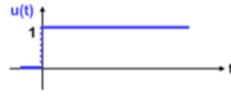


Elementar Signale

Einheitsprung (Schritt- oder Heaviside-Funktion)

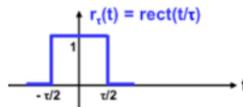
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Rechteck-Puls

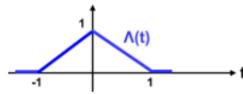
$$rect(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

τ wenn unbekannt = 1



Dreieckspuls

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$



Konst. Signal

$$x(t) = 1$$



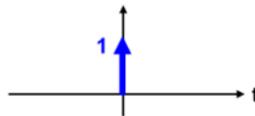
Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \right) \cdot r(t)$$

Dabei gilt Fläche von $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Eigenschaften:

- Sieb- bzw. Ausblendeigenschaften
 - $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$
- Abtastung
 - $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
- Ableitung des Einheitsprungs
 - $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$



Signalklassen

Leistungssignale

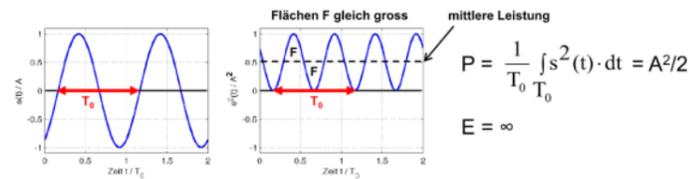
- Endliche normierte Signalleistung
 - $0 < P < \infty$
- Unendliche Signalenergie
 - $E = \infty$
- Periodische** Signale sind Leistungssignale
- Mittlere** normierte Leistung (normiert auf z.B. $R = 1 \Omega$)

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_0 \cdot R} \int_{T_0} x^2(t) \cdot dt$$

- Effektivwert**
 - $X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt} = \sqrt{P}$

Beispiel: $s(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t - \phi_0)$ ist ein **Leistungssignal**

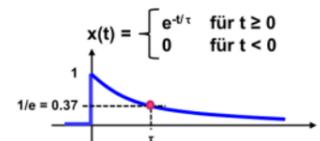


- ϕ_0 Null setzen und von 0 bis T_0 integrieren, d.h. $P = \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(2\pi f_0 t) dt$
- Benutze trigonometrische Umformung: $\sin^2(\alpha) = 0.5 - 0.5 \cdot \cos(2\alpha)$
- $P = \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} (0.5 - 0.5 \cdot \cos(2\pi f_0 t)) dt = \frac{A^2}{T_0} \left[0.5t - \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \right]_0^{T_0} = \frac{A^2}{T_0} \cdot 0.5T_0 = \frac{A^2}{2}$

Energiesignale

- Endliche normierte Signalenergie
 - $0 < E < \infty$
- Verschwindende Signalleistung
 - $P = 0$
- Zeitlich begrenzte** Signale sind Energiesignale (Einzelpuls)
- Zeitlich unbegrenzte Signale mit abklingender Amplitude (gedämpfte Schwingungen)
- Mittlere** normierte Energie (normiert auf $R = 1 \Omega$)
 - $E_n = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Beispiel eines Energiesignals: zeige dass $x(t)$ die Energie $E = \tau/2$ hat



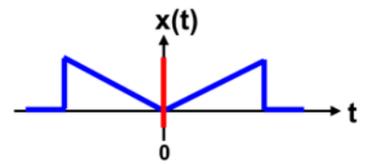
je grösser τ , desto langsamer ist der exponentielle Abfall der Amplitude bzw. desto grösser ist die Signal-Energie E

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E = \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{e^{-2t/\tau}}{-2/\tau} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2/\tau} \right) = \frac{\tau}{2}$$

Gerade Signale

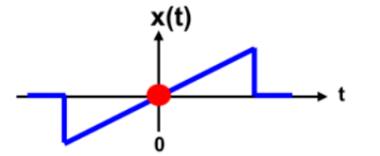
- Spiegelsymmetrisch zur vertikalen Achse
 - Für alle t gilt: $x(-t) = x(t)$
- Cos(...) ist gerade



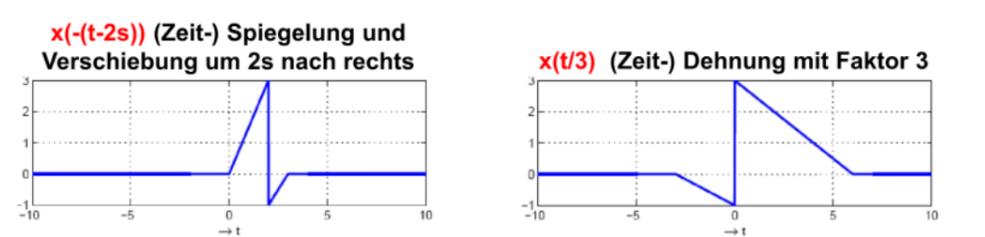
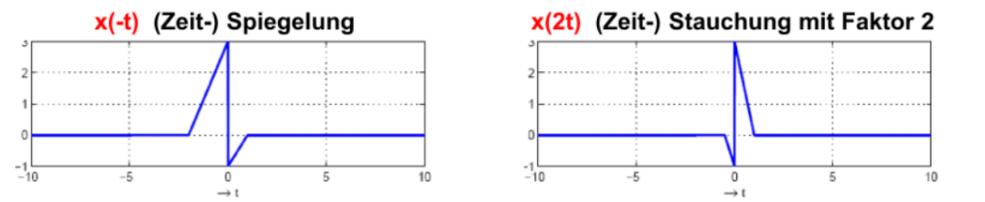
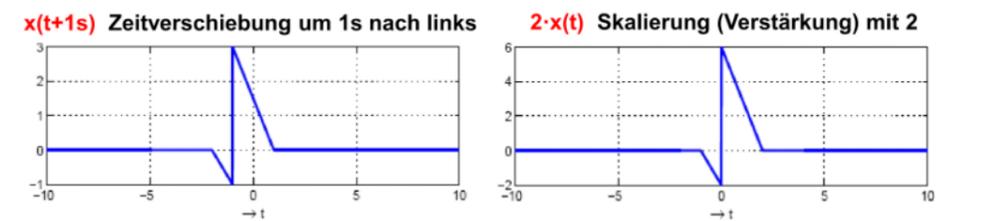
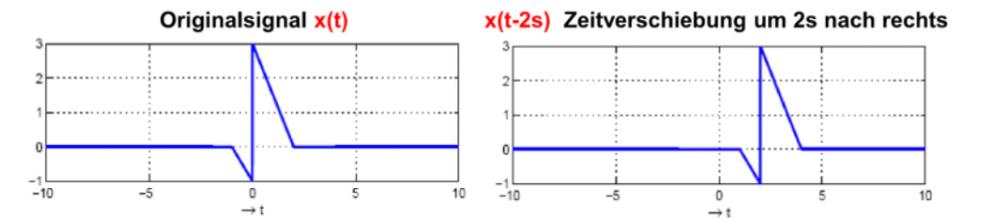
Die meisten Signale sind eine Mischung aus gerade und ungerade

