowie zwei Ereignisse A und $B \subseteq \Omega$. Dann gilt:

(1) **Komplement** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(2) **Vereinigung** (ODER)
Für beliebige Ereignisse A und B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Wenn A und B **disjunkt** sind: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) **Schnittmenge** (UND)
Für beliebige Ereignisse A und B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
Wenn A und B **stochastisch unabhängig** sind: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Satz (Stochastische Unabhängigkeit – Zufallsvariablen)
Gegeben sind ein diskreter Ergebnisraum Ω mit einer Zähldichte ρ sowie zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Falls die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ existieren, so gilt:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

- Falls die Varianzen $V(X)$ und $V(Y)$ existieren, so gilt:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$