Vektorraum

Vektormenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$

- B enthält genau n Vektoren — $rg(B) = n$ — B ist invertierbar
- Vektoren von B linear unabhängig — $det(B) \neq 0$ — LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eindeutig lösbar

Umrechnung Komponentendarstellung

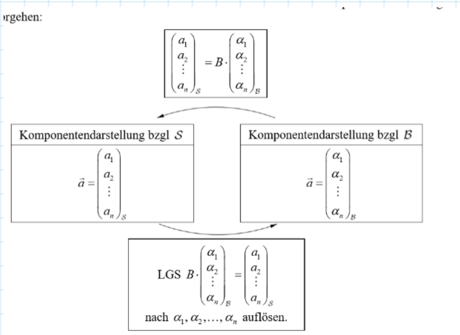
z.B. B von $\mathbb{R}^2$ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S$ & $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B$

$\vec{a}$ zu Basis S $\Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_S$

" " "

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_S$ $\vec{a}$ zu Basis B $\Rightarrow \vec{a} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) = \dots \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_B$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$



Lineare Abbildung

Ist Abbildung linear?

Bedingung 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Bedingung 2: $f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Matrix

$\boxed{f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}}$ $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$

Bsp.:

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f.

$x_1 \begin{pmatrix} -0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, z.B. $f\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Basis B zu Basis C

$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$ ${}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} (f(\vec{b}_1))_C & (f(\vec{b}_2))_C & \dots & (f(\vec{b}_n))_C \end{pmatrix}_B$

Bsp.:

Gegeben sind die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{S_2} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{S_3}$ sowie die Basen

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{S_2}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{S_2} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$ und $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3}; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}_{S_3} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

$f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \dots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$ $f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}_C$

$f(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}_C$ $\Rightarrow {}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	Spiegelung an der x/y-Ebene	Orthogonale Projektion auf die x-Achse	Spiegelung an der x-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lineare Abbildung in Ebene

Rotation um Winkel φ $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion Gerade durch Ursprung $P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$! Geradengleichung muss normiert sein !

Abbildungsmatrix

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $|\vec{n}| \overset{!}{=} 1$

normierter Vektor

Spiegelung Gerade durch Ursprung $S=\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab\\ -2ab & 1-2b^2\end{pmatrix}$! Geradengleichung muss normiert sein ! $|\vec{n}|=1$

Streckung $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ x Richtung, y Richtung   Scherung $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ x-Richtung, y-Richtung

Lineare Abbildungen im Raum

Orthogonale Projektion auf Ebene $P=\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix}$ Spiegelung Ebene durch Ursprung $S=\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & 1-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & 1-c^2\end{pmatrix}=E-2\vec{n}\cdot\vec{n}^T$

Rotation:

z-Achse $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y-Achse $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$ x-Achse $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

Geradengleichung normiert ! $|\vec{n}|=1$

Rotation allgemeine Achse durch Ursprung:

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)+a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi))-a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi))+a_2\sin(\varphi)\\ a_1a_2(1-\cos(\varphi))+a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))-a_1\sin(\varphi)\\ a_1a_3(1-\cos(\varphi))-a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))+a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_3^2(1-\cos(\varphi))\end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung: $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

Verknüpfung von Lineare Abbildung

$g\circ f$

zuerst f, da es $\boxed{\text{rechts}}$ steht

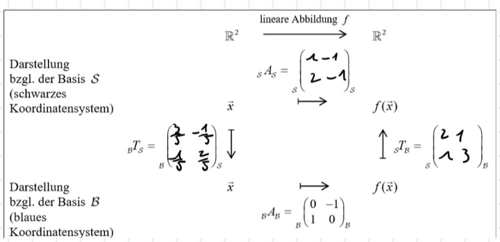
$$\begin{array}{ccccc} & & g\circ f & & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k\\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x))\\ x & \mapsto & A\cdot x & \mapsto & B\cdot(A\cdot x)=(B\cdot A)\cdot x\end{array}$$

f Matrix A   g Matrix B

Spiegelung: $S^2=E$

Projektion: $P^2=P$

Basiswechsel



${}_SA_S={}_ST_B\cdot{}_BA_B\cdot{}_BT_S$

${}_ST_B=\left(\begin{pmatrix}\vec{b_1}\end{pmatrix}_S \begin{pmatrix}\vec{b_2}\end{pmatrix}_S\right)_B$ ${}_BT_S={}_ST_B^{-1}$

$B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S;\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_S\right)$ $f(b_1)=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S\right)=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}_S$

$f(b_2)=\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_S\right)=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}_S$

LGS: $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & x_1\\ 1 & 0 & y_1\end{array}\right)=\dots\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & y_1\end{array}\right)$

${}_BA_B=\begin{pmatrix}x_1 & \dots\\ y_2 & \dots\end{pmatrix}$

Verkette Rotation

$R_y'(\beta)\cdot R_z(\gamma)=R_z(\gamma)\cdot R_y(\beta)$

Homogene Koordinaten (Translation+Rotation)

homogen: $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

homogen Translation: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

Eigenwert

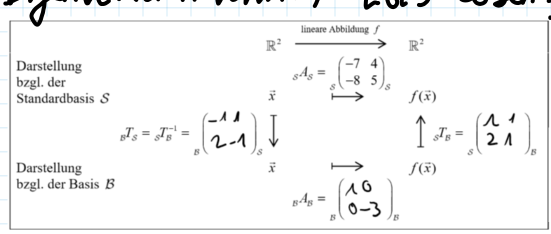
$f(\vec{x})=\lambda\cdot\vec{x}$ bzw. $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$ $chp(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E)$ => Eigenwerte Matrix A

$A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{x}=0$ bzw. $(A-\lambda\cdot E)\,\vec{x}=0$ nur Lösungen, wenn $\det(A-\lambda\cdot E)=0$

Eigenwert von A => λ z.B. $A=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & 5\end{pmatrix}$ $\det\left(\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & 5\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}-7-\lambda & 4\\ -8 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\dots$

Eigenvektoren von A => LGS lösen: z.B. $\lambda=1$ $\left(\begin{array}{cc|c}-7-1 & 4 & 0\\ -8 & 5-1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-8 & 4 & 0\\ -8 & 4 & 0\end{array}\right)=\dots\left(\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $x_1=\frac{1}{2}\mu$, $x_2=\mu$

$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mu\\ \mu\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$



$A=T\cdot D\cdot T^{-1}$

$A^k=(T\cdot D\cdot T^{-1})^k=T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot\ldots\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D^k\cdot T^{-1}$

$$\begin{pmatrix}d_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}d_{11}^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_{22}^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^k\end{pmatrix}$$

Diagonalisierbar, wenn versch. EW
linear unabhängige EV