Ungerade Signale

- Punktsymmetrisch zum Ursprung
 - Für alle t gilt: $x(-t) = -x(t)$
- Sin(...) ist ungerade



Signaloperationen im Zeitbereich



Mittelwerte

Linearer Mittelwert (Gleichanteil bzw. "DC-Wert")

- eines Signals

$$X_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt = \bar{X}$$

- eines periodischen Signals

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot dt$$

← Integral über 1 Periode T_0

Quadratischer Mittelwert (mittlere normierte Leistung P_n)

- eines Leistungs-Signals

$$X^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) \cdot dt$$

- eines periodischen Signals

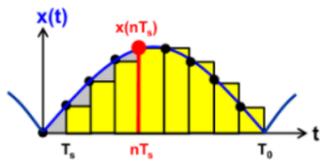
$$X^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) \cdot dt$$

Werte für bestimmte Signale

	DC-Wert	Leistung	Effektivwert
DC-Signal $x(t) = A$	$X_0 = A$	$X^2 = A^2$	$X_{eff} = A$
Periodisches Rechteck $x(t) = rect(t)$	$X_0 = 0$	$X^2 = A^2$	$X_{eff} = A$
Sinus-Signal $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$X_0 = 0$	$X^2 = A^2/2$	$X_{eff} = A/\sqrt{2}$
Sinus-Betragsignal $x(t) = A \cdot \sin(\omega t) $	$X_0 = (2/\pi) \cdot A$	$X^2 = A^2/2$	$X_{eff} = A/\sqrt{2}$

Linearer Mittelwert eines periodischen Signals $x(t)$

- Annahme: 1 Periode T_0 besteht aus N Abtastperioden T_s , d.h. $T_0 = N \cdot T_s$
- Approximation Integral mit Summe der Rechtecke $x(nT_s) \cdot T_s$, $n = 0, \dots, N-1$



$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot dt \approx \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \cdot T_s$$

- Approximation des DC-Werts:

```

x0 = 0;
for n = 1:N,
    x0 = x0 + x(n);
end
X0 = x0/N
% oder kürzer X0 = sum(x)/N
    
```

$$X_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Fourierreihe

Jede **periodische** Funktion **s(t)** kann durch eine Summe harmonischer Schwingungen dargestellt werden

$$\omega = 2\pi f_0$$

Linienspektrum (reelle Schreibweise)

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot k \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(2\pi f_0 k \cdot t)$$

Gerader Signalanteil

- Cosinus-Amplitudenspektrum

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cos(\omega k \cdot t) dt, \quad k \geq 0$$

$$A_k = M_k \cdot \cos(\varphi_k)$$

$$A_k = \operatorname{Re}(c_k)$$

Ungerader Signalanteil

- Sinus-Amplitudenspektrum

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \sin(\omega k \cdot t) dt, \quad k \geq 1$$

$$B_k = M_k \cdot \sin(\varphi_k)$$

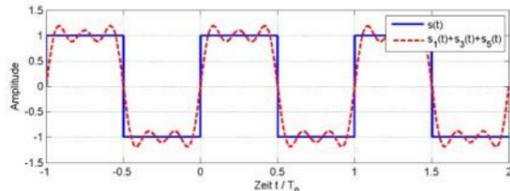
$$B_k = \operatorname{Im}(c_k)$$

Linearer Mittelwert, DC-Anteil

$$S_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) dt$$

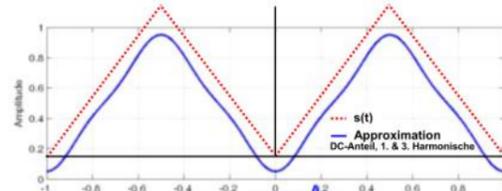
Beispiele

- Rechtecksignal (periodisch, ungerade)



$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cdot [\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi \cdot 3f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi \cdot 5f_0 t) + \dots]$$

- Dreieck-Signal (periodisch, gerade)



$$s(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1,3,5} \frac{-4}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k f_0 t)$$

Allgemein gilt (siehe z.B. periodisches Dreiecksignal):

Jedes periodische Signal, das stetig ist, aber nicht-differenzierbare (Knick-) Stellen aufweist, enthält hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $1/k^2$ abnehmen.

Allgemein gilt (siehe z.B. periodisches Rechtecksignal):

Jedes periodische Signal, das unstetige (Sprung-) Stellen aufweist, enthält „hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $1/k$ abnehmen.

