Vektorraum

Vektormenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$

- B enthält genau n Vektoren
- Vektoren von B linear unabhängig
- $rg(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$ eindeutig lösbar

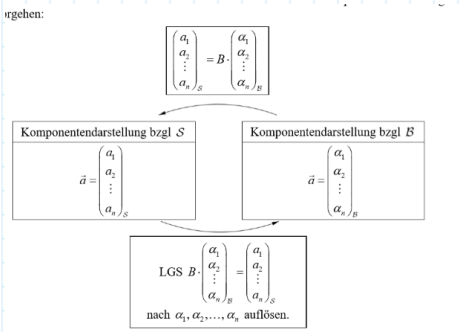
Umrechnung Komponentendarstellung

z.B B von $\mathbb{R}^2$ // $\vec{b_1} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_S$ // & $\vec{b_2} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}_S$ // $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}_B$

$\vec{a}$ zu Basis S $\Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_S - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_S$

$\vec{a}$ zu Basis B $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 2\\1 & 3 & -1\end{array}\right) = \dots \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{array}\right)_B$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_B$



Lineare Abbildung

Ist Abbildung linear?

Bedingung 1: $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

Bedingung 2: $f\left(\lambda \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \lambda f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

Matrix

$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ $\quad A = \left(f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2}) \dots f(\vec{e_n})\right)$

Bsp.:

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x_2\\2x_1\\x_2 - x_1\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f.

$x_1 \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad x_2 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$, z.B $f\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\6\\4\end{pmatrix}$

Basis B zu Basis C

$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$ $\quad {}_C A_B = \left((f(\vec{b_1}))_C\ (f(\vec{b_2}))_C \dots (f(\vec{b_n}))_C\right)_B$

Bsp.:

Gegeben sind die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{S_2} \mapsto \begin{pmatrix}-x_2\\2x_1\\x_2 - x_1\end{pmatrix}_{S_3}$ sowie die Basen

$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_{S_2}; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_{S_2}\right\}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{S_3}; \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_{S_3}; \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}_{S_3}\right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

$f(\vec{b_1}) = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{b_2}) = \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -5\\0 & 2 & -4 & 4\\1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -11\\0 & 1 & 0 & 14\\0 & 0 & 1 & 6\end{array}\right)$ $\quad f(\vec{b_1})_C = \begin{pmatrix}-11\\14\\6\end{pmatrix}_C$

$f(\vec{b_2}) = \begin{pmatrix}-11\\15\\8\end{pmatrix}_C \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix}-11 & -11\\14 & 15\\6 & 8\end{pmatrix}_B$

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	**Spiegelung** an der x/y-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die x-Achse	**Spiegelung** an der x-Achse
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Lineare Abbildung in Ebene

Rotation um Winkel φ $\quad \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion Gerade durch Ursprung $\quad P = \begin{pmatrix}1-a^2 & -ab\\-ab & 1-b^2\end{pmatrix}$ Abbildungsmatrix

$\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\quad |\vec{n}| \stackrel{!}{=} 1$ normierter Vektor

‼ Geradengleichung muss normiert sein ‼

Spiegelung Gerade durch Ursprung $S=\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab\\ -2ab & 1-2b^2\end{pmatrix}$! Geradengleichung muss normiert sein ! $|\vec{n}|=1$

Streckung $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ x Richtung, y Richtung Scherung $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ x-Richtung, y-Richtung

Lineare Abbildungen im Raum

Orthogonale Projektion auf Ebene $P=\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix}$

Spiegelung Ebene durch Ursprung $S=\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & 1-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & 1-c^2\end{pmatrix}=E-2\vec{n}\cdot\vec{n}^T$

Rotation:

z-Achse $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y-Achse $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$ x-Achse $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

Geradengleichung normiert ! $|\vec{n}|=1$

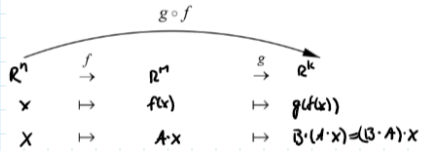
Rotation allgemeine Achse durch Ursprung:

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)+a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi))-a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi))+a_2\sin(\varphi)\\ a_1a_2(1-\cos(\varphi))+a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))-a_1\sin(\varphi)\\ a_1a_3(1-\cos(\varphi))-a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))+a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_3^2(1-\cos(\varphi))\end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung: $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

