Mengen

$\mathbb{N}$ = Natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$ = " " mit 0

$\mathbb{Z}$ = Ganze Zahlen
$\mathbb{Z}^*$ = " " ohne Null

$\mathbb{Q}$ = Rationale Zahlen

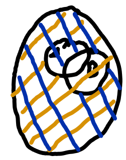
$\mathbb{R}$ = Reele Zahlen (alle)

Menge $= \{Element, Element\} \Rightarrow 2$ $M = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\} \Rightarrow 3E$

Infimum = grösste untere Schranke ⇒ Minimum wenn $\inf(M) \in M$
Supremum = kleinste obere Schranke ⇒ Maximum wenn $\sup(M) \in M$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cap B}$



$\bar{A} \cup \bar{B}$

$\boxed{B \times A = \{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}}$

Wurzelgleichungen

$\sqrt{x+11} + 1 = x \quad | -1$
$\sqrt{x+11} = x - 1 \quad | (\dots)^2$
$x + 11 = (x-1)^2$

Betragsgleichungen

$|x+2| = 3 \quad | (\dots)^2$
$(x+2)^2 = 9$

Fallunterscheidung:

$x \geq -2 \quad | \quad x < -2$
$x + 2 = 3 \quad | \quad -x - 2 = 3$

Bemerkung: Es gibt auch mehrere Lösungen !

Ungleichungen

$\dots < 0$ ⇓ negativ $\dots > 0$ ⇓ positiv

Funktionen

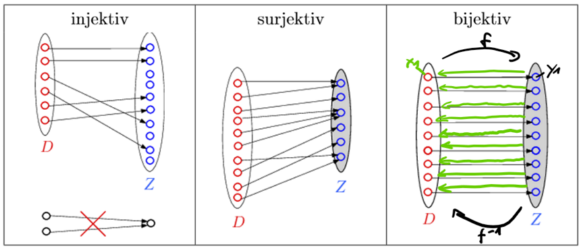
Scheitelpunktform: $a(x-x_S)^2 + y_S$ Bsp.: $(x-5)^2 + 2$

$\boxed{x_S = \frac{-b}{2a}}$ $\boxed{y_S = c - \frac{b^2}{4a}}$ $S(5,2)$

Unbestimmte Integrale:
$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

Bestimmte Integrale:
$\int_2^{12} 17\,dx = 17[x]_2^{12} = 17(12-2) = 17 \cdot (10) = \underline{\underline{170}}$

Graphik:
$\Gamma(f) \Rightarrow$ Menge aller Paare
$f(2)=2 \quad f(3)=3 \quad f(4)=0 \Rightarrow \Gamma(f) = \{(2,2),(3,3),(4,0)\}$



Operationen

$g \circ f = g(f(x)) = 2(4x+6)+1$ $\mathbb{D}_f =$ $\mathbb{D}_g =$
$g = 2x+1 \quad f = 4x+6$ $\mathbb{Z}_f =$ $\mathbb{Z}_g =$

Umkehrfunktion:

Bemerkung: Umkehrbar wenn Bijektiv

$f^{-1}(f(x))$. nach x umformen

Gerade: $f(-x) = f(x)$
Ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Polynomdivision:
Ab x^3, wenn x nicht ausklammerbar
Vielfachheit = Bsp.: $(x-1)^2$

Rationale Funktionen:

$f(x) = \frac{\dots^m}{\dots^n}$ $n = 0 \Rightarrow$ ganzrational
$n > m \Rightarrow$ echt gebrochenrational / waagrechte Asymptote: x-Achse
$n \leq m \Rightarrow$ unecht gebrochenrational / $n = m$ $\frac{2 \cdot 10^{12}}{10^{12}} = 2 \Rightarrow y = 2$

⇒ Polynomdivision

Bsp.: $(x^2+1) : (x^2-1) = 1$
$\quad -x^2 - 1$
$\quad \overline{\quad 2 \quad}$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 1 \cdot (x^2-1) + 2$
$= \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$