Betrag-Phasen-Darstellung

- $s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot t + \varphi_k)$
 - $M_0 = \frac{A_0}{2}$
 - $M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad k > 0$
 - $\varphi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right), & \text{für } A_k \geq 0 \\ -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \pm \pi, & \text{sonst} \end{cases}$

Komplexe Darstellung

1. $s_k(t) = A_k \cdot \cos(\omega k t) + B_k \cdot \sin(\omega k t)$
 - a. Eine Komponente bei $k \cdot f_0$
2. $s_k(t) = \frac{A_k}{2} \cdot (e^{j\omega k t} + e^{-j\omega k t}) + \frac{B_k}{2j} \cdot (e^{j\omega k t} - e^{-j\omega k t})$
3. $s_k(t) = \underbrace{\left(\frac{A_k}{2} - j\frac{B_k}{2}\right)}_{c_k} \cdot e^{j\omega k t} + \underbrace{\left(\frac{A_k}{2} + j\frac{B_k}{2}\right)}_{c_{-k}} \cdot e^{-j\omega k t}$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\omega k t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot e^{-j\omega k t} dt$$

Umwandlungen mit A_k / B_k

- $c_0 = \frac{A_0}{2}$
- $c_k = \frac{1}{2} (A_k - j \cdot B_k) = c_{-k}^*$

Umwandlung mit M_k / φ_k

- $M_0 = c_0$
- $M_k = 2|c_k|, \quad k > 0$
- $\varphi_k = \arg(c_k)$

Zeit-Signal

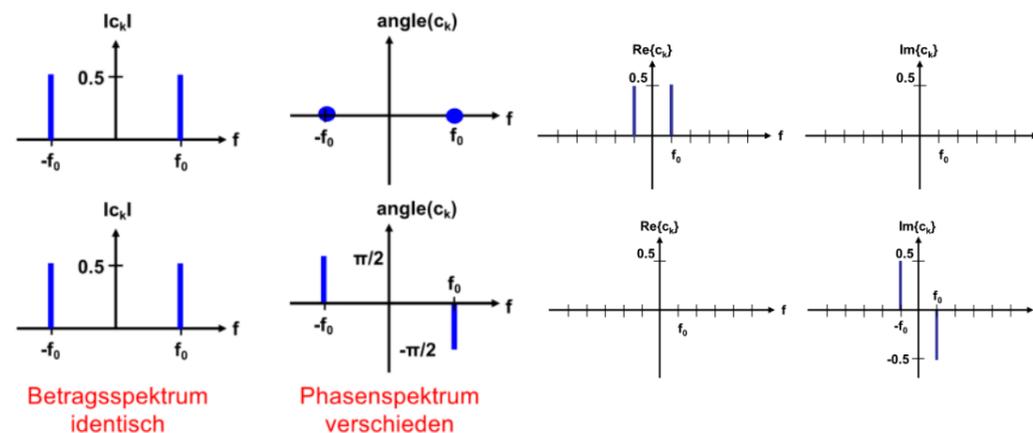
$$\frac{\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)}{2}$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\frac{\sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)}{2i}$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

zweiseitiges Betrags- und Phasenspektrum



Leistungsberechnungen

Die Harmonischen sind orthogonal

deshalb dürfen DC-Leistung und AC-Leistungen **addiert** werden

$$s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t + \varphi_k)$$

$$\text{DC-Leistung} \quad P_0 = M_0^2 = |c_0|^2 = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2$$

$$\text{AC-Leistung} \quad P_k = \frac{M_k^2}{2} = |c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} \quad k > 0$$

Satz von Parseval

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = M_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{2} = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Numerische Approximation der Fourierkoeffizienten

N Abtastwerte pro Periode, d.h. $T_0 = N \cdot T_s$, und numerisch integrieren

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$A_k \approx \frac{2}{N T_s} \sum_{n=0}^{N-1} s(n T_s) \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{k \cdot n}{N}) \cdot T_s$$

Numerische Approximation

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt \approx \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{k \cdot n}{N}) \quad k \geq 0$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi k f_0 t) dt \approx \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{k \cdot n}{N}) \quad k \geq 1$$

Fouriertransformation (FT)

Durch die Fouriertransformation kann man nicht periodische Signale "periodisch" darstellen

Dazu kopiert man das signal und lässt den Abstand dazwischen gegen unendlich gehen. (somit hat man 1 Signal das sich in +/- unendlich wiederholt)

Definition

Linienspektrum --> Amplitudendichtespektrum

$$s(t) \quad S(f)$$

$$S(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{c_k}{T_0} \right), \quad \text{wobei } c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 k t} dt,$$

$$f = k \cdot f_0$$

$$\Rightarrow S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$S(f) = |S(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}$$

Fourierspektrum, Betragsspektrum, Phasenspektrum

Eigenschaften

Linearität

$$x(t) = a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \quad \mapsto \quad X(f) = a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f)$$

Zeitverschiebung

$$x(t) = s(t - t_0) \quad \mapsto \quad X(f) = S(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

- Darstellung in Polarform

$$|X(f)| \cdot e^{j\varphi_x(f)} = |S(f)| \cdot e^{j\varphi_s(f) - 2\pi f t_0}$$

$$\Rightarrow \varphi_x(f) = \varphi_s(f) - 2\pi f t_0$$

$$\Rightarrow |X(f)| = |S(f)|$$

- Das Betragsspektrum bleibt gleich
- Das Phasenspektrum erfährt eine **Phasendrehung**

Zeitskalierung

$$x(t) = s(a \cdot t) \quad \mapsto \quad X(f) = \left(\frac{1}{|a|} \right) \cdot S\left(\frac{f}{a}\right)$$

- Fall $a > 1$: Verkürzung von Signaldauer $s(t)$
 \Leftrightarrow breiteres Spektrum $S(f)$
- Fall $a < 1$: Dehnung von Signaldauer $s(t)$
 \Leftrightarrow schmaleres Spektrum $S(f)$

Zeit-Bandbreite-Produkt

Je „kürzer“ ein Puls-Signal ist, desto „größer“ ist die Bandbreite des Spektrums. Umgekehrt haben „lang“ dauernde Einzelpulse schmale Spektren.