Verknüpfung von Lineare Abbildung

$g\circ f$

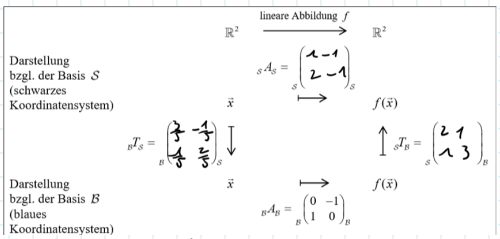


f Matrix A g Matrix B

Spiegelung: $S^2=E$

Projektion: $P^2=P$

Basiswechsel



${}_S A_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_S$

${}_S T_B = \left(({}\vec{b_1})_S \; (\vec{b_2})_S \right)_B$ ${}_B T_S = {}_S T_B^{-1}$

$B=\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}_S\right)$ $f(b_1)=\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}_S\right)=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}_S$

$f(b_2)=\left(\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}_S\right)=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}_S$

LGS: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x_1\\ \lambda & 0 & y_1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & x_1\\ 0 & \lambda & y_1\end{array}\right)$

${}_B A_B = \begin{pmatrix}x_1 & \cdot\\ y_2 & \cdot\end{pmatrix}$

Verkettete Rotation

$R_{y'}(\beta)\cdot R_z(\gamma)=R_z(\gamma)\cdot R_y(\beta)$

Homogene Koordinaten (Translation+Rotation)

homogen: $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$

homogen Translation: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & a_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$

Eigenwert

$f(\vec{x})=\lambda\cdot\vec{x}$ bzw. $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$

$A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{x}=0$ bzw. $(A-\lambda\cdot E)\vec{x}=0$

$\chi_p(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E) \Rightarrow$ Eigenwerte Matrix A

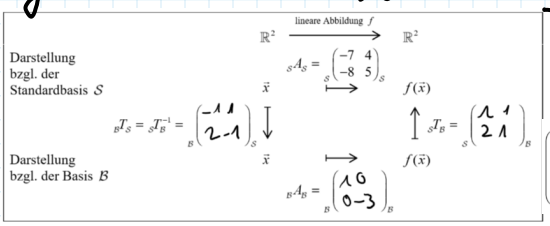
nur Lösungen, wenn $\det(A-\lambda\cdot E)=0$

Eigenwert von A $\Rightarrow \lambda$ z.B $A=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & 5\end{pmatrix}$ $\det\left(\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & 5\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}-7-\lambda & 4\\ -8 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\dots$

Eigenvektoren von A $\Rightarrow$ LGS lösen: z.B $\lambda=1$

$\left(\begin{array}{cc|c}-7-1 & 4 & 0\\ -8 & 5-1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-8 & 4 & 0\\ -8 & 4 & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $x_1=\frac{1}{2}\mu$, $x_2=\mu$

$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mu\\ \mu\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$



$A=T\cdot D\cdot T^{-1}$

$A^k=(T\cdot D\cdot T^{-1})^k=T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot\dots\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D^k\cdot T^{-1}$

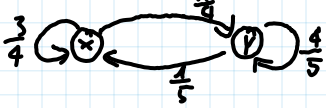
$\begin{pmatrix}d_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}d_{11}^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_{22}^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}^k\end{pmatrix}$

Diagonalisierbar, wenn verschiedene EW, linear unabhängige EV

nxn Matrix → wenn n linear unabhängige EV
⇒ sicher wenn $\chi_p(\lambda)$ n versch. Nullstellen
⇔ sicher NICHT wenn $\chi_p(\lambda)$ < n reelle Nullstellen

Def: EV zum EW 1 heisst: stationärer Zustand
stochastische Matrix A gilt: $\lambda_1 = 1$ ist EW von A

Übergangsmatrizen



$x_{neu} = \frac{3}{4} x_{alt} + \frac{1}{5} y_{alt}$

$y_{neu} = \frac{1}{4} x_{alt} + \frac{4}{5} y_{alt}$

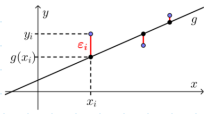
$\begin{pmatrix} x_{neu} \\ y_{neu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix}$

Lineare Regression

Residuum $\varepsilon_i = y_i - g(x_i)$

$g(x) = b + m \cdot x$

Regressionsgerade $g(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$



LGS $A \cdot \vec{\beta} = \vec{y} - \vec{\varepsilon}$

$\vec{a_1} \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{a_2} \cdot \varepsilon = 0$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

a_1 a_2 y ε

$\Rightarrow \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

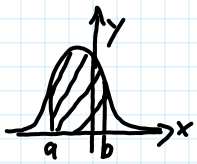
a_1 a_2 y ε

Normalengleichung:
$A^T \cdot A \cdot \vec{\beta} = A^T \cdot \vec{y}$

Verteilung

$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
$= \int_{-\infty}^{b} f(u)\,du - \int_{-\infty}^{a} f(u)\,du = \int_{a}^{b} f(u)\,du$