Bsp.: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+2} = \frac{x^2-4x+4}{x+2} = x - 6 + \frac{16}{x+2}$ ⇑ Polynomdivision
→ Polstelle: -2 mit Ordnung 1
→ unecht gebrochenrational
→ vertikale Asymptote : $x = -2$
→ Asymptote im Unendlichen: $y = x - 6$

$\boxed{\text{Stetig hebbar} : n \leq m \quad \text{Polstelle} : n > m}$

Exponentialfunktionen:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2. $(a^x)^y = a^{xy}$ 3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

1. $\log_a(u\,v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^n) = n \log_a(u)$
4. Basiswechsel: $\log_a(u) = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$ für eine Basis $b > 0$ mit $b \neq 1$

$\boxed{r = a^x \quad \log_a(r) = x}$

Periode:

$\cos(x) = \cos(x+2p)$

$\sin(x) = \sin(x+2p)$

$\tan(x) = \tan(x+p)$

$\boxed{2p = 2\pi}$

$\boxed{t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}}$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Harmonische Schwingung:
$A\sin(\omega t + \varphi)$

Folgen

$\boxed{a_n + (m-n) \cdot d = a_m}$

arithmetische Folge:

Aufzählende Darstellung	Explizite Darstellung	Implizite Darstellung
$a_1 = c,\ a_2 = c+d,\ a_3 = c+2d, \ldots$	$a_n = c + (n-1)d$	$a_1 = c,\ a_{n+1} = a_n + d$

$\boxed{a_0(1-q)^n = a_n \quad a_0(1-q)^m = a_m} \Rightarrow \boxed{(1-q)^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}}$

geometrische Folge:

Aufzählende Darstellung	Explizite Darstellung	Implizite Darstellung
$a_1 = c,\ a_2 = c \cdot q,\ a_3 = c \cdot q^2, \ldots$	$a_n = c \cdot q^{n-1}$	$a_1 = c,\ a_{n+1} = q \cdot a_n$

Grenzwerte Folge:

$|a_n - g| = |\ldots\ldots| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

Grenzwerte

$N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = 3$ — g; a_n

- Wenn Folge Grenzwert → konvergent
  sonst divergent

- bestimmt divergent gegen ∞ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
- bestimmt divergent gegen $-\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- unbestimmt divergent → wenn Folge alterniert

Nullfolge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

untere Schranke

- nach unten beschränkt $m \leq a_n$
- nach oben beschränkt $a_n \leq M$ — obere Schranke

} Wenn beide → beschränkt / weder noch → unbeschränkt

Wenn Folge bestimmt divergent!

Harmonische Folge	n-te Wurzeln	Geometrische Folge
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a \in \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lvert q \rvert < 1, \\ +\infty, & \text{falls } q > 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ \text{existiert nicht}, & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$

Summe	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$	a	a	$+\infty$	$-\infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Produkt	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$	$a > 0$	$a < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n =$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Quotient	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$	a		$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$	$\pm\infty$		$b > 0$	$b < 0$
	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$	0		$\pm\infty$	$\mp\infty$

Satz 4.1.5. Rechnen mit Grenzwerten

Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ sind, und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, dann existieren auch die folgenden Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\,a$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\,b$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k$ für $k \in \mathbb{N}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[k]{a}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Grenzwerte Funktionen

g_l → Linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = g_l$

g_r → rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = g_r$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0,\ k \in \mathbb{R}$ und $a > 0$

Satz 4.2.2. Rechenregeln für Grenzwerte von F

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen, und seien c, x
die Grenzwerte der Funktionen f und g existieren, gelt

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

(6) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^k = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^k$

(7) $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

(8) $\lim\limits_{x\to x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

Polynomfunktionen

Satz 4.2.3. Das Verhalten von Polynomfunktionen im Unendlichen hängt nur von ihrem höchsten Monom ab:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$

wobei

$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n gerade	$+\infty$	$-\infty$
n ungerade	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + \ldots}{n^3 + \ldots} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 + \ldots}{2n^2 + \ldots} = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^3 + \ldots}{2n^2 + \ldots} = -\infty \ / \infty$ wenn $+$

Stetigkeit von Funktionen

Sind auf gesamten Definitionsbereich stetig: - Polynomfunktion
- sin, cos, tan
- Logarithmus & Exponentialfunktion