Bandbreite und Dauer eines Pulssignals können also nicht unabhängig von einander gewählt werden. **Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist eine Konstante.**

$$\text{Pulsdauer mal Bandbreite } \tau \cdot B \approx 1$$

$$\tau \cdot B \approx \text{const.}$$

Dualität

$$s(t) \quad \mapsto \quad S(f)$$

$$S(t) \quad \mapsto \quad s(-f)$$

- Bsp:

- Rect-sinc

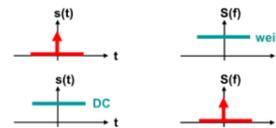
$$\text{rect}(t) \quad \mapsto \quad \text{sinc}(f)$$

$$\text{sinc}(t) \quad \mapsto \quad \text{rect}(-f)$$

- Dirac-konst

$$s(t) = \delta(t) \quad \mapsto \quad S(f) = 1$$

$$s(t) = 1 \quad \mapsto \quad S(f) = \delta(f)$$

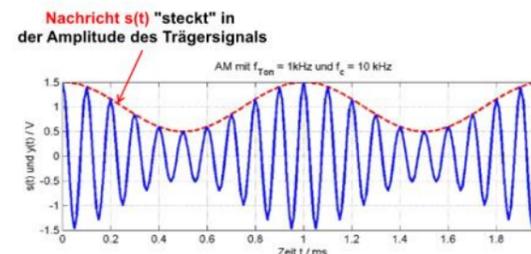
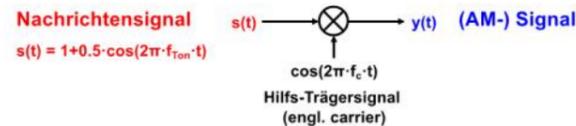


Frequenzverschiebung

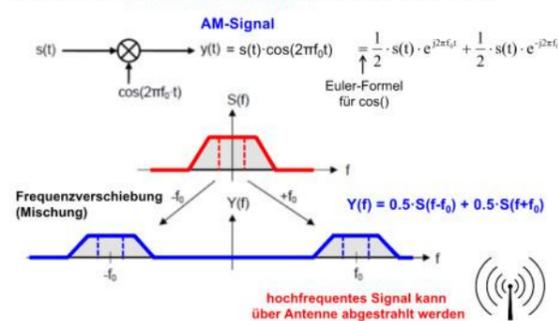
$$x(t) = s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \mapsto \quad X(f) = S(f - f_0)$$

- Dual zu Zeitverschiebung
- Verschiebt Frequenz um f_0 nach rechts

- Bsp. **Amplitudenmodulation (AM)**



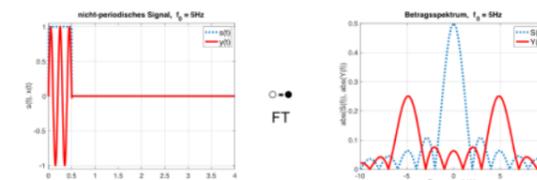
Multiplikation Nachrichtensignal s(t) mit cos(-Träger)-Signal



$$y(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = 0.5 \cdot S(f - f_0) + 0.5 \cdot S(f + f_0)$$

Multiplikation mit $\cos(2\pi f_0 t)$ \Leftrightarrow **Frequenzverschiebung um**
 $+f_0$ (nach rechts) und $-f_0$ (nach links)

Beispiel: $s(t)$ ist nicht-periodisches rechteckförmiges Signal



Differentiation / Integration

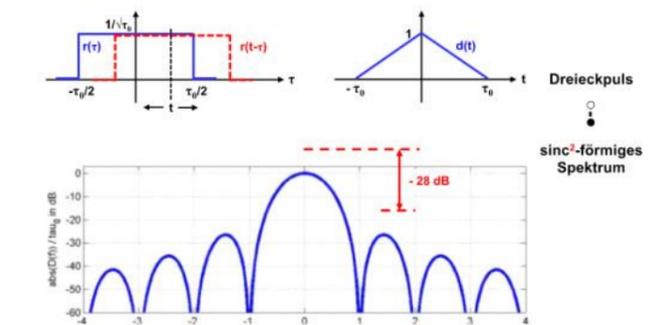
$$\frac{d^n}{dt^n} s(t) \quad \mapsto \quad (j2\pi f)^n \cdot S(f)$$

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \quad \mapsto \quad \frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f)$$

Faltung

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad \mapsto \quad X(f) \cdot Y(f)$$

Faltung Rechteckpuls der Dauer τ_0 mit sich selbst



Symmetrie

$$s(t) \text{ reell} \quad \mapsto \quad S(-f) = S^*(f)$$

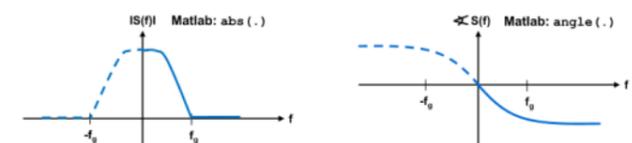
$$z = |z| \cdot e^{-j\varphi z}$$

$$z^* = |z| \cdot e^{j\varphi z}$$

$$s(t) \text{ reell, ungerade} \quad \mapsto \quad S(f) \text{ imaginär} \quad (\text{z.B. } \sin())$$

$$s(t) \text{ reell, gerade} \quad \mapsto \quad S(f) \text{ reell} \quad (\text{z.B. } \cos())$$

Beispiel Spektrum eines reellen Signals



Betragsspektrum (gerade Funktion)
 $|S(-f)| = |S(f)|$

Phasenspektrum (ungerade Funktion)
 $\text{angle}(S(-f)) = -\text{angle}(S(f))$

Signalenergie

Berechnen mit Satz von Parseval (normiert auf 1Ω)

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

FT eines periodischen Signals

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \quad \circ \bullet \quad S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - k f_0)$$

periodisches Signal
(Darstellung als Fourierreihe)