$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$
$= 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(u)\,du$

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\,dx$ Erwartungswert

$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2\,dx = E(X^2) - E(X)^2$ Varianz

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ Standardabweichung

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
Dichtefunktion / PDF	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'(x) \neq P(X = x)$!!!
Kumulative Verteilungsfunktion / CDF	$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$	$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$
Wahrscheinlichkeiten	$P(a \le X \le b) = \sum_{a \le u \le b} f(u)$	$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(u)\,du$
Graphische Darstellung von f	Stabdiagramm	Graph
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\,dx$
Varianz	$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot (x - E(X))^2$	$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2\,dx$

(1) **Linearität des Erwartungswertes:**
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ und $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) **Verschiebungssatz für die Varianz:** $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

(3) $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(4) Sind X und Y stochastisch unabhängig, so gilt: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Bernoulli-Verteilung

$E(X) = p$ $E(X^2) = p$ $V(X) = p \cdot q$ $q = 1 - p$

Binomialverteilung:

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

$P(X \le x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots$

$P(X \ge x) = 1 - P(X = x_1)$
→ z.B. $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0)$

$E(X) = n \cdot p$ $V(X) = n \cdot p \cdot q$

Gauss-Verteilung:

Zufallsvariable $X \sim N(\mu; \sigma)$

Standardisieren: $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$P(\mu - \varepsilon \le X \le \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$

arithmetisches Mittel: $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \cdot S_n\right) = \mu$

$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \cdot S_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\bar{X}_n \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $S_n \sim N(n\mu; \sqrt{n} \cdot \sigma)$

Wenn $P(a \le X \le b)$ → $a - \frac{1}{2}$ & $b + \frac{1}{2}$
Wenn $P(a < X \le b)$ → $a + \frac{1}{2}$ & $b + \frac{1}{2}$
Wenn $P(a \le X < b)$ → $a - \frac{1}{2}$ & $b - \frac{1}{2}$

Parameterschätzung

Θ_1 effizienter Θ_2 : $V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$

konsistent wenn $E(\Theta) \to \theta$ & $V(\Theta) \to 0$

$E(\Theta) = \theta$ → erwartungstreu (Parameter, Schätzfunktion)

Schätzwert: $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

Schätzfunktion: $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Spezialfall Bernoulli: $\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\text{Anz Erfolge}}{n}$

Vertrauensintervall

Wahrscheinlichkeit γ → $\alpha = 1 - \gamma$ (Irrtumswahrscheinlichkeit)

standardisieren: $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ $\quad e = c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\theta_u = \bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\theta_o = \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

} Grenzen

Hypothesentests

$H_0 : \mu = \mu_0$ (Nullhypothese) $\quad H_A : \mu \neq \mu_0$ (Alternativhypothese) → 2-seitige Hypothese

$H_A : \mu > \mu_0$ → 1-seitige Hypothese, kritischer Bereich rechts

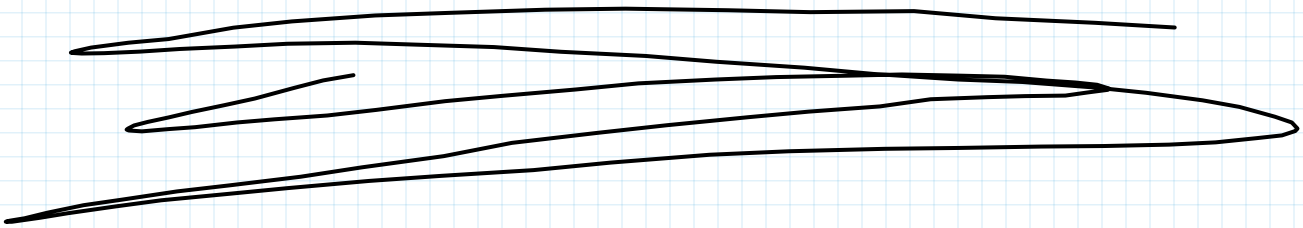
$H_A : \mu < \mu_0$ → 1-seitige Hypothese, kritischer Bereich links

Testwert $\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

Testentscheid: $c_u \leq \hat{t} \leq c_o$ → plausibel, im Annahmebereich

$\hat{t} < c_u$ or $c_o < \hat{t}$ → abgelehnt, im kritischen Bereich

Übersicht Vertrauensintervalle

Übersicht

versch. Parameters