Nicht stetig → Stellen heissen Unstetigkeiten: - stetig hebbare Lücke - Wenn lim = 0 ⇒ Wenn Funktionswert bestimmen, dann Limes berechnen
- Sprungstellen - wenn lim = 1
- Polstellen - Wenn lim = ∞

Reihen

Summe: $\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} \dots$

Satz 4.4.1. (Rechenregeln für endliche Summen) $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{m, m+1, \dots, n\}$, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann gel

1. $\sum_{k=m}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$
2. $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=m}^{\ell} a_k + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k$ für $m \le \ell \le n$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist*

$$\begin{cases} \text{unbestimmt divergent,} & \text{falls } q \le -1, \\ \text{absolut konvergent mit Wert } \frac{1}{1-q}, & \text{falls } -1 < q < 1, \\ \text{bestimmt divergent gegen } +\infty, & \text{falls } q \ge 1. \end{cases}$$

n-te Partialsumme:

arithmetische Folge:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1) \cdot d) = n\,a_1 + d\,\frac{(n-1)\,n}{2}.$$

geometrische Folge:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1\,q^{k-1} = a_1 + a_1\,q + a_1\,q^2 + \dots + a_1\,q^{n-1} = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q},$$

Partialsumme → (unendliche) Reihe

$\langle s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \rangle : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \lim_{n \to \infty} s_n$ ⇒ geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \Rightarrow \boxed{s_n = \frac{1}{1-q}}$

Wenn $\sum_{k=1}^{n} k$, dann $\boxed{s_n = \frac{n(n+1)}{2}}$ Wenn $k \neq 1$, dann $\boxed{s_n = q \cdot (n-k+1)}$

Wenn $\sum_{k=1}^{n} k^2$ $\boxed{s_n = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}}$ Wenn $k=0$, dann $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$

Satz 4.4.2. Konvergenzkriterien für Reihen

1. Trivialkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$ } Äquivalent zu
   (d. h. $\langle a_n \rangle$ ist notwendigerweise eine sog. Nullfolge).
2. Leibniz-Kriterium (nach G. W. Leibniz, 1682):
   Eine (alternierende) Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ist konvergent, falls $\langle a_n \rangle$ eine monotone Nullfolge ist.
3. Quotientenkriterium:
   Sei $L := \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist
   - absolut konvergent, falls $L < 1$,
   - divergent, falls $L > 1$.

   Falls $L = 1$ oder falls der Grenzwert L nicht existiert macht das Quotientenkriterium keine Konvergenzaussage.
4. Wurzelkriterium:
   Sei $q := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist
   - absolut konvergent, falls $q < 1$,
   - divergent, falls $q > 1$.

   Im Fall $q = 1$ oder falls der Grenzwert q nicht existiert macht das Wurzelkriterium keine Konvergenzaussage.

Differenzialrechnung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ableitungsregeln:

Faktorregel: $h'(x_0) = (c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ (c: Konstante)

Produktregel: $h'(x_0) = (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$

Summenregel: $h'(x_0) = (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Quotientenregel: $h'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Kettenregel: $h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ **Umkehrregel:** $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

Exponentialfunktionen

$(e^x)' e^x$ / $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = e^{x \cdot \ln(a)} (x \cdot \ln(a))' = e^{x \cdot \ln(a)} \ln(a) = \ln(a) a^x$ / $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Logarithmusfunktionen

$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$ $f^{-1}(x) = \ln(x)$ $\log_a'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$\ln'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$ $(e^{x^2+x+1})' = e^{x^2+x+1} (x^2+x+1)'$

Funktionen: $(x^r)' = (e^{r \ln(x)})' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)} r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1}$

Trigonometrische Funktionen

$\sin'(x) = \cos(x)$ / $\cos'(x) = -\sin(x)$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ / $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

Arkusfunktion

$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\arcsin'(x) = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ / $\arccos'(x) = (\cos^{-1}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Regel L'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lokale Approximation Tangente

$y_t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ → von Punkt $P(x_0; f(x_0))$