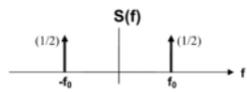
"Linien"-Spektrum
(Dirac-Impulse statt Linien)

Beweis: Verwende

1. Linearitätseigenschaft der FT
2. Identität $c_k \circ \bullet c_k \cdot \delta(f)$
3. Frequenzverschiebungseigenschaft der FT

Beispiel

Amplitudendichtespektrum des cos-Signals $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$



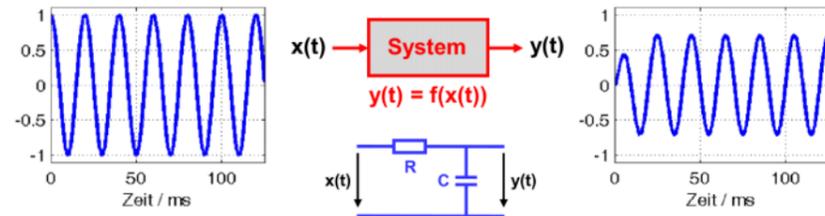
$$S(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

LTI-Systeme

Lineare und time-invariante Systeme

System

Ein System transformiert ein Eingangssignal $x(t)$ in ein **Ausgangssignal / Schrittantwort $y(t)$** .



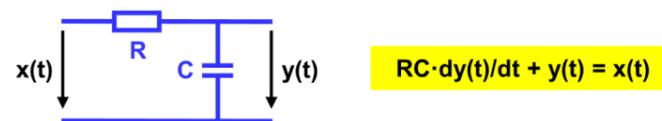
Statische Systeme

Ausgangswert hängt nur vom aktuellen Eingangswert ab. z.B. Widerstandsnetzwerk

Dynamische Systeme

Ausgangswert hängt vom aktuellen Eingangswert, sowie von alten Ein- und Ausgangswerten ab. Es enthält Speicherelemente (L und/oder C) Wird beschrieben durch DGL

Beispiel: RC-Tiefpass-Filter 1. Ordnung



Linearität

$$x(t) = k_1 \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t) \Rightarrow y(t) = k_1 \cdot y_1(t) + y_2(t)$$

- Linearität bei Kapazität wenn $u_c(0) = 0$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) \cdot d\tau + u_c(0)$$

- Integrator

Zeitinvarianz

Systemeigenschaften (aussehen der Kurve) **ändert sich nicht** wenn man es in der **Zeit verschiebt**.

Kausalität

Kausalsysteme reagieren erst dann mit einem Ausgangssignal, wenn ein Eingangssignal anliegt.

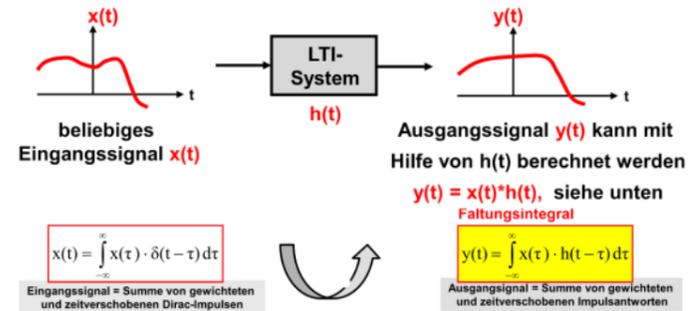
Stabilität

Bounded input = Bounded output (BiBo)

Ein im Eingang mit Grenze A beschränktes Signal ist im Ausgang um Grenze B beschränkt.

Stoss- / Impulsantwort $h(t)$

Die Stossantwort $h(t)$ beschreibt ein LTI-System vollständig. Meist ein Filter (z.B. Tiefpass)



Faltung zu t_0

$$y(t_0) = \int_a^{t_0} x(t) \cdot h(t_0 - t) dt$$

Achtung! Hier $t_0 - t$, a ist untere Grenze (gegeben durch $x(t)$)

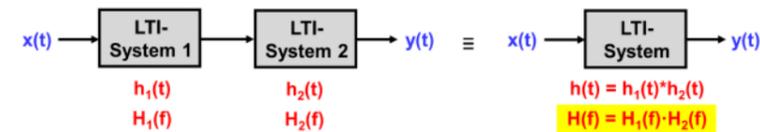
Fouriertransformation

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow FT \rightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

- Amplitudengang
 $|H(f)| = \frac{|Y(f)|}{|X(f)|}$
- Phasengang
 $\varphi_H(f) = \varphi_Y(f) - \varphi_X(f)$

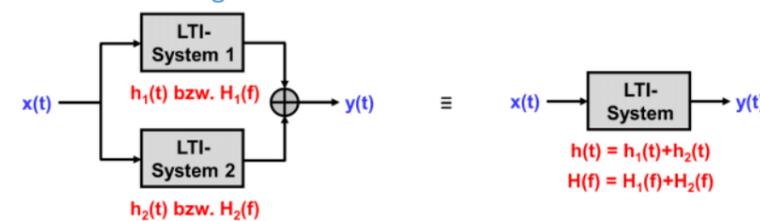
Zusammenschaltung von LTI-Systemen

Serieschaltung (Kaskadierung)

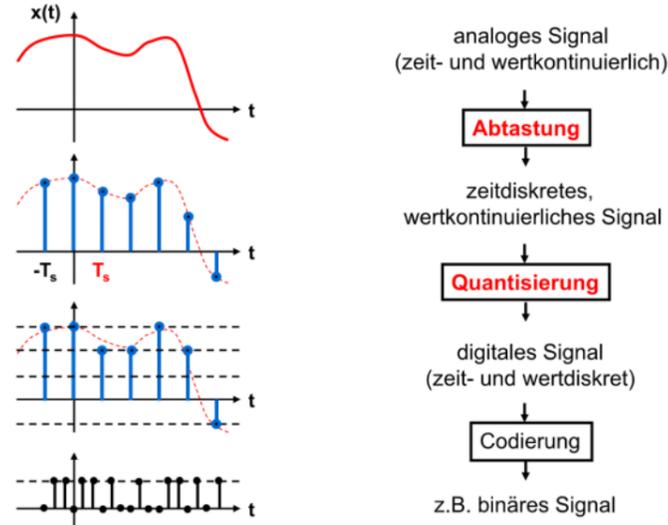


Im Zeitbereich Faltung der Stossantworten.

Parallelschaltung



Digitale Signale



Abtastung (Sampling)

Schritte entlang der Zeitachse

Ideale Abtastung

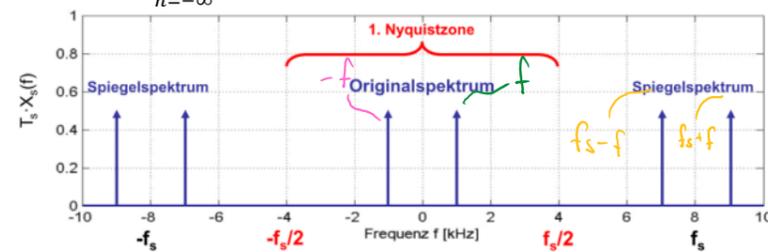
- Zeitbereich



$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s) = \frac{1}{T_s} \cdot x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot f_s \cdot t}$$

- Frequenzbereich

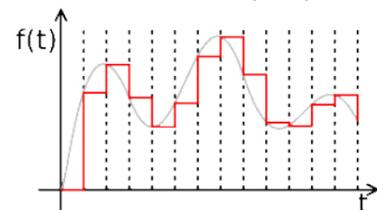
$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n \cdot f_s)$$



Reales Sampling

- Sample and hold (SAH)

Idee: Zero order Hold (ZOH), Praktisch: SAH

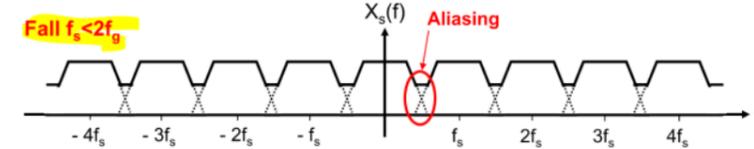


- Successive Approximation (SAR) ADC (Analog zu Digital Converter)

Aliasing & Rekonstruktion

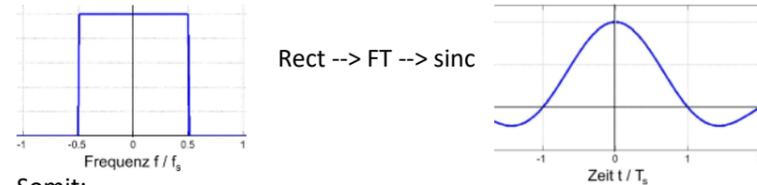
$x(t)$ kann nur aus $x_s(t)$ rekonstruiert werden, wenn $f_s > 2 \cdot f$.

Ansonsten überschneiden sich die Frequenzen. Das führt zu Aliasing

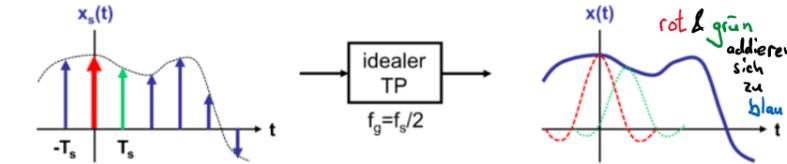


z.B. Stossantwort = Tiefpass

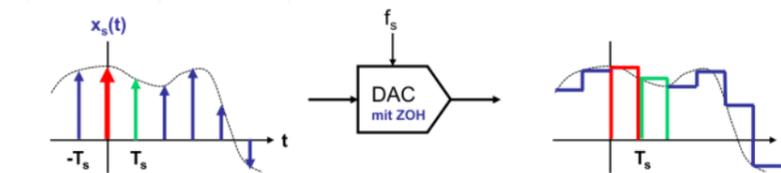
- ideal



Somit:

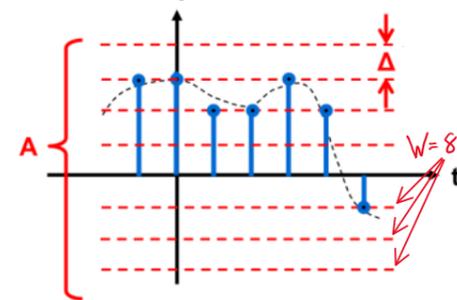


Real mit ZOH



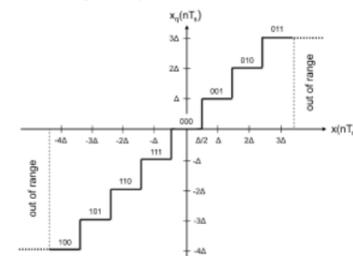
Quantisierung

Schritte entlang der Wertachse



A = Aussteuerbereich ($2 \cdot$ Amplitude)

$\Delta = A/2^W$, W = Wortbreite ADC in bits



Quantisierungsrauschen

Signal zu Quantisierungsrauschen SNR

$$P_\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}, \quad \Delta = \frac{A}{2^W}$$

$$SNR = \frac{P_{Signal}}{P_{Q-Rauschen}} = \frac{P_x}{P_\epsilon} = \frac{(2^W)^2 \cdot P_x \cdot 12}{A^2}$$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot W + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{12 \cdot P_x}{A^2} \right)$$

- SNR von Sinus mit Vollaussteuerung
 $SNR_{dB} = 6,02 \cdot W + 1,76$
- Bei nur X Anteil Ansteuerung
 $SNR_{dB} = 6,02 \cdot W + 1,76 - 20 \cdot \log_{10}(X)$
z.B. $X = 1/10$, $W = 10$

$$SNR_{dB} = 6,02 \cdot 10 + 1,76 - 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{10} \right) = 41,96 \text{ dB}$$

Mit jedem Bit mehr Wortlänge wird SNR um 6 dB erhöht bzw. A halbiert

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Die DFT berechnet aus N äquidistanten Stützstellen $x[n]$ im Zeitfenster $0 \dots (N-1) \cdot T_s$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, N-1$$

hat eine **Frequenzauflösung**

$$\Delta f = f_0 = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N \cdot T_s} = \frac{1}{T_0}$$

Die Inverse Diskrete Fourier Transformation IDFT, berechnet aus N komplexen Spektralwerten $X[k]$ im Frequenzbereich $0 \dots (N-1) \cdot f_0$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{mit } n = 0, 1, \dots, N-1$$

ist die eindeutige Umkehrung der DFT.

$$T_{DFT} = N \cdot T_s$$

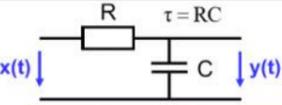
T_{DFT} = Beobachtungsfenster der DFT

Darstellung LTI-Systeme

Zeitbereich	Frequenzbereich
Differentialgleichung	Frequenzgang
Impulsantwort	Bode-Diagramm
Schritt Antwort	Übertragungsfunktion
Blockdiagramm	PZ-Map (Pol-Nullstellen)

Zeitbereich

Dgl



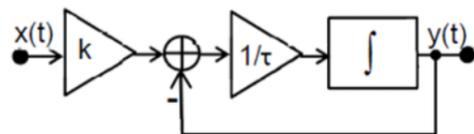
$$\tau \cdot \dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

Berechnen wir die ODE-Lösung für $x(t) = u(t)$ Schrittfunction, so dass $y(t)$ die Sprungantwort ist

Aus der Mathematik	$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
homogene Lösung für $x(t)=0$	partikuläre Lösung für bestimmtes $x(t)$
Homogene Lösung $\tau \cdot \dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0$	Ansatz: $y_h(t) = A \cdot e^{st}$
$A \cdot e^{st} \cdot [\tau \cdot s + 1] = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{\tau}$	$\rightarrow y_h(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Partikuläre Lösung $\tau \cdot \dot{y}_p(t) + y_p(t) = 1$	Ansatz: $y_p(t) = b \cdot 1 = b$
Lösung gültig für $t > 0$ (um Unstetigkeiten zu vermeiden, und einfachere/kürzere Schreibweise)	
Beide Lösungen summieren Annahme Anfangsbedingungen = 0 und Lösung gültig für $t > 0$	$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + b$ $\dot{y}(t) = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Einsetzen in Differential Gleichung	$-A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + (A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + b) = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$

Blockdiagramme

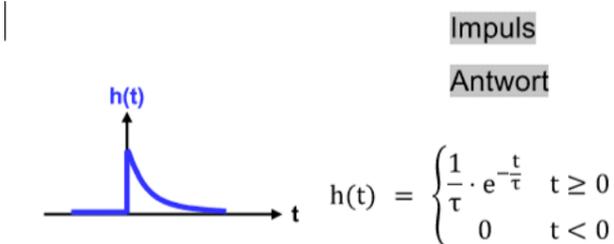
Nicht Prüfungsrelevant



Schrittantwort



Sprungantwort



Frequenzbereich

$$s = \sigma + j\omega, \quad \omega = 2\pi \cdot f$$

Frequenzgang

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) = X(f) \text{ wenn } \sigma = 0$$

Übertragungsfunktion

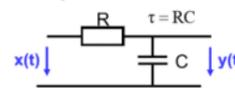
Übertragungsfunktion (UTF, engl. transfer function)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Die (b,a)-Systemkoeffizienten charakterisieren die UTF $H(s)$ bzw. legen das LTI-Systemverhalten vollständig fest.

- Bsp

Beispiel 1



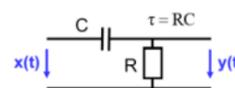
DGL $\tau \cdot dy(t)/dt + y(t) = x(t)$

Systemkoeffizienten: $a_1 = \tau, a_0 = 1, b_0 = 1$

UTF $H(s) = \frac{b_0}{a_1 \cdot s + a_0} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$

Tiefpass $H(f) = H(s = j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}$

Beispiel 2



Ansatz Spannungsteiler (statt DGL)

UTF $H(s) = \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} = \frac{b_1 \cdot s}{a_1 \cdot s + a_0}$

Hochpass $H(f) = H(s = j\omega) = \frac{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}{1 + j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}$

Pol- / Nullstellen

$$H(s) = \frac{b_m \cdot (s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{a_n \cdot (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

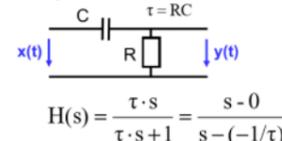
z_i = Nullstellen (zero)

p_i = Polstellen

Darstellung der Lage der Pole und Nullstellen im PN-Schema

Pole werden mit "X" und Nullstellen mit "O" in der s-Ebene eingetragen

Beispiel:

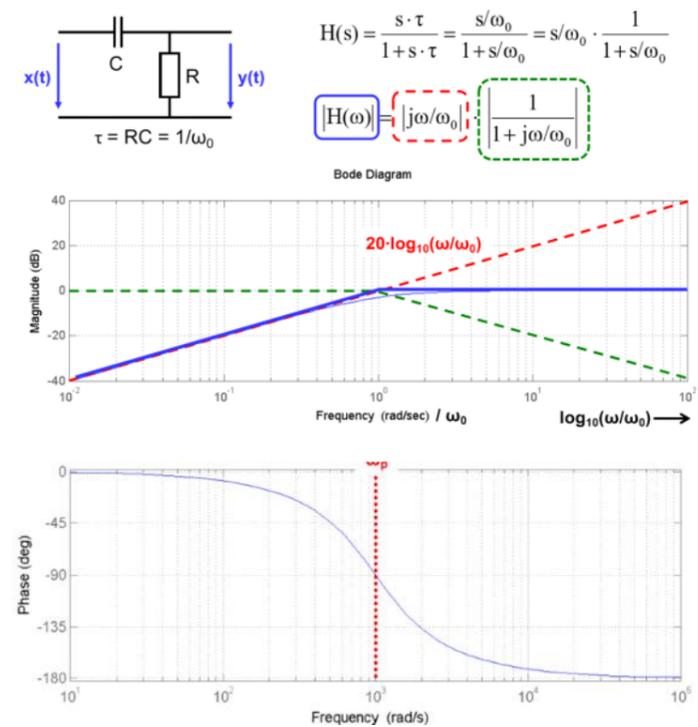


$z_0 = 1$

$p_1 = -1/\tau$

Bodediagramm

Beispiel



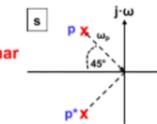
- Kombination von bekannten Systemen (siehe oben)
- Betrag & Phase an verschiedenen Stellen berechnen und einzeichnen.

Beispiel

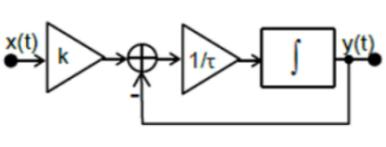
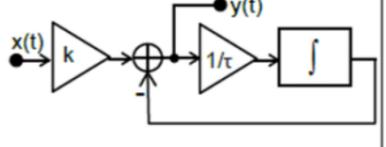
LTI-System mit **konjugiert komplexem Polpaar**

$$H(s) = \frac{b_0}{(s - p) \cdot (s - p^*)}$$

gegeben: $p = \omega_p \cdot (-\cos(\pi/4) + j \cdot \sin(\pi/4))$ und $\omega_p = 1000 \text{ rad/s}$



Darstellungsbeispiele

View of LTI System	1 st Order Low Pass Filter	1 st Order High Pass Filter
Differential Equation	$\tau \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot x(t)$	$\tau \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot \tau \cdot \dot{x}(t)$
Block diagram		
Step response with zero initial conditions and for $t \geq 0$	$y(t) = k \cdot [1 - e^{-t/\tau}]$	$y(t) = k \cdot e^{-t/\tau}$
Impulse response with zero initial conditions and for $t \geq 0$	$h(t) = +\frac{k}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$ Parameters: k : gain ; τ (tau) : time constant	$h(t) = \delta(t) - \frac{k}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$
Frequency response	$H(\omega) = \frac{k}{j\omega\tau + 1} = \frac{k}{j2\pi f\tau + 1}$	$H(\omega) = k \cdot \frac{j\omega\tau}{j\omega\tau + 1} = k \cdot \frac{j2\pi f\tau}{j2\pi f\tau + 1}$
Bode Diagram	Amp: 0dB/dec -3dB -20dB/dec Phase: 0° -45° -90°	Amp: +20dB/dec -3dB 0dB/dec Phase: +90° +45° 0°

Allpol-filter

Haben keine Nullstellen

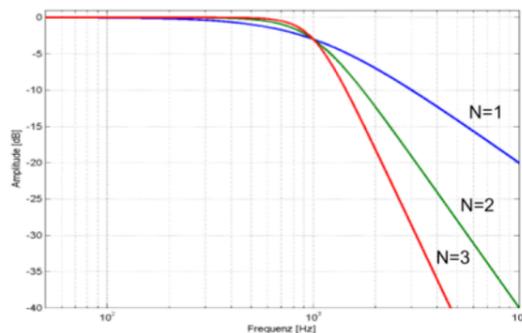
$$H(s) = \frac{b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

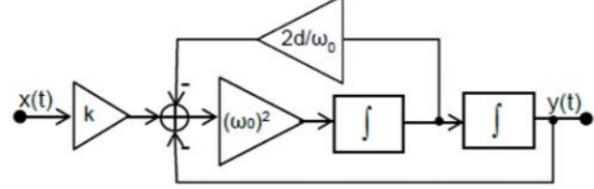
Asymptote für $\omega \rightarrow \infty$: **n mal -20 dB** pro Dekade bzw. **-n · $\pi/2$**

Tiefpass-Approximationen nach Butterworth führt auf Allpol-Filter

Butterworth-TP N. Ordnung

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{DB})^{2N}}}$$



View of LTI System	2nd Order Low Pass Filter
Differential Equation	$\ddot{y}(t) + (2d\omega_0) \cdot \dot{y}(t) + (\omega_0^2) \cdot y(t) = (k\omega_0^2) \cdot x(t)$
Block diagram	
Frequency response	$G(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{(j\omega)^2 + (2d\omega_0)(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{k}{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + (2d)(j\frac{\omega}{\omega_0}) + 1}$ Parameters: k : gain ; d : damping constant; ω_0 : natural angular frequency [rad/s] Alternative with Q : quality factor ; and Ω : normalised frequency: $G(\omega) = \frac{k}{(j\Omega)^2 + (\frac{1}{Q})(j\Omega) + 1}$ where $Q = \frac{1}{2d}$ and $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$
Bode Diagram	Amp: 0dB/dec -20 log(1/2d) -40dB/dec Phase: 0° -90° -180°

Characteristic Equation	$s^2 + (2d\omega_0) \cdot s + (\omega_0^2) = 0$
Roots of the characteristic equation	$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - d^2} = -\sigma_e \pm j\omega_e$ $d > 1$ over-damped $d = 1$ critically damped $0 < d < 1$ under-damped
Step response with zero initial conditions and for $t \geq 0$	$h(t) = k \cdot [1 - Ae^{-\sigma_e t} \cdot \sin(\omega_e t + B)]$; $A = \frac{1}{\sqrt{1 - d^2}}$; $B = \arccos(